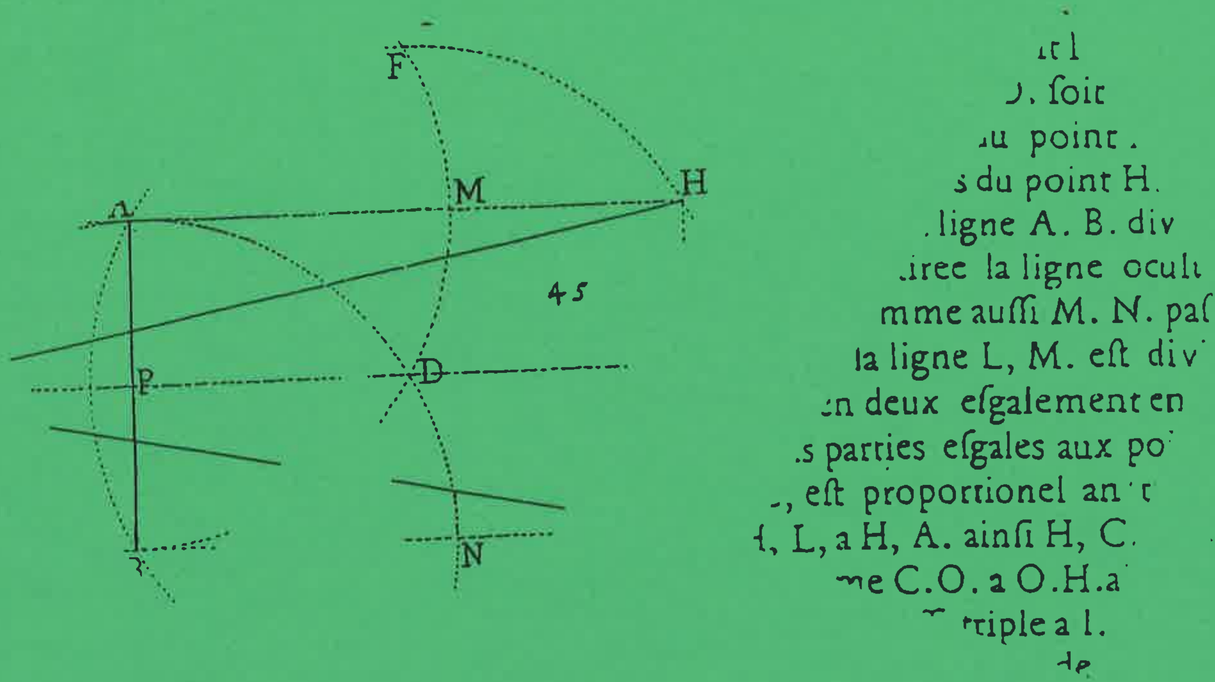
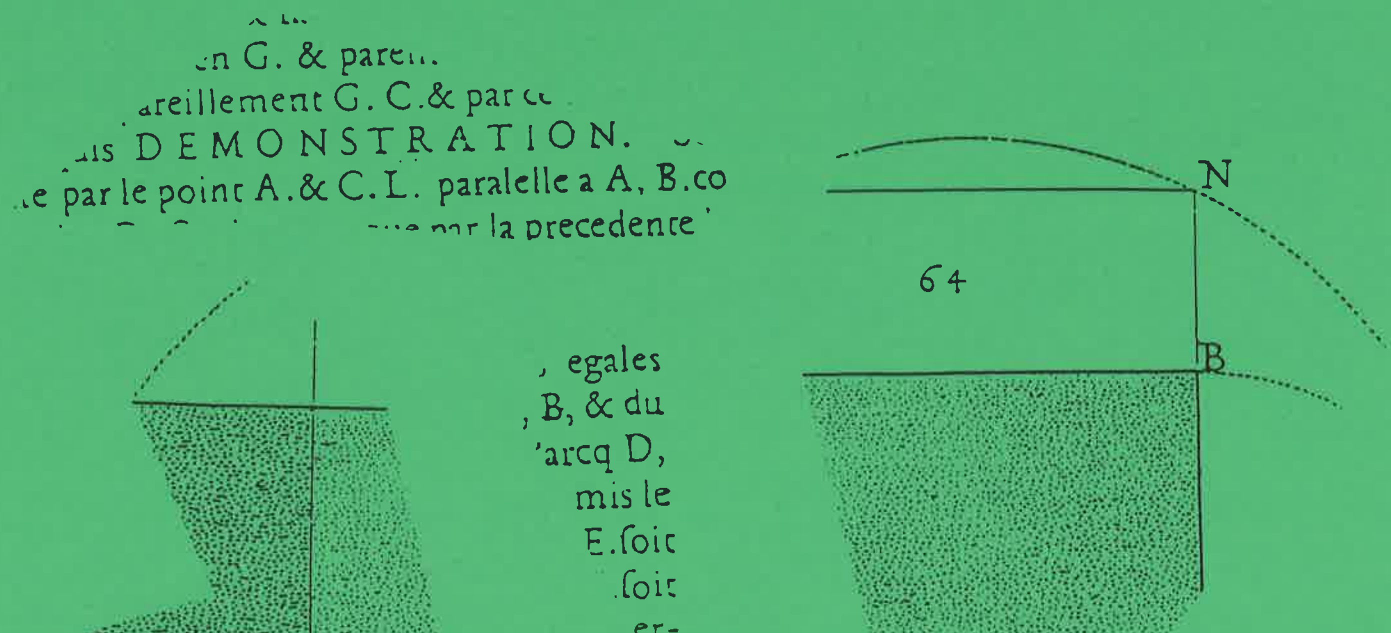
LA GEOMETRIE DE
SAMVEL MAROLOIS.



QUADRATURES ET TRISECTIONS EN CLASSE



I.R.E.M. de DIJON

Juin 1999

SOMMAIRE

PREFACE

Louis MAGNIN, Directeur de l'IREM

Perspective historique, utilisation de l'Histoire des Mathématiques pour leur enseignement en classe, quel impact ?

L'Histoire des Mathématiques est beaucoup étudiée dans les travaux des IREM. Elle peut être utilisée de deux façons différentes pour l'enseignement des mathématiques.

D'une part elle peut être l'occasion de montrer la progression des idées, l'émergence des concepts et leur nécessité, de faire retour à l'origine des idées qui ont donné naissance à des pans entiers des mathématiques, par exemple les idées développées par Fourier dans sa "*Théorie analytique de la chaleur*", qui ont engendré toute l'Analyse Harmonique moderne.

Mais l'Histoire des Mathématiques peut aussi être utilisée par le biais de l'introduction d'une *Perspective historique* dans l'enseignement. Il s'agit alors, à partir de textes historiques ou de parties de textes, de construire des activités d'enseignement mettant en œuvre les connaissances des élèves.

L'intérêt d'une telle perspective historique est multiple. La lecture des textes historiques permet bien entendu aux élèves de prendre conscience de l'évolution de la langue, de l'orthographe, leur procurant une ouverture d'esprit allant au–delà des mathématiques. Sur le plan mathématique, les élèves peuvent réaliser l'utilité de certaines notions, constructions, la nécessité de la rigueur. Ils peuvent être amenés à rechercher d'éventuelles erreurs, ce qui est toujours une attitude très formatrice, être amenés à se demander si telle ou telle assertion est réellement démontrée, prenant par là–même conscience de ce que doit être une démonstration, et de sa nécessité. Le texte historique présente l'avantage, par rapport à un texte d'activité habituel, de pouvoir être mis en question sans hésitation par les élèves, avec comme on pourrait le dire, distanciation immédiate de l'élève, à la fois par rapport au texte mathématique, et, dans sa réflexion, par rapport au Professeur. Une telle distanciation lui permet d'être mieux à même de mobiliser ses connaissances et de s'affirmer vis–à–vis du texte.

Une difficulté qui se présente pour l'introduction d'une perspective historique en classe est bien entendu la recherche et la sélection des textes qui doivent être à la fois assez facilement adaptables à la terminologie actuelle, compréhensibles par les élèves, mobiliser les connaissances des élèves définies par les Programmes, et enfin être d'un intérêt mathématique avéré.

Le groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Dijon, qui bénéficie d'un support financier en HSA de la DESCO, a su habilement mener à bien un tel travail de perspective historique, avec expérimentation dans les classes.

Un travail de recensement des fonds scientifiques locaux de Bourgogne a été effectué par le groupe et des textes de la géométrie pour les fortifications de Samuel Marolois particulièrement adaptés ont été sélectionnés.

Le présent document présente 4 activités géométriques construites sur ces textes de Marolois, toutes expérimentées avec les élèves.

Comptes rendus, commentaires et textes originaux figurent en annexes.

INTRODUCTION

Le groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Dijon bénéficie depuis 1995 du soutien de la Direction des Lycées et des Collèges pour mener à bien un travail collectif d'essai d'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques. Depuis cette date, les membres du groupe ont entrepris une étude suivant plusieurs axes : recensement des sources possibles en textes originaux dans la région (Bibliothèques Municipales Dijon, Nevers, Chalon sur Saône, Mâcon), étude des fonds scientifiques locaux (cette étude, dépassant le cadre initial, est prévue sur le long terme), utilisations en classe.

Parmi les ouvrages découverts, celui qui a été étudié, *Opera Mathematica, ou œuvres mathématiques traictans de géometrie, perspective, architecture et fortification, par Samuel Marolois, ausquels sont ajoins les fondements de la perspective, et architecture de J. Vredm Vriese augmentée et corrigée en divers endroicts par le mesme auteur* a été édité à la Haye en 1614 ce qui semble surprenant puisque la partie de géometrie du livre est, elle, datée de 1616. Une erreur de quelques années s'est peut-être glissée au moment de l'impression... L'exemplaire dont sont tirés les textes étudiés appartient à l'*Académie François Bourdon* du Creusot, qui gère une partie du patrimoine industriel de la famille Schneider (elle possède avec la bibliothèque du château l'un des plus gros dépôts de livres techniques de France.) Bibliophile convaincu, l'un des membres de la famille Schneider avait acquis quelques livres scientifiques anciens. C'est ainsi que des membres du groupe ont découvert *Les œuvres mathématiques traictans de géométrie, perspective, architecture et fortification* de Samuel Marolois.

