IREM DE DIJON

THALES, QUEL THEOREME ?

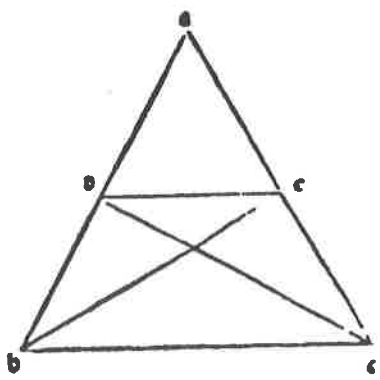
OU

UN CENTENAIRE BIEN FRANÇAIS

Propositio .2.

Si linea recta duo trianguli latera secans reliquo fuerit equidistans: eam duo illa latera proportionaliter secare. Si vero proportionaliter secet cum reliquo latere equidistare necesse est.

¶ Sit triangulus.a.b.c.cuius duo latera.a.b.et.a.c.secet linea.d.e. equidistanter tertio lateri.quod est.b.c. dico quod erit proportio .a.d.ad.d.b.sicut .a.e. ad.e.c.et econverso si fuerit proportio.a.d.ad.d.b.sicut.a.e.ad.e.c.linea.d.e.erit equidistans linee.b.c.protraham enim duas lineas.e.b.et.d.c.eritque per.37.primi triangulus.e.d.b.equalis triangulo.d.e.c.propter id quod ipsi sunt ambo super lineam. d.e. inter lineas equidistantes.itaque per secundam partem.7.quinti: proportio trianguli.a.d.e.ad utrumque illorum erit una:sed proportio eius proximi ad triangulum.e.d.b. est sicut linee.a.d.ad lineam.d.b.et ad triangulum.d.e.c.sicut linee.a.e.ad lineam.e.c.Nam ipse cum utroque illorum est eque altitudinis:quare erit proportio.a.d.ad.d.b.sicut.a.e ad.e.c.quod est primum.¶ Et si hoc fuerit erit per premissam ipsius .a.d.e.utrumque illorum proportio una:quare per secundam partem.9.quinti ipsi sunt adinvicem equales:et quia ipsi sunt super eandem basim.videlicet lineam.d.e.et ex eadem parte erit per 39.primi:linea.d.e.equidistans linee.b.c.quod est secundum.



Groupe Histoire des Mathématiques

Mai 1994

Henry PLANE

Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "Irem.Dijon@mail.u–bourgogne.fr"
http://www.*u*-bourgogne.fr/IREM/

IREM DE DIJON

THALES, QUEL THEOREME ?

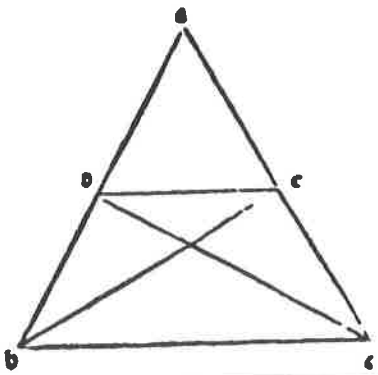
OU

UN CENTENAIRE BIEN FRANÇAIS

Propositio .2.

Si linea recta duo trianguli latera secans reliquo fuerit equidistans: eam duo illa latera proportionaliter secare. Si vero proportionaliter secet eã reliquo latere equidistare necesse est.

¶ Sit triangulus.a.b.c.cuius duo latera.a.b.⁊.a.c.secet linea.d.e. equidistanter tertio lateri.quod est.b.c. dico quod erit proportio .a.d.ad.d.b.sicut .a.e. ad.e.c.⁊ econverso si fuerit proportio.a.d.ad.d.b.sicut.a.e.ad.e.c.linea.d.e.erit equidistans linee.b.c.protraham enim duas lineas.e.b.⁊.d.c.eritque per.37.primi triangulus.e.d.b.equalis triangulo.d.e.c.propter id quod ipsi sunt ambo sup lineã. d.e. inter lineas equidistantes.itaque per secundam partẽ.7.quinti: proportio trianguli.a.d.e.ad utrumque illorum erit una: sed proportio ei⁹ per premissã ad triangulũ.e.d.b. ẽ sicut linee.a.d.ad lineã.d.b.⁊ ad triangulũ.d.e.c.sicut linee.a.e.ad lineã.e.c.Nam ipe cum utroque illorum est equalis altitudinis: quare erit proportio.a.d.ad.d.b.sicut.a.e ad.e.c.quod est primum.¶ Et si hoc fuerit erit per premissam ipsius .a.d.e.utriusque illorum proportio una: quare per secundam partem.9.quinti ipsi sunt adinvicẽ equales: ⁊ quia ipsi sunt super eandẽ basim.videlicet lineam.d.e.⁊ ex eadem parte erit per 39.primi: linea.d.e.equidistans linee.b.c.quod est secundum.



Groupe Histoire des Mathématiques

Mai 1994

Henry PLANE

Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "Irem.Dijon@mail.u–bourgogne.fr"
http://www.*u*-bourgogne.fr/IREM/

Ayant essuyé le reproche d'avoir associé le nom de THALES au théorème relatif aux parallèles coupées par deux sécantes, un jeune professeur demandait l'historique du théorème qui, en France, porte le nom de l'homme de Milet.

C'est une curieuse affaire.

Et d'abord que savons-nous, à ce sujet, de l'oeuvre de THALES ?

Nous ne disposons que de témoignages tant sur le personnage que sur ses travaux. PLUTARQUE dans « le banquet des sept sages » rapporte l'exploit de la mesure d'une pyramide à l'aide d'un bâton et d'ombres. Pyramide ou obélisque ? car, comment aller à la verticale du sommet ? Exploit de qui ? De Thalès ou des Egyptiens chez qui il avait été étudier ? Ce témoignage d'autre part est du 2ème siècle de notre ère et la gloire de Milet est du 6ème siècle avant Jésus-Christ... Si on le trouve également chez PLINE, à la même époque, il est incomplet. HIERONYME de RHODES (-4ème siècle) contemporain de PLATON, précise, lui, que l'opération eut lieu lorsque « notre ombre nous est égale ». Détail non négligeable et qui ajoute au voile d'incertitude sur le rôle joué par l'Ecole de Milet dans le chapitre des proportions et parallèles et qui conduirait à s'en tenir à EUDOXE de CNIDE
(- 4ème siècle) comme initiateur de ce chapitre.

Quant aux résultats attribués à THALES, PAPPUS (4ème siècle) et PROCLUS (5ème siècle) énoncent :

- Le diamètre partage le cercle en deux parties égales ;
- Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux ;
- Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Certains commentateurs, tels DIOGENE LAERCE (2ème siècle) ajoutent :

- Un triangle inscrit dans un demi cercle est rectangle.

Rien sur les parallèles ; alors pour notre recherche de paternité fouillons un peu le passé, nous y ferons diverses rencontres, charme de l'histoire des mathématiques.

Comment EUCLIDE (fin du -4ème siècle) aborde-t-il le sujet ? C'est au livre VI, après l'étude des rapports de grandeurs que se trouvent les définitions et propositions qui nous intéressent (Documents 1 et 2). On notera :

- Dans la définition des triangles semblables, le « et dont les côtés... »,
- Que la proposition 2 comporte la réciproque,

- Que la démonstration utilise, pour employer notre terminologie, un rapport d'aires égal à un rapport de longueurs,
- Enfin que cette propriété n'est pas mise à part dans ce livre VI, suivie qu'elle est par la propriété du pied de la bissectrice puis par celle de la hauteur du triangle rectangle...

En ce qui concerne l'espace, la question est abordée au livre XI, propriété 17, mais sous un autre aspect : « Si deux droites sont coupées par des plans parallèles elles seront coupées proportionnellement ». Est-ce un signe de rupture dans le temps entre les livres VI et XI ? (Document 3).

Poursuivons notre quête dans la suite des âges. MARCUS JONIUS NIPSIUS, arpenteur romain du 1er siècle, donne le procédé suivant pour mesurer une distance horizontale AB lorsque seul A peut être atteint (Document 4). Dans notre style nous dirions : sur la perpendiculaire en A à AB prendre C puis D tel que C soit le milieu de [AD] puis, sur la perpendiculaire en D à AD, déterminer E tel que B, C et E soient alignés (visée optique). Alors, dit-il, DE = AB car les angles en C sont égaux. (Ce procédé parait avoir été connu à Babylone). Pourquoi deux perpendiculaires ? En ces temps, pour nombre de géomètres, deux droites sont dites parallèles si elles sont perpendiculaires à une même droite.