On sait peu de choses sur la vie de Samuel Marolois. Né dans la deuxième moitié du seizième siècle (1572), il passe la plus grande partie de sa vie en Hollande, peut-être pour fuir la répression contre les adeptes de la *nouvelle religion*. On lui doit des ouvrages sur la géométrie, la perspective et les fortifications, comme *Fortification ou Architecture militaire, tant offensive que défensive* (La Haye, 1615), et *Perspective contenant la théorie et practicque d'icelle*, daté de 1614-1615.

Largement inspirée d'Euclide, la *Géométrie* de Marolois se singularise par ses finalités. Son intérêt pour les plans des fortifications et la perspective l'a incité à présenter de nombreuses constructions, transformations et découpages de figures polygonales ou circulaires dont nous vous donnons quelques exemples.

Elle nous a paru bien adaptée à une étude "multicolore" de par sa richesse, la simplicité des prérequis, le langage étrange qui permet un travail de distanciation et de traduction, et même les nombreuses erreurs qui favorisent une étude critique. Nous avons donc cherché à proposer à nos élèves des activités autour d'extraits de la *Géométrie* de Marolois, et ce fut de nouveau l'occasion de porter un regard inhabituel sur leur activité et de partir à l'aventure historico-mathématique...

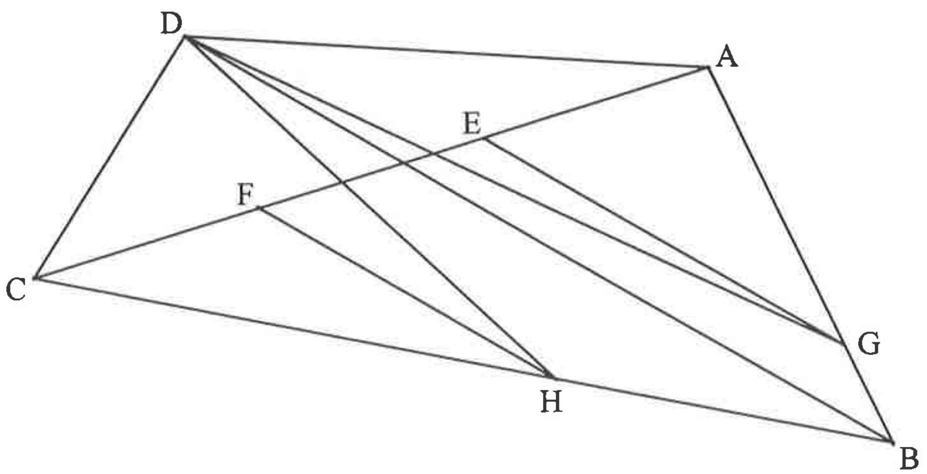
Le compte rendu de nos travaux comprend celui de chaque activité, avec nos commentaires et les textes en annexes ; nos situations géographiques ne nous permettaient pas de mener nos expérimentations dans les mêmes classes, néanmoins les similitudes des commentaires mettent en évidence l'unité de l'ensemble.

UN PROBLEME DE TRISECTION RESOLU PAR MAROLOIS

Pierre COLLAUDIN, Lycée de Paray-le-Monial

Dans la fin de la partie géométrique se rapportant aux constructions à la règle et au compas, Marolois traite plusieurs problèmes de partage. Il s'agit de partager en parties égales des polygones (quadrilatère, pentagone ...) suivant des contraintes données. La proposition 60 que nous allons étudier dans ce paragraphe est l'un de ces problèmes, elle s'énonce ainsi : "Diviser un quadrilatère par lignes sortantes d'un des angles".

Marolois propose deux solutions, nous ne nous intéresserons qu'à la première. La seconde solution, elle, est assez proche des solutions reprises dans les autres constructions, elle repose essentiellement sur la réduction du polygone en un triangle, puis du partage d'un côté du triangle en trois parties égales. La première solution est plus originale, elle est présentée sous le titre de construction 167 : "Soit le quadrilatère à diviser en trois parties égales ABCD, soit tirée la diagonale AC, laquelle soit divisée en trois parties égales et soient de ces points fait les parallèles à la diagonale BD, coupant les côtés AB et BC en G et H desquels étant menées lignes droites au point D aurons la division requise."



L'activité qui suit peut être traitée en seconde, voire même en troisième, une seule connaissance est nécessaire : savoir que l'aire d'un triangle est le demi-produit d'une base par une hauteur.

L'activité est donc divisée en trois parties :

- La lecture du texte avec une vérification expérimentale de la méthode de Marolois.
- L'étude de propositions préliminaires donnant l'idée de la justification de la méthode étudiée.
- La justification finale de la méthode.

I - Lecture du texte avec les élèves

Cette lecture nécessite toujours quelques explications classiques, typographiques pour les s qui ne sont pas placés en fin de mot et qui ressemblent plus à des lettres f, orthographiques pour les s et les c qui ont disparu dans notre orthographe actuelle : esgale, estre, costé, estant, droicte, faict.

Le vocabulaire demande aussi quelques explications, "lignes sortantes", "d'iceux points" "es points"

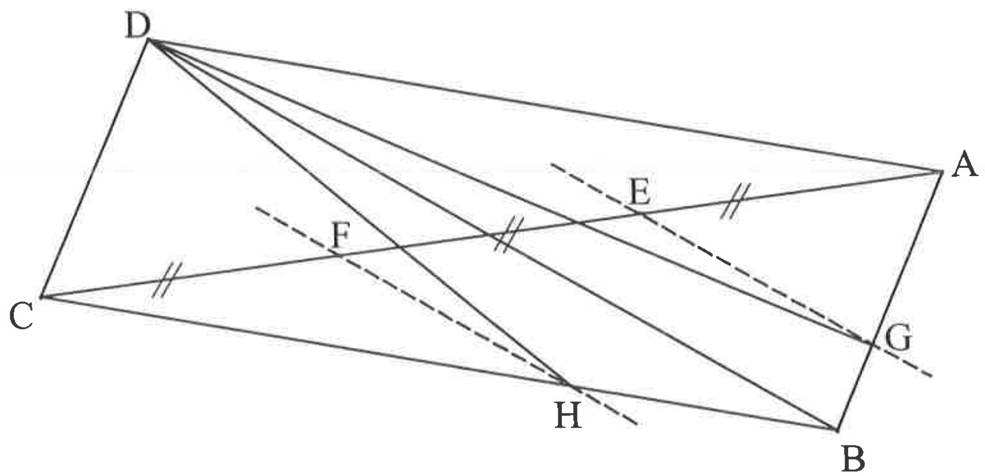
L'élève s'attarde toujours plus à ces curiosités liées à l'ancienneté du langage, qu'au contenu mathématique du texte. Une fois la curiosité de l'élève satisfaite, nous pouvons passer au texte mathématique .

II – Vérification expérimentale de la méthode de Marolois

La mesure d'une aire n'étant pas aisée expérimentalement, nous devons aborder des cas particuliers de figure.

Deux cas sont donc traités avec les élèves : le rectangle puis le parallélogramme. Dans le rectangle l'élève peut calculer l'aire totale du rectangle, l'aire des deux triangles DCH et DGA qui sont rectangles en C et en A et il ne reste qu'à déduire celle de la troisième partie, la méthode de Marolois est donc assez simple à vérifier.

Dans le cas du parallélogramme, il faut repérer que la diagonale [DB] partage déjà le quadrilatère ABCD en deux triangles de même aire, il suffit donc que les triangles DCH et DGA aient pour aires les deux tiers de celles des triangles DCB et DBA pour que la méthode soit vérifiée. Ayant des paires de triangles de même hauteur, le problème se ramène donc à prouver que H est aux 2/3 de [CB] et G aux 2/3 de [AB]

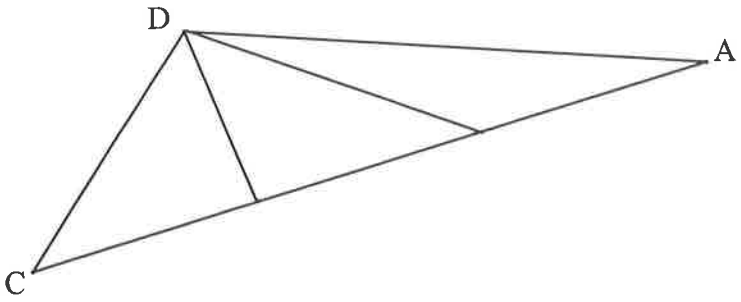


III – Etude de propositions préliminaires

La partie expérimentale faite et la méthode Marolois n'étant pas mise en défaut, sauf erreur de figure de l'élève, il reste à montrer la nécessité d'une preuve générale que les vérifications précédentes ne sauraient remplacer. Les avis des élèves divergent souvent de celui du professeur sur ce dernier point.

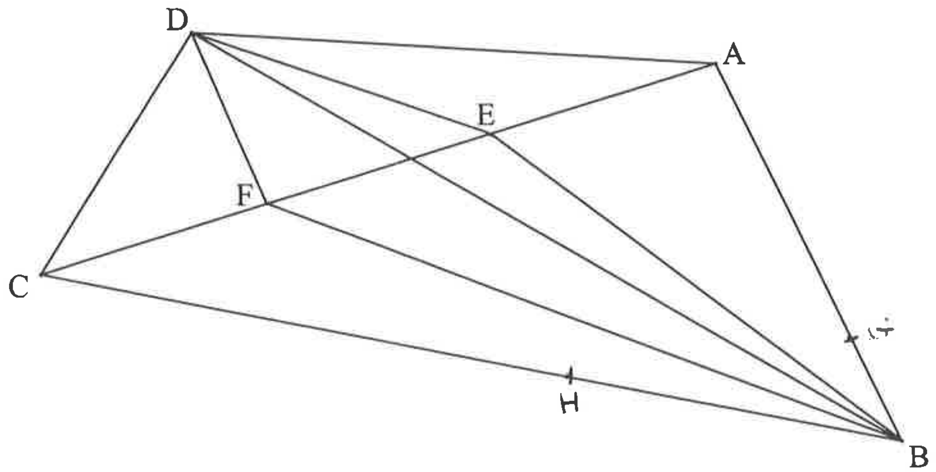
Deux propositions préliminaires sont nécessaires. La première n'est autre que la proposition 37 du livre 1 d'Euclide : "Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux ". En fait même si cette proposition nous paraît évidente, elle ne l'est pas pour les élèves, le rappel de la formule donnant l'aire d'un triangle est nécessaire mais pas toujours suffisante.

La deuxième est assez proche : il faut démontrer que si un segment [AC] est divisé en trois parties égales et si les extrémités de ces trois segments sont jointes à un point D extérieur au support de ces segments alors les trois triangles obtenus ont même aire.



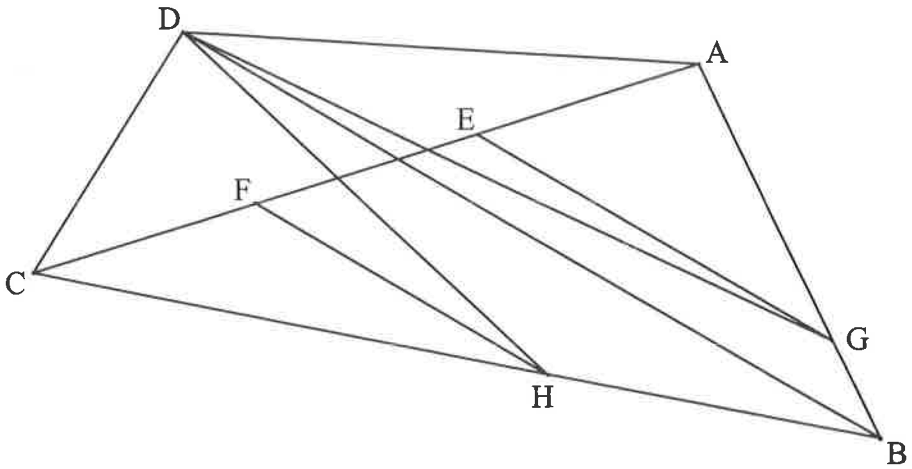
IV – Justification de la méthode de Marolois :

Sans aide supplémentaire la justification ne vient pas il faut fournir à l'élève des figures extraites de la construction de Marolois :



Il faut inciter les élèves à retrouver l'une des figures étudiée dans les deux propositions préliminaires dans le dessin extrait.

Une fois que tous sont d'accord que les quadrilatères DCBF, DFBE et DEBA réalisent bien un partage en trois parties égales de ABCD il reste encore à utiliser la proposition d'Euclide pour terminer la démonstration en prouvant que les triangles DEG et EGB ont même aire et qu'il en est de même pour DFH et FHB .



La difficulté principale de cette activité réside dans l'observation d'une figure et dans l'extraction de figures déjà rencontrées ou de figures clés. Or ce qui était certainement usuel pour les mathématiciens du niveau et de l'époque de Marolois, ne l'est plus pour nous et pour nos élèves. En dehors de la configuration dite de Thalès, notre catalogue est assez pauvre.

Fiche donnée aux élèves

I. Lire le texte de Marolois et relever les mots non compris et les curiosités rencontrées . proposition 60 et construction 167 (voir page 7 des annexes)

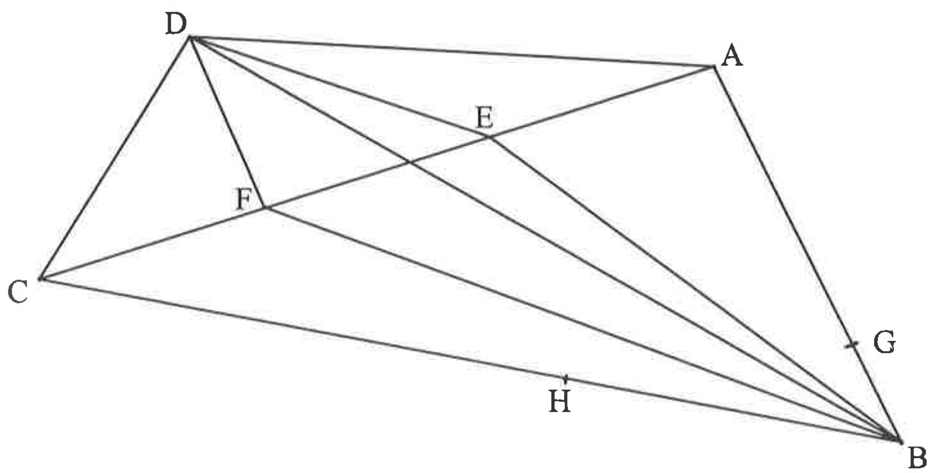
II. Essayer de vérifier la méthode de Marolois en prenant ABCD rectangle

III. Soit ABCD un parallélogramme, opérer le partage du parallélogramme suivant la méthode de Marolois, vérifier que le point H est situé aux deux tiers du segment [CB] et que G est situé aux deux tiers du segment [AB], en déduire que l'aire du triangle DCH est égale aux deux tiers de celle du triangle DCB et donc au tiers de l'aire du parallélogramme ABCD. Que dire du quadrilatère DHBG ?

IV. Soient d et d' deux droites parallèles, B et C deux points de d et A_1, A_2, A_3 trois points de d'. Montrer que les triangles A_1BC, A_2BC et A_3BC ont même aire. Enoncer un théorème général rapportant ce que vous venez d'étudier dans cette question.

V. Soit ABC un triangle quelconque, soient I et J deux points de [BC] tels que BI = IJ = JC. Comparer les aires des triangles ABI, AIJ et AJC .

VI. Retrouver sur la figure suivante des triangles de même aire, puis repérer trois quadrilatères partageant ABCD en trois parties égales.



VII. En reprenant la figure de Marolois prouver l'égalité des aires des triangles DFH et BFH puis de DEG et EGB, terminer la justification de la méthode de Marolois .

MAROLOIS DANS LES CLASSES

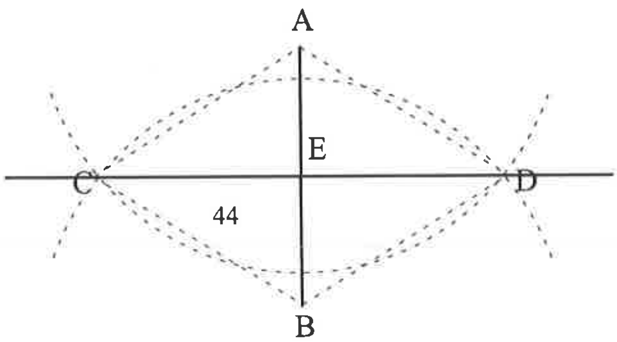
Patrick GUYOT, L.P. A. Dumaine - Mâcon

L'objet du travail qui est présenté ci-dessous est d'utiliser un support inhabituel pour faire travailler les élèves sur des connaissances censées être acquises, sans leur donner la sensation de réviser.

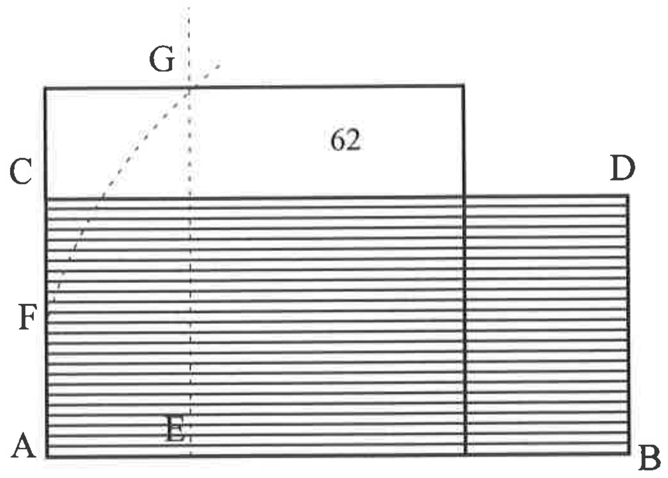
Les savoirs et savoir-faire réinvestis ici sont les suivants : calculs d'aires de rectangles et de carrés, utilisation du compas (construction de médiatrice, perpendiculaire), relation de Pythagore, racines carrées, calcul littéral, identités remarquables, rôle de la preuve en mathématiques, arrondi d'un calcul. La classe concernée est constituée d'élèves de seconde BEP habillement, vingt-quatre filles d'un niveau faible en mathématiques.

L'activité a été réalisée en deux heures séparées, les questions et consignes sont présentées oralement, méthode peu utilisée habituellement, mais qui permet dans ce cas de motiver la totalité du groupe, car les élèves travaillent individuellement, et la classe progresse simultanément.

La première heure est consacrée à la présentation de Samuel Marolois, de son livre et de son époque, et à la découverte de son "style" à travers la lecture de la proposition 2 - construction 44 (voir page 1 des annexes). Ce passage transitoire permet de familiariser les élèves avec l'écriture (les "f" pour "s", et autres &), et avec le vocabulaire utilisé ("partir" et "diverser" pour diviser, le "pied immobile du compas" pour la pointe, ...). Les élèves ont réalisé la construction 44.



Toujours pendant la première heure, les élèves ont lu la proposition 14 - construction 62 (voir page 5 des annexes) afin d'en comprendre le sens.



I – Première étape :

Les consignes de l'énoncé de la proposition 14 sont numérotées

Construire 1 - le rectangle ABDC (et non ABCD)
2 - le point F milieu de [AC]
3 - le point E à l'aide du compas (AE=AF)
4 - la perpendiculaire à (AB) en E
5 - le point G à l'aide du compas (BF=BG)
6 - le carré "égal" au rectangle donné

II – Deuxième étape :

Chaque élève effectue la construction en prenant AB=L=12,5 cm et AC=l=4,5 cm en suivant l'ordre indiqué précédemment.

Elles mesurent ensuite le côté du carré : EG ≈ 7,5 cm. Elles vérifient alors l'égalité des aires :

- aire du rectangle : $L \times l = 12{,}5 \times 4{,}5 = 56{,}25 \text{ cm}^2$
- aire du carré : $EG^2 = 7{,}5 \times 7{,}5 = 56{,}25 \text{ cm}^2$

Les élèves se satisfont de ce résultat et souhaitent en rester là avec ce problème.

Il faut alors l'intervention du professeur pour soumettre l'idée que ce qui a été fait n'est qu'une vérification. En effet, le résultat mesuré de 7,5 cm pour le côté du carré est peut-être une mesure approchée d'une autre valeur. La méthode ne serait alors pas rigoureusement valable. On doit donc passer par une phase calculatoire.

On peut noter à ce stade l'importance de la figure complète jointe au texte : ce procédé permet en effet de gommer les difficultés liées au texte ancien.