Au 5ème siècle on trouve FLAVIUS VEGETIUS FENATUS qui, dans son « Epitome rei militaris » donne comment mesurer la hauteur d'une muraille dont seule le pied peut être atteint. Il prescrit : (document 5) « Lorsque le soleil oblique projette l'ombre des murailles sur la Terre on en mesure la longueur. Simultanément on ne plante la perche de dix pieds et on mesure son ombre. Ce dernier nombre noté, nul ne doute de trouver, à partir de l'ombre de la perche, la hauteur des murailles lorsqu'on sait qu'il en est autant de cette hauteur que de l'ombre ». Il est bien question ici de similitude évidente : nul ne doute (nemo dubitat). La perche de dix pieds, decempeda, est l'instrument de base des arpenteurs, decempedateurs.

La géométrie dite « faux BOECE » du Xème siècle n'aborde pas ce sujet, non plus que GERBERT -le pape de l'an mil- dans la correspondance de celui-ci dont nous disposons. Il lui est toutefois attribué des procédés de mesure à distance comme il en est pour HERON d'Alexandrie (2ème siècle) (cf. Annexe : Variæ. Dans tout cela on peut voir une séparation entre « Géométrie intéressée » dans un technique, une pratique, et « géométrie à philosopher ».

Si BOUELLE (CAROLUS BOVILLUS) dans son « Art et pratique de géométrie » (1509) donne un moyen de partager en n parties égales un segment de droites, il ne cite aucun autre nom qu'EUCLIDE et n'évoque pas de parallèles (Document 6). Peut être y a-t-il dans ce texte une autre idée et le « ita deinceps » amorce-t-il une récurrence ?

CLAVIUS, dans ses célèbres commentaires d'Euclide (1574) (Document 3) garde l'ordre du maître du Musée dans le plan et dans l'espace. En France, LE MARDELE fait de même (1622). Ni l'un ni l'autre ne font jouer un rôle particulier à la propriété (Document 7).

Pour rester dans le domaine des constructions (les « problèmes » des Anciens) l'ouvrage d'HENRION « la géométrie pratique » (1623) montre -problème XLVI (Document 8)- comment « couper une ligne droite en parties qui soient entre elles selon une raison donnée » et comme justification écrit : « comme il est manifeste ». Toujours sur le plan pratique de la géométrie intéressée », le compas de proportion -outil de base, connu de GALILEE et utilisé jusqu'au 19ème siècle- repose sur les figures semblables mais lie les segments sur les parallèles aux segments sur les sécantes (Document 9).

Et DESCARTES ? A la première page de sa « Géométrie » (1637) : « Comment se font géométriquement la multiplication et la division, ... Je n'ai qu'à tirer la parallèle » (Document 10). Pas de démonstration... Elémentaire, mon cher Schooten ! ...

17ème, 18ème siècles ; multiplication des ouvrages.

Il y a les fidèles d'EUCLIDE qui respectent son ordre : rapport d'aires, figures semblables avec le cas du triangle coupé par une parallèle à un des côtés. On y trouve, sans doute sur instruction du Collège Romain, les auteurs de la Compagne : DESCHALLES dont les « Eléments d'Euclide » (1660) après révision par OZANAM seront réédités jusqu'en 1740, PARDIES (1671 -réédité jusqu'en 1749). Curieusement DESCHALLES parle de la méthode de NIPSIUS et de mesurer « en rapportant un triangle sur papier... avec une échelle proportionnée ». On retrouve donc le balancement entre géométrie intéressée et géométrie à philosopher.

Mais, et les autres ?