III – Troisième étape :

Les élèves doivent prouver l'égalité des aires en calculant les longueurs des segments obtenus au fur et à mesure de la construction indiquée à la première étape.

Voici un raisonnement d'élève :

$$\begin{aligned}
&AF = \frac{AC}{2}\\
&AF = 2{,}25 \text{ cm}\\
&AE = AF = 2{,}25 \text{ cm}\\
&BE = AB - EB\\
&BE = 10{,}25 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Triangle BAF rectangle en A. Relation de Pythagore :

$$\begin{aligned}
&BF^2 = AB^2 + AF^2\\
&BF^2 = 161{,}3125\\
&BF = \sqrt{161{,}3125}\\
&BF \approx 12{,}70 \text{ cm}\\
&BG = BF\\
&BG = 12{,}7 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Triangle BEG rectangle en B. Relation de Pythagore :

$$\begin{aligned}
&EG^2 = BG^2 - BE^2\\
&EG^2 = 12{,}7^2 - 10{,}25^2\\
&EG^2 = 56{,}2275\\
&EG \approx 7{,}498 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Cette valeur du côté du carré a été la seule obtenue par les élèves ayant été au bout des calculs.

La discussion qui a suivi a mis en évidence le problème de l'utilisation de résultats approchés dans des calculs intermédiaires.

Aucun élève n'a spontanément proposé d'utiliser la valeur exacte de 161,3125 obtenue pour BF^2. L'intervention du professeur a été nécessaire et a permis de valider les résultats, mais nous sommes persuadés que quelques élèves ont eu l'impression d'une manipulation des chiffres pour obtenir la valeur exacte de 7,5 par le calcul.

IV – Quatrième étape :

La détermination précédente concerne un cas particulier de rectangle 12,5×4,5 cm.

La méthode est-elle valable pour tous les rectangle $L \times l$? Il faut reprendre ligne après ligne la résolution de la troisième étape avec $AB=L$ et $AC=l$. On obtient :

$$AE = AF = \frac{l}{2}$$

$$BE = L - \frac{l}{2}$$

$$BF^2 = L^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$EG^2 = L^2 + \frac{l^2}{4} - \left(L - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$EG^2 = Ll$$

La méthode est alors définitivement acceptée puisqu'il n'y a pas eu de résultat approché intermédiaire dans ce calcul.

Nous avons néanmoins observé une perplexité de trois élèves devant une formule inhabituelle pour elles de l'aire d'un carré égale à $L \times l$, ce qui est la formule de celle du rectangle, et cette perplexité a subsisté malgré les commentaires du professeur.

En conclusion de cette activité, on peut avant tout remarquer la richesse d'un problème simple présenté au départ comme un procédé géométrique. De nombreuses connaissances sont mises en jeu, une participation majoritaire des élèves a lieu, et le prétexte historique joue bien ici son rôle à travers un intérêt pour la nouveauté (paradoxe : ce qui est issu de textes anciens est nouveau pour nos élèves non habituées à ce type d'exercices), un sujet habituellement non traité en collège ("quarrer" un polygone) permet de passer de la géométrie au calcul littéral.

V – Corollaire

Nous avons présenté ce travail à des collègues de L.P., et deux professeurs ont accepté de l'expérimenter avec leurs élèves. Il s'agit de Mme Dominique GRAS, PLP de Français, et de Mme Sylvie PAPIN, PLP de Mathématiques/Sciences, toutes deux enseignantes au Lycée Professionnel *A. Denis* de Montmirault (91), que nous remercions pour leur participation.

En français, le texte a été présenté aux élèves avec l'objectif de leur montrer que la langue évolue avec le temps. La séquence était intitulée "La vie des Mots", les élèves ont été invités à se pencher successivement sur l'écriture, l'orthographe, le genre des mots, le vocabulaire, la syntaxe, puis après une mise en commun, ils ont élaboré une translation-traduction du texte.

Une étude complète en Mathématiques a été entreprise ensuite par les mêmes élèves selon le processus décrit précédemment.

Les élèves ont montré un certain intérêt, en tout cas une certaine curiosité, devant ce document et face à un travail mélangeant mathématiques et français, mais également une certaine réticence pour quelques uns, qui ont ressenti une difficulté supplémentaire par rapport à un exercice traditionnel de mathématiques.

PROBLEMES DE SECTIONS ET QUADRATURES

EN PREMIERE

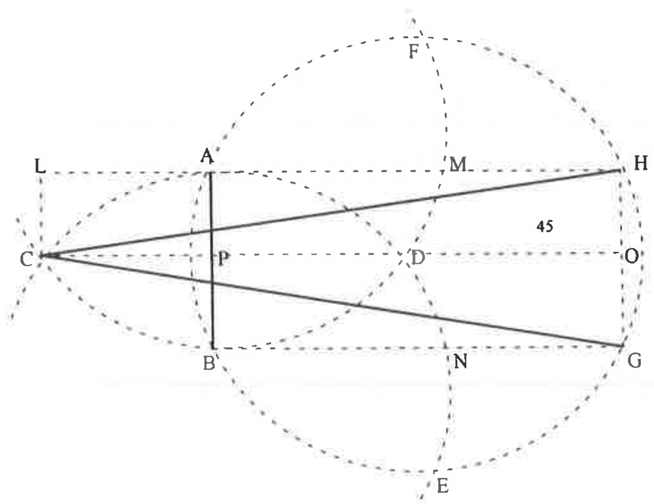
Frédéric METIN, Lycée "Le Castel" - Dijon

Attention au titre-piège : pas de trisection de l'angle, mais des sections de segments, pas de quadrature du cercle, mais de rectangles ! En mathématiques aussi l'effet d'annonce peut exister...

Les problèmes ont été abordés par des élèves de 1ères L (littéraire) et STL (Sciences et Technologie de Laboratoire). Les premiers, en principe pas vraiment scientifiques dans l'âme, se sont pourtant montrés intéressés par les questions de construction et celle du langage ; les seconds, en principe plutôt scientifiques, se sont poliment penchés sur le problème...

Il s'agissait tout d'abord de lire la proposition 2 (voir l'article de P. Guyot), pour se familiariser avec le langage utilisé, l'aspect typographique et les expressions (les "pieds du compas" seront vite acceptés) ; le plus difficile allait commencer en 1ère STL au moment d'aborder la proposition 3

Proposition 3 : Estant donnée une ligne droicte le deverser en 3. Parties esgales



Ce problème présente l'intérêt d'être accompagné de sa démonstration et d'une illustration qui porte à l'interprétation perspectiviste, du moins pratique : n'oublions pas que Marolois a en tête d'offrir des éléments de Géométrie pour toutes sortes de mesures sur le terrain, en particulier tout ce qui concerne les fortifications. On peut imaginer qu'un observateur est au point C et effectue des visées.

Le va-et-vient entre la proposition et sa figure est rendu nécessaire par une erreur de placement des points M et N (voir page 2 des annexes). La démonstration nécessite un travail approfondi, elle fait appel à la quatrième proposition du sixième livre des *Eléments* d'Euclide (notée "la 4. Du 6. D'Euc:"), actuellement appelée "théorème de Thalès". La difficulté réside principalement dans le style de Marolois, qui ressemble assez peu à nos exposés modernes, prédigérés pour nos chers élèves dont on ne pense pas que la motivation résisterait à la moindre obscurité... Avons-nous tort ?

Comme dans l'activité précédente, cette étude ne constitue qu'une première familiarisation des élèves avec le langage et la notation de Marolois (seuls les plus courageux[1] ont abordé l'analyse de la démonstration !), le but de la série d'activités étant finalement la proposition 14 accompagnée de la construction 63 (voir page 3 des annexes). Une activité plus autonome dans cette première série (celle des sections) porte sur les propositions 4 et 5, dans lesquelles il s'agit de découper un segment en quatre parties (avec une seule ouverture de compas) puis en autant de parties qu'il est requis : le texte de la première démonstration est très lisible et ne pose pas de problème aux élèves ; celui de la seconde n'est pas donné, puisqu'ils doivent en principe reconnaître d'un seul coup d'œil une utilisation archi-connue du théorème de Thalès. Effectivement, cela fonctionne très bien, et les élèves l'expliquent très facilement oralement.

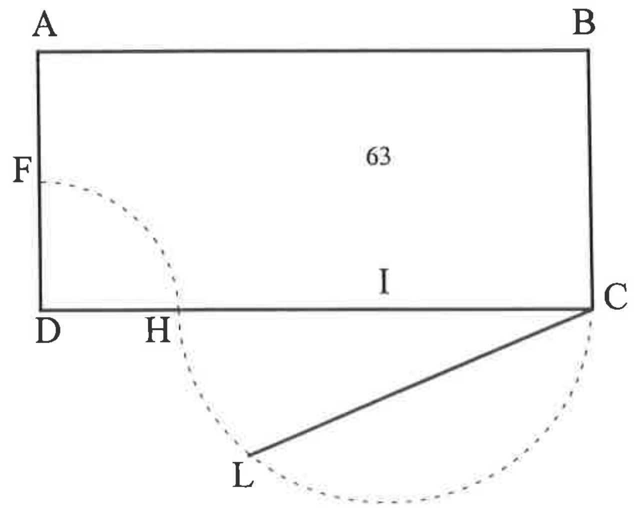
Proposition 14 : Estant donnée une paralellogramme rectangle le reduire en quare

La réponse à ce problème est donnée de trois manières différentes. La construction 62 (voyez le travail expérimental des BEP de Patrick Guyot) a donné lieu à un sujet de bac blanc pour les littéraires : il s'agissait de traduire le "programme" de construction, puis de réaliser cette dernière. Il est intéressant de noter que la majorité des élèves reste près du texte en détaillant la procédure ("on pose la pointe sèche du compas, puis on le fait tourner...") plutôt que de simplifier l'expression en demandant de construire un cercle.

Dans l'autre première (celle des techniciens de laboratoire), la construction 62 va être justifiée. Ils éprouveront des difficultés à comprendre la nécessité de prouver sa légitimité, alors que la difficulté de cette preuve est minime (il suffit en effet d'appliquer quelques fois le théorème de Pythagore). C'est sans doute un des effets pervers de la présentation d'un texte "tout fait" avec problème et solution.

Nous n'allions pas nous arrêter là : cette belle "évidence" de la justesse de la règle de construction allait être battue en brèche par la suivante. (voir page 3 des annexes).

Construction 63



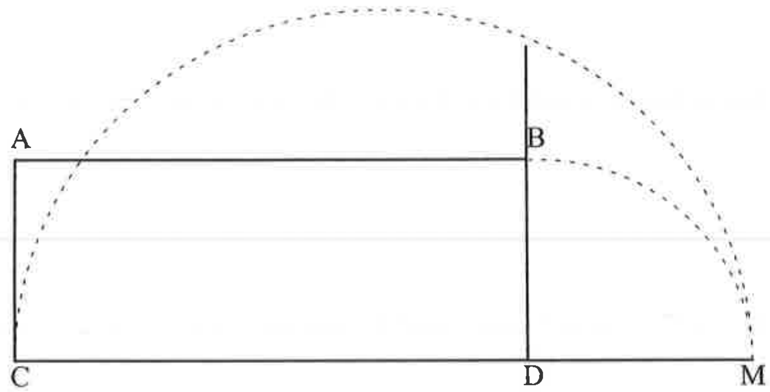
[1] Le problème a été lu et reconstruit par des élèves. Il s'agissait simplement pour eux de lire, alternativement en groupes et en classe entière, la proposition et la démonstration puis d'en donner une interprétation, ce qui n'était pas si simple...

Les élèves de $1^{ère}$ STL, qui ont pourtant un bagage scientifique plus important, ont une réaction comparable à celle des élèves de BEP : pas de besoin *a priori* de réinvestir les outils mathématiques dont ils disposent pour juger de la validité de la construction proposée.

Il faut donc leur donner des indications, car *le dessin ne correspond pas exactement au texte* ! La distance FD était en principe reportée à partir du milieu O de [DC], ce qui est contraire à l'illustration, où O n'apparaît pas. Les élèves ne l'ont pas vu, il a fallu mettre en évidence l'incompatibilité du texte et du dessin, puis leur demander d'identifier la construction correcte. Deux utilisations successives du théorème de Pythagore permettent de prouver que la bonne construction est celle du texte (il faut croire que le dessinateur n'était pas très au courant des mathématiques, cela fait d'ailleurs une grande partie du charme de l'ouvrage.)

Ce n'était pas vraiment évident pour les élèves (ils ont eu grand besoin de mon soutien), mais la preuve finale leur a apporté une grande satisfaction : c'était un peu comme si des archéologues étaient parvenus à reconstituer une énigme et à rentrer dans une autre époque...

Construction 64



Cette construction est un grand classique (voir texte page 4 des annexes). La classe est facilement parvenue à l'expliquer (je n'avais pas donné le texte), grâce à l'entraînement préalable, et à la justifier. Au bout d'un certain nombre d'exercices, les élèves évoluent donc à leur aise dans ces textes anciens ; la facilité aidant, la curiosité prend le dessus, et ils prennent un relatif plaisir à chercher, à discerner le vrai du faux dans les propositions de Marolois.

Pourtant, une fois l'activité terminée, ils sont très peu nombreux à en redemander...

UNE TRISECTION DE TRIANGLE

Philippe REGNARD, Lycée Jules Renard - Nevers

Après avoir décrit de nombreux procédés permettant d'inscrire et de circonscrire des figures polygonales ou circulaires les unes dans les autres, Marolois expose à partir de la proposition 59 des découpages de figures, bissections, trisections et autres.

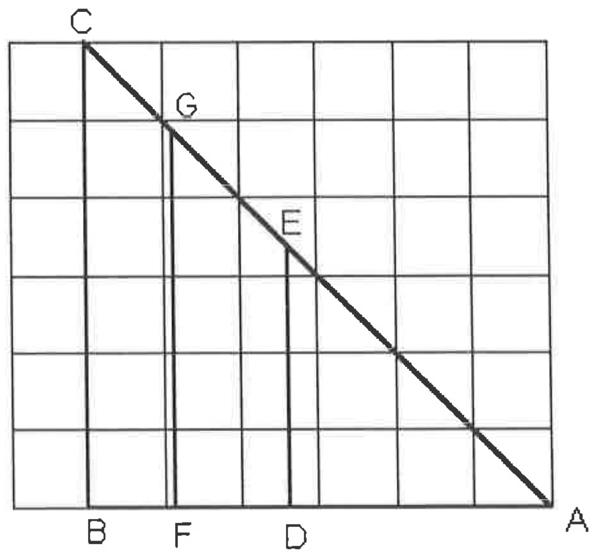
Le premier consiste à *"diviser un triangle en trois parties égales avec lignes parallèles à l'un des cotés"*.

La construction proposée (voir page 6 des annexes) n'a rien de surprenant. Elle utilise la moyenne proportionnelle de deux grandeurs permettant la construction à la règle et au compas d'une racine carrée comme la décrit Euclide dans la 13$^{\text{ième}}$ proposition du livre VI de ses Éléments.

Son intérêt pour des élèves de seconde a résidé tout d'abord dans le simple énoncé du problème qui a suscité des interrogations et des débats fructueux. Il s'est dégagé principalement d'une recherche empirique, qu'un triangle dont les dimensions sont trois fois plus petites n'a pas une aire trois fois plus petite. Une étude plus théorique nous a menés à la nécessité de construire des racines carrées en utilisant la hauteur d'un triangle rectangle. L'activité s'est terminée par une étude de la figure et de la construction de Marolois.

I – Construction expérimentale.

Après une présentation du problème et des propositions plus ou moins fantaisistes, les élèves ont tenté une trisection approchée sur un triangle rectangle isocèle de côté 6.



Il suffisait, dans le triangle ABC de délimiter trois secteurs d'aires égales à 6 ce qui était facilité par la présence de carreaux et de demi-carreaux. Les constructions obtenues ont fourni en moyenne les rapports suivants :

$$\frac{AB}{AD} \approx \frac{6}{3{,}4} \approx 1{,}76 \qquad \text{et} \qquad \frac{AB}{AF} \approx \frac{6}{4{,}9} \approx 1{,}22$$

II – Étude d'un triangle particulier

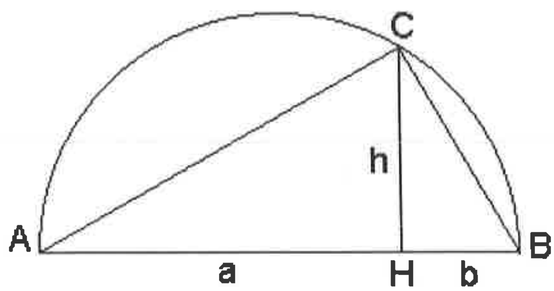
Afin d'expliquer les rapports trouvés précédemment, des calculs théoriques ont été demandés en conservant un triangle rectangle (voir figure précédente) dont l'aire est plus simple à calculer. Le cheminement a été le suivant :

1. Pourquoi l'aire du triangle ABC est-elle le triple de l'aire du triangle ADE ?
2. Si $\frac{AB}{AD} = k$, en déduire que k=3.
3. Par une méthode analogue, comparer les aires des triangles ABC et AFG, en déduire que $$\frac{AB}{AF} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$
4. Comparer $\sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{6}}{2}$ aux deux rapports obtenus expérimentalement.
5. Pour tripler l'aire d'un triangle, faut-il tripler les dimensions de ses côtés ?

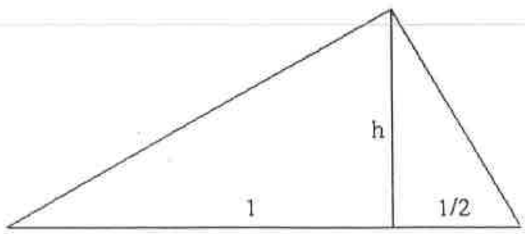
III – Constructions de racines carrées

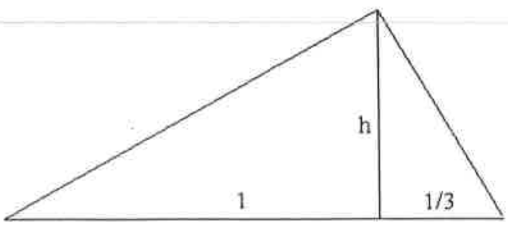
Dans sa construction, Marolois fait référence à la proposition 13 (et non 15) du livre VI des Éléments d'Euclide qui permet de "trouver la moyenne proportionnelle de deux droites données".

1. En utilisant le théorème de Pythagore dans les deux triangles rectangles ACH et BCH, Montrer que $h^2 = ab$ ou $h = \sqrt{ab}$.
2. On dit que h est la moyenne proportionnelle (ou moyenne géométrique) de a et b. Alors : $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$



3. En déduire une construction à la règle et au compas de $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ ou $\sqrt{a}$ $(a > 0)$.
4. Calculer h dans les figures ci-dessous

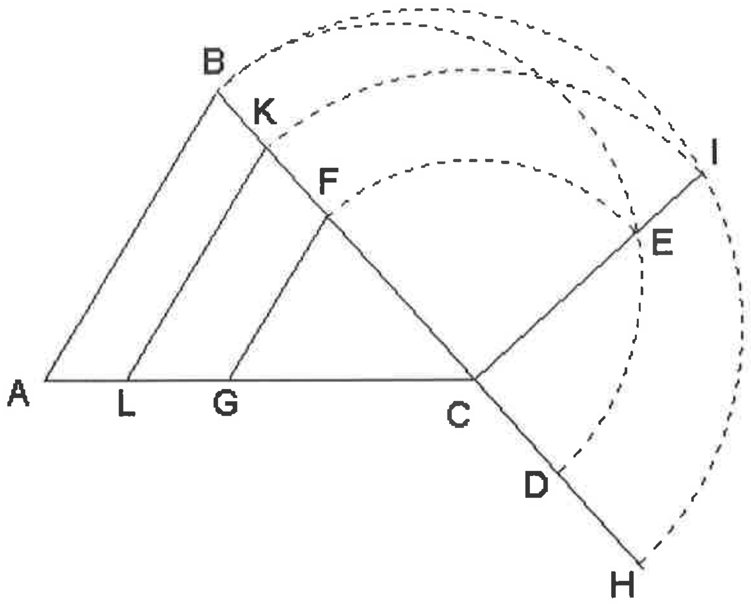




En déduire la construction de $1/\sqrt{a}$ $(a > 0)$.

III – Figure et construction de Marolois

Après une lecture collective de la construction (page 6 des annexes), s'est ensuivie une explication textuelle et mathématique.



Marolois divise le côté [BC] en trois segments de même longueur et reporte deux fois à partir de C cette longueur commune, que l'on prendra comme unité, pour obtenir les points D et H.

Que vaut alors CE ? En déduire le rapport $\frac{CB}{CE}$.

Montrer de la même façon que $\frac{CB}{CF} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Conclure.

Réaliser la même construction en n'utilisant que la règle et le compas.

CONCLUSION

Le travail ici présenté fut de deux natures : collectif dans le choix des textes puis dans les conclusions à tirer de leur exploitation en classe et des diverses expérimentations, mais individuel dans les choix pédagogiques, et ceci pour plusieurs raisons : l'éloignement géographique d'abord, puisque nous sommes de trois départements bourguignons et qu'il n'aurait pas été simple de mettre en place un vrai travail d'équipe en classe ; les différences de nos élèves et de nos classes (le lecteur l'aura constaté en ce qui concerne les classes) ; enfin les objectifs, car ceux-ci sont aussi dictés par l'expérience que chacun a de ses élèves et des classes dans lesquelles il enseigne.

Notre histoire autour du texte de Marolois n'est pas terminée car l'expérimentation en classe et la réflexion commune qui en a découlé nous amènent aujourd'hui à un retour au texte (dont le nombre impressionnant d'erreurs constitue une mine pour qui voudra l'approfondir) assorti d'un projet d'édition commentée, en partenariat avec l'*Académie François Bourdon* du Creusot qui nous l'avait fait découvrir. La relecture s'est faite à un autre niveau, car le premier abord du texte avait laissé de côté bon nombre de problèmes (comme celui de la preuve de certaines des affirmations de l'auteur qui n'aurait pu être abordée en classe.)

Une part importante de notre travail en classe fut en fait d'ordre linguistique, sur les mots, sur le sens. Le langage et la syntaxe sont en effet une barrière pour les élèves, ce qui n'est pas le cas du contenu mathématique ; il ne s'agit donc pas de l'introduction d'une nouvelle notion mathématique mais d'un exercice de compréhension et d'analyse, rendu possible par le fait que les notions en elles-mêmes sont familières. De plus, l'existence de solutions sans démonstration amène les élèves à se poser des questions sur la validité des constructions, d'autant que certaines, justement, sont fausses (voyez la construction 63), alors que les solutions avec démonstration autorisent les points de vue, voire l'analyse : c'est le *vrai* texte qui est fourni, sans coupure, sans réécriture, avec ses imperfections, son langage vieilli et ses préoccupations différentes des mobiles modernes. Quel enseignant actuel proposerait en effet de se compliquer la vie à rechercher des constructions imposant *a priori* une seule ouverture du compas ? Qui aurait l'idée de citer Euclide pour justifier certaines affirmations alors que ses *Éléments* ne font plus partie des capacités immédiatement mobilisables ?

L'activité en classe prend aussi un aspect critique : on peut enfin se poser la question de savoir si une construction est correcte, sans mettre en doute la capacité de l'enseignant ! D'ailleurs, ce dernier est plus proche de ses élèves puisqu'il n'est plus le producteur ou l'inventeur de la notion "découverte", qu'il ne met pas son style en question et que les jeunes ont la possibilité d'émettre un avis sur l'intérêt du texte. Les jeux changent : la notion mathématique (souvent simple) est rendue plus lointaine, elle peut être redécouverte ; le texte n'est pas anonyme, intemporel, car l'auteur est décrit (Marolois, Hollande, XVII$^{\text{ème}}$ siècle, fortification, persécution religieuse, etc.) Certains élèves d'ailleurs s'étonnent qu'un auteur reconnu (même s'il n'est plus connu) ait pu s'intéresser à ce genre de choses, et faire des erreurs, comme eux ; ça les rassure...

Il est d'ailleurs intéressant de noter qu'on perd beaucoup le questionnement (de plus en plus) ordinaire, "à quoi ça sert ?" Le fait de savoir que la notion n'est pas nouvelle et que le travail sera d'un autre ordre que les exercices habituels doit mettre les élèves en confiance. On constate (particulièrement chez les moins doués d'entre eux) une sorte de réconciliation avec l'objet de la géométrie, car ils n'ont pas à inventer de solution à partir de rien, en se demandant quel théorème mal assimilé est à utiliser dans ce cas ; ils doivent chercher la validité de solutions déjà proposées dont ils ne savent pas le degré de justesse, et seule une investigation parfois assez élaborée permettra de trancher. Ils découvrent donc qu'en mathématiques aussi, on peut être amené à *interpréter*.

Si le texte permet ce type de travail et ces réactions des élèves, c'est d'abord parce qu'il s'agit de géométrie pratique, qu'il y est donc aussi question de contingences matérielles (le fait de garder la même ouverture du compas, comme s'il s'agissait d'une corde de longueur fixe) et qu'il est écrit dans un style ancien qui permet une distanciation immédiate.

Finalement, on peut aussi remarquer que le texte en lui-même n'a pas besoin d'être parfait, au contraire : en tant que document, ses imperfections donneront lieu à des discussions d'une richesse introuvable dans les textes fermés que sont ordinairement nos énoncés de problèmes. En outre, cette expérience nous montre (en tant que groupe de travail) que

1°) On peut faire de bonnes choses avec n'importe quel texte.

2°) Chacun adapte toujours le travail au niveau de ses élèves.

Et bien sûr cette conclusion ne saurait être que provisoire !

ANNEXES

Annexe 1

Annexe 2

Annexe 3

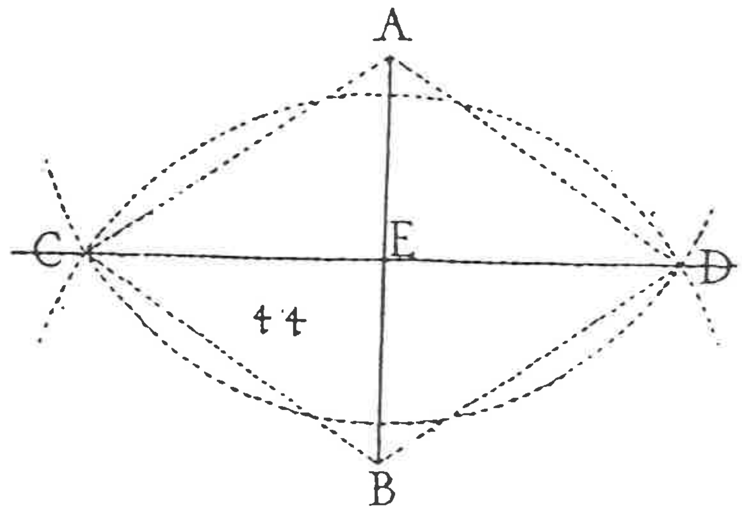
Annexe 4

Annexe 5

Annexe 6

Annexe 7

LA GEOMETRIE DE
SAMVEL MAROLOIS.



Propoſition. 2.

Diviſer une ligne droicte donnée en deux eſgalement.

Conſtruction.

44.

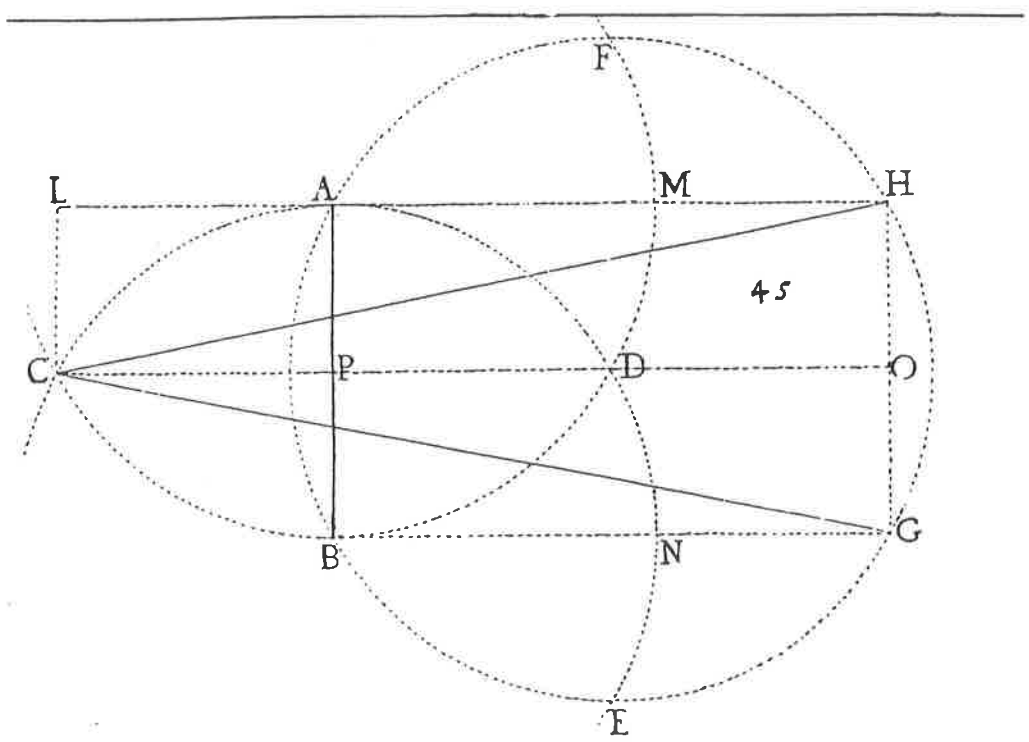
Soit la ligne droicte donnée A, B. laquelle on veut partir en deux eſgalement. Soit ouvert le compas à voſtre volonté toutes fois plus que la moitie de la ligne & mis le pied immobile au point A, & tire une portion de cercle comme C, D, puis de la meſme diſtance ſoit faict l'arcq C, A, D, & ou ces 2. lignes s'entrecouppent comme en C, & D, ſoit faicte la ligne droicte C, D, qui diverſera la ligne A, B, en 2, parties eſgales.

Prop. 3.

Eſtant donnée une ligne droicte le deverſer en 3. parties egales.

Conſt. 45.

Soit la ligne droicte donne A, B, laquelle on veut partir en 3. parties egales par une ouverture de compas. Soit premierement prius la diſtance A, B, & du centre B, deſcris une portion de cercle comme D, A, C, pareillement l'arcq D, B, C. & on que ces deux lignes s'entre coupent comme au point D. ſoit mis le point immobile en iceluy & faict le cercle A, F. H. G. E. puis du point E. ſoit mis la meſme diſtance en G. & pareillement de F. en H. apres du point H. ſoit tires la ligne H. C. pareillement G. C. & par ce moyen ſera la ligne A. B. diverſes ſelon le requis DEMONSTRATION. Soit tiree la ligne oculte L. H. paſſante par le point A. & C. L. paralelle a A, B. comme auſſi M. N. paſſante par le point D. Or d'autant que par la precedente la ligne L, M. eſt diviſee en deux eſgalement en A. & puis la ligne A H en deux eſgalement en A M. Il s'enſuit que la toute L, H. ſera diviſee en trois parties eſgales aux points A, & M, & que par la 4. du 6. d'Euclide L, H, C, eſt proportionel au triangle A, H, I, eſtant equiangle parquoy comme H, L, a H, A. ainſi H, C. a H. I. ou comme L. A. a A. H. ainſi C. I. a I. H. & comme C. O. a O. H. ainſi C. P. a P. I. mais C. O. eſt a C. P. triple doncques H. O. eſt auſſi triple a I. P. parquoy P. A. eſtant la moitie de la donne il s'enſuivra que le double de I. K. (a ſavoir 1..2.) eſt eſgal a I. A. ce qui failloit demonſtrer.



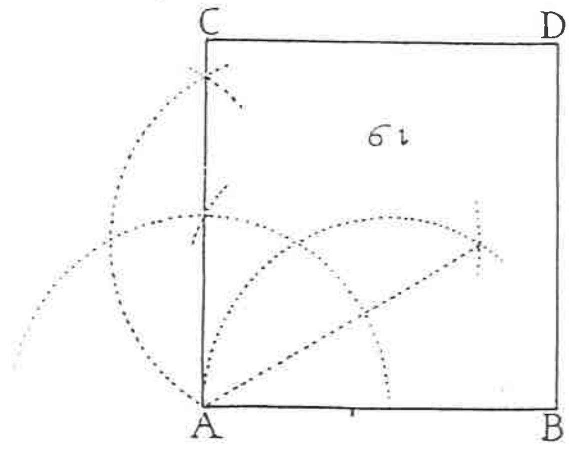
Proposition 13.

Estant donnée une ligne en former un quare.

Construction.

61.

Soit la ligne droite A.B.aux points A.& B. soyent esleveez 2.lignes droictes orthogonelles & esgales a A. B. puis soit tiree la ligne C.D.paralelle a A. B. & sera le quare forme selon le requis. C'est la 46.du premier.



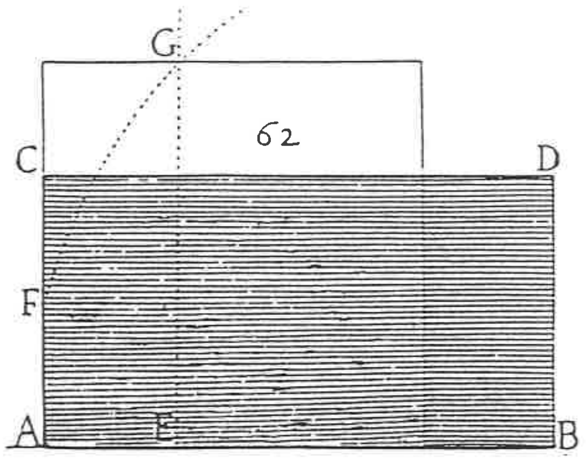
Prop. 14.

Estant donnée une paralellogramme rectangle le reduire en quare.

Construction.

62.

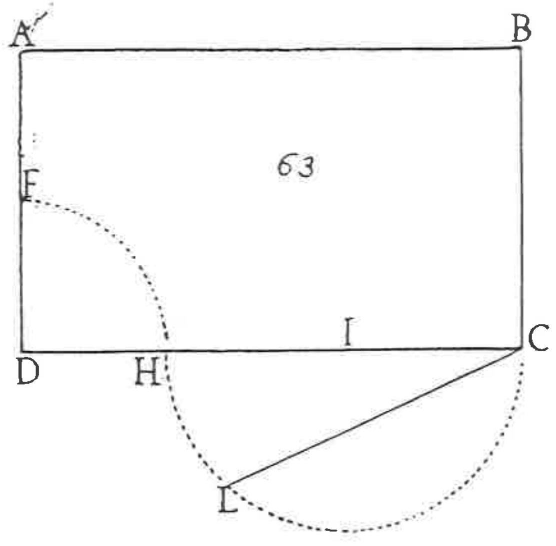
Soit le rectangle A. B. C. D. duquel le coste A. C. soit divisee en 2. esgalement au point F.puis soit mis le pied immobile du compas au point A. & l'autre pied soit etendu jusqu'au point F.& tournant le pied mobile du compas sur la ligne A. B.soit faict le point E.de pareille distance au point F. & sur le point E.soit tiree une ligne a angles droits puis soit mis le pied immobile du compas au point B.& l'autre sur le point F. en tournant le compas contrement & ou qu'iceluy coupera la dite ligne perpendiculaire sera faict le point G.dont la ligne de distance G.E.est le costé d'un quare esgal au rectangle donnee.



Autrement.

63.

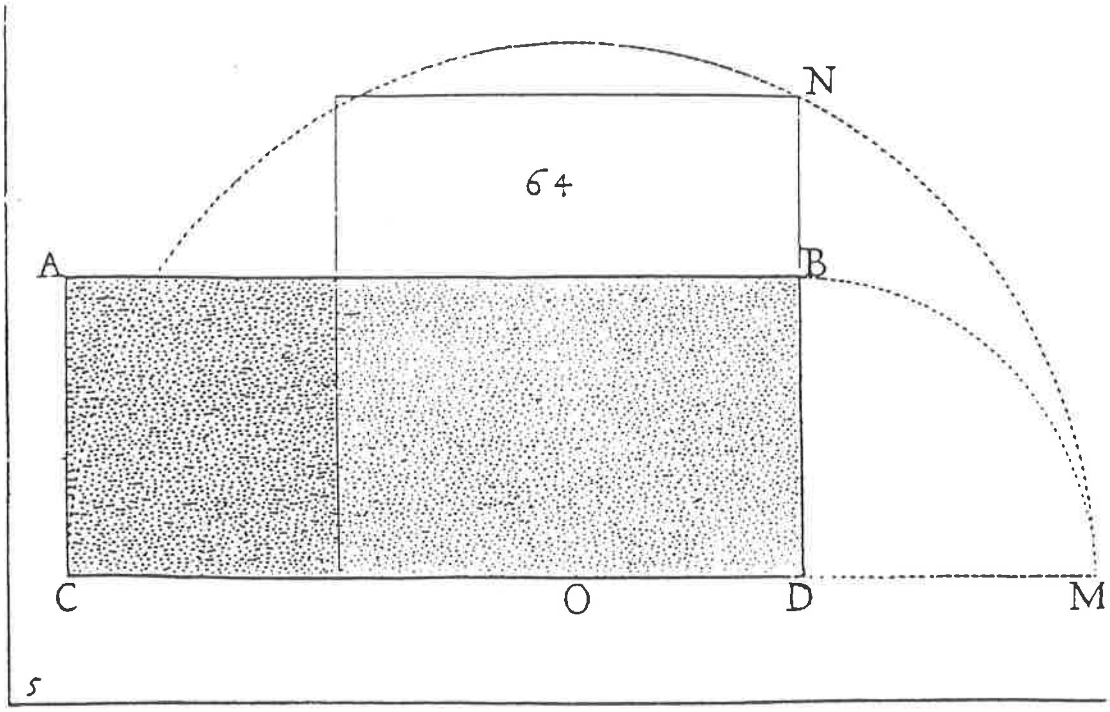
Soit la ligne C. D. divise en deux parties esgales en O. & soit du point O, vers D. mis la distance F.D.comme en H.soit sur C.H.descript un demi cercle du centre I.puis soit D.H.mis de H.en L.puis soit tiree la ligne C. L. qui est le coste du quare.



Autrement.

64.

Soit le paralellogramme A, B, C, D, lequel on veult reduire en quare soit le coste C, D, prolonge vers M, de sorte que D, M, soit esgal D, B, puis sur C, M, se descript un demi cercle & estant prolonge D, B, jusqu'a ce qu'elle attouche ladite circomference qui est en N. Je dis que N. D. est le coste du quare contenant autant que le paralellogramme. C'est la 14. du 2.

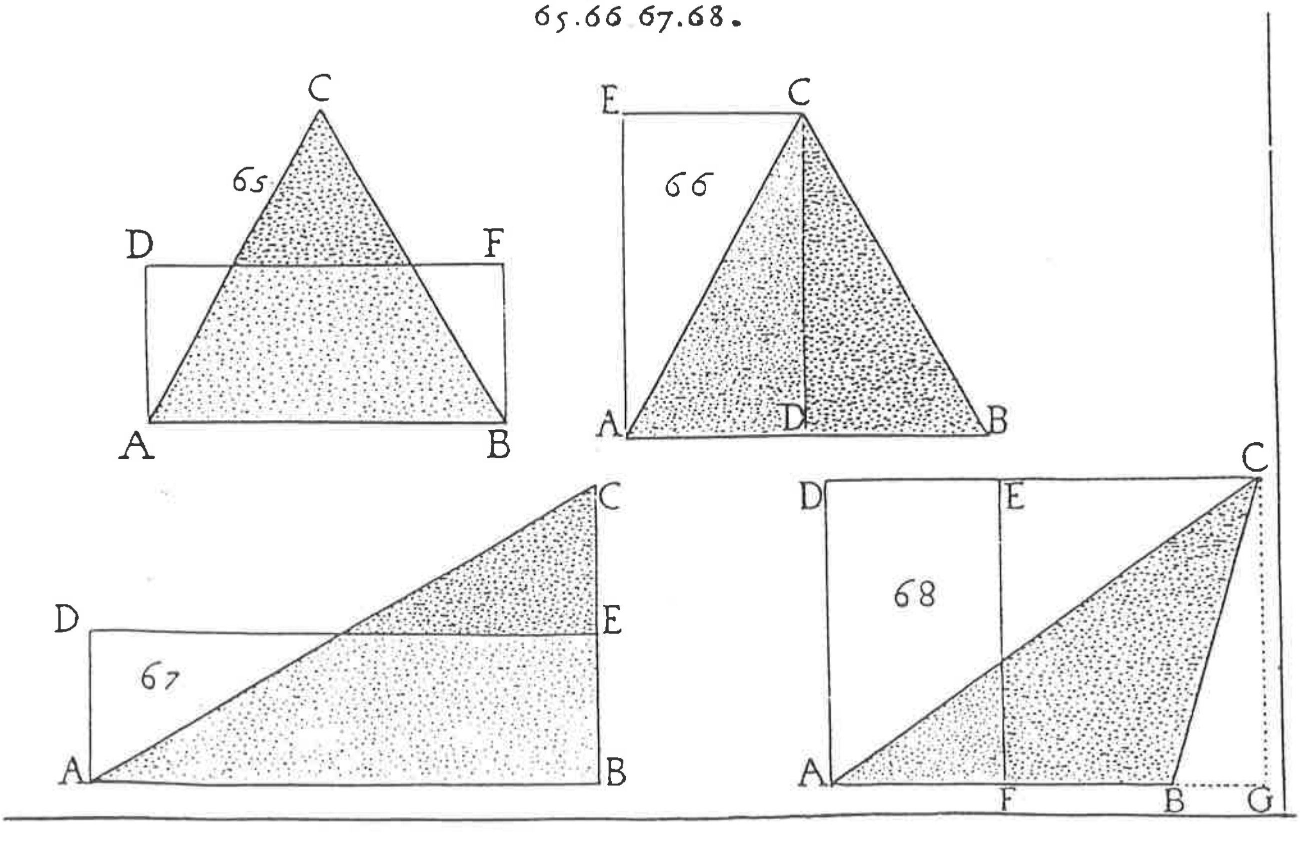


Prop. 15.

Estant donné un triangle, trouver un paralellogramme qui lui soit esgal.

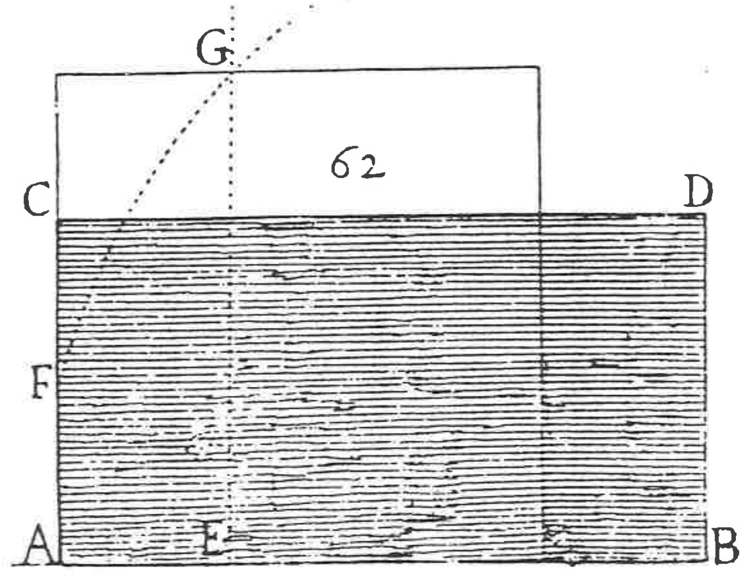
Construction.

65. 66 67. 68.



LA GEOMETRIE DE

SAMVEL MAROLOIS.



Prop. 14.

Estant donnée une paralellogramme rectangle le reduire en quare.

Construction.

62.

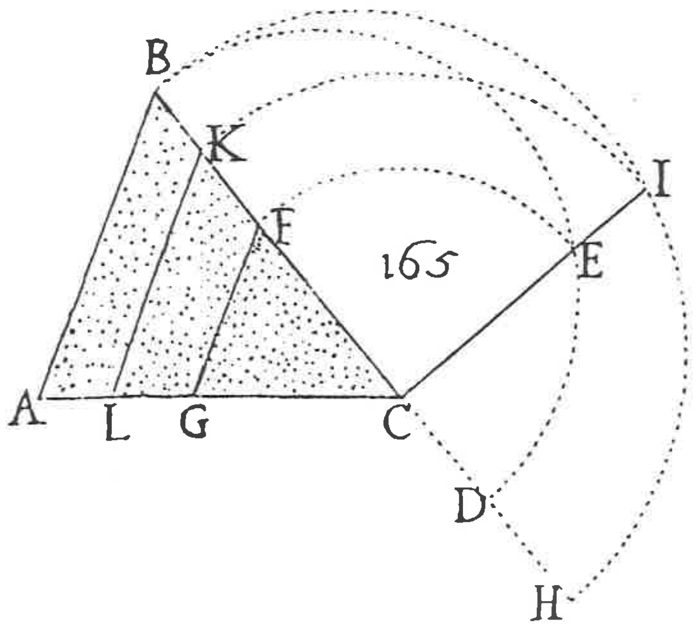
Soit le rectangle A. B. C. D. duquel le coste A. . C. soit divisee en 2. esgalement au point F. puis soit mis le pied immobile du compas au point A. & l'autre pied soit etendu jusqu'au point F. & tournant le pied mobile du compas sur la ligne A. B. soit faict le point E. de pareille distance au point F. & sur le point E. soit tiree une ligne a angles droirs puis soit mis le pied immobile du compas au point B. & l'autre sur le point F. en tournant le compas contrement & ou qu'iceluy coupera la dite ligne perpendiculaire sera faict le point G. dont la ligne de distance G. E. est le costé d'un quare esgal au rectangle donnee.

Prop. 59.

Eſtant donné un triangle le diviſer en trois parties eſgales avec lignes paralelles a l'un des coſtez.

Conſtr. 164. 165.

Soit le triangle A,B:C.lequel on veult diviſer par lignes paralles au coſte A, B.ſoit iceluy diviſe ſcavoir le coſte B,C.ou A, C. en trois (d'autant que nous le deſirons partir en trois) & en ſoit miſe une de C.en D.ſur le coſte prolongé B, C.entre le tout ſcavoir B, C. & ſa partie C, D. ſoit la moyenne proportionelle C,E. laquelle eſtant miſe de C.ſur la ligne C, B. en F. ſera le point pour tirer la ligne paralelle a A,B.ſelon le requis & ainſi de l'autre. La Demonſtration eſt manifeſte par la 15.propoſition du 6. Livre d'Eucl.



Prop. 60.

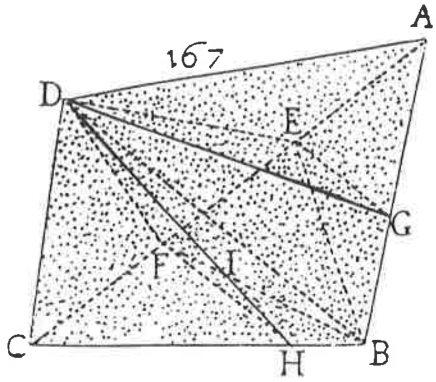
Diviſer un quadrilatere par lignes ſortantes d'un des angles.

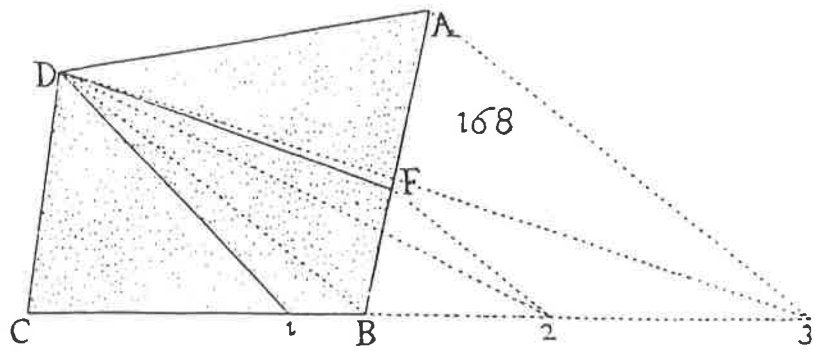
Conſtruct. 167.

Soit le quadrilatere a diviſer en trois parties eſgales A, B. C, D. ſoit tiree la diagonale A, C. laquelle ſoit diviſee en trois parties eſgales (en trois d'autant que la figure doit eſtre diviſee en trois) & ſoyent d'iceux points faicts les paralelles a la diagonale D, B. coupantes les coſtez A, B. & B, C. es points G. & H. deſquels eſtans menees lignes droictes au point D. aurons la diviſion requiſe.

Autrement. 168.

Soit le quadrilatere A, B. C, D. reduict en triangle C, D. 3. puis ſoit la baſe C. 3. diviſee en 3. parties eſgales comme 1. 2. 3. & ſoit tire D, 1. D, 2. leſquelles diviſeront le triangle en trois eſgalement puis ſoit faicte la ligne 2. F. paralelle a la ligne B, D. & ſoit menee la ligne F, D. le quadrilatere ſera diviſe en trois parties eſgales a ſcavoir D, C, I. D, I, F. & D, F, A. de l'angle D. ſelon le requis.





I. Auteur(s)

Pierre COLLAUDIN – Patrick GUYOT – Frédéric METIN – Philippe REGNARD

II. Titre(s)

La Géométrie de Samuel Marolois : Quadratures et trisections en classe

III. Caractéristiques de l'édition

Edité par l'IREM de DIJON en 1999
Format A4 – 28 pages

IV. Types de documents et supports

Ouvrage papier

V. Matériel utilisé dans l'ouvrage

–

VI. Public visé

Enseignants en mathématiques (1er et second cycle, lycée professionnel), étudiants IUFM, ...

VII. Contenu

Cette brochure présente des activités réalisées en classe par les membres du groupe d'Histoire des Mathématiques, autour de textes extraits de la *Géométrie pratique* de Samuel Marolois (1616). Les élèves, du BEP à la Terminale, sont invités à lire et expliquer les extraits proposés, et éventuellement à rectifier les erreurs.
Les textes sont donnés en annexes.

MCL :
Géométrie – Géométrie pratique – Usage du compas – Histoire des mathématiques – Sections de surfaces – Activités en classe.

Prix : 20 F plus frais de port

ISBN : 2-913135-02-1 **EAN : 9782913135024**