Ces « Messieurs de Port-Royal » avaient besoin, après leur « Logique » et leur « Grammaire » d'une « Géométrie ». PASCAL en avait discuté, un soir, avec eux, lui qui maintenant avait des regards d'un autre ordre. C'est donc Antoine ARNAULD qui va rédiger les « Nouveaux élémens de géométrie » (publiés anonymement en 1667). Dans la préface l'auteur écrit qu'il ne « considère pas tant la géométrie que l'usage qu'on en peut faire ». Il veut « réduire les pensées à un ordre naturel ». Par suite, au livre X, une nouvelle proposition fondamentale concerne les lignes proportionnelles. L'ordre naturel fait traiter les lignes avant les surfaces ; on ne peut s'appuyer sur un rapport des secondes pour établir celui des premières, comme on le trouve chez EUCLIDE. Il faut donc d'abord traiter de la raison (rapport) de deux droites (segments de droites) lorsqu'elle est ni entière ni quotient d'entiers. (Nombre de successeurs escamoteront ce point). L'outil, ce sont les « espaces parallèles » (nos bandes) qui se prêtent à une résolution en parties alignotes communes assez fines (Document 11) ; l'ombre de CAVALIERI et des indivisibles n'étant peut être pas étrangère... (document 12).

Dans les collèges, tenus par les Oratoriens et les Bénédictins, on trouve des ouvrages rédigés dans le même esprit qui séparent les rapports définis par les bandes parallèles et les triangles semblables définis par le seul fait d'avoir des angles égaux. Les liens entre les deux étant divers.

Les auteurs qui oeuvrent dans ce sens sont LAMY (1685 avec rééditions jusqu'en 1731) où EUCLIDE n'est plus qu'en référence, LA CAILLE (1744) où apparaît une figure maintes fois reprise depuis lors (Documents 14 et 15), RIVARD (1732), MAZEAS (1770).

Il semble aussi qu'un nouveau point de vue prennent place. CLAIRAUT dans la préface de sa « Géométrie » (1743) explicite le problème, qui écrit : « EUCLIDE avait à convaincre des sophistes obstinés qui faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes... Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance est aujourd'hui en pure perte ». C'est pourquoi cet auteur « afin de suivre une route semblable à celle des inventeurs, s'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains ». Alors, pour suppléer à la construction des figures en vraie grandeur, « un moyen s'offre comme de lui-même. Il vient à l'esprit de faire une figure semblable dans laquelle les pouces remplacent les toises » (proposition 33) et encore « Les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites » (proposition 48).

Ce point de vue sera couronné par LAPLACE qui, dans son « Exposition du système du monde » (Paris, An IV) écrit « la proportionnalité est un postulat bien plus naturel que celui d'Euclide ».

Autre chose encore apportant plus d'autonomie aux triangles semblables, BEZOUT dans ses « cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine » (1765) écrit : « transportons aux lignes les connaissances que nous avons tirées des nombres sur les proportions ». L'idée de rapport de mesures, donc de nombres, est un éclairage nouveau même si certains le voient en germe au XIIème siècle chez des auteurs arabes ou hébraïques, et aussi chez ARNAULD. L'évolution se poursuit, clairement résumée dans une réédition de BEZOUT par REYNAUD en 1836 ! Au chapitre des triangles semblables on lit : « Ces principes sont la base de toutes les parties des mathématiques. Nous insisterons sur leurs usages... » or, après quelques exemples, REYNAUD écrit : « nous ne nous arrêterons pas plus longtemps parce que la trigonométrie nous fournira des moyens plus expéditifs ». En effet la trigonométrie fait maintenant partie du cours de géométrie alors que les ouvrages en étaient jadis distincts. Il y a rapprochement des géométries « intéressée » et « à philosopher »...

Enfin apparaît dans des ouvrages, un autre procédé de partage d'un segment, cette fois sur des parallèles, par des sécantes (Document 16).

On voit la variété, les bouleversements.

Et nous abordons le 19ème siècle.

Mais, et LEGENDRE ?

C'est le retour à EUCLIDE. Les Eléments de géométrie de LEGENDRE (douze éditions de 1794 à 1823) reprennent l'ordre du Grec dont ne vont guère s'écarter ceux qui exploitent les Eléments de Legendre ; REYNAUD, AMIOT, BLANCHET, etc..; C'est également l'heure où PEYRARD publie en 1804 puis en 1819 de nouvelles traductions d'EUCLIDE. On ne regardera que de ce côté, pendant des décennies, à quelques exceptions près :

- LACROIX dans sa géométrie (1804) traite du cas incommensurable. On trouvera en annexe 2 quelques lignes où celui-ci cite ses sources, PASCAL, PORT ROYAL. Personnage officiel sous l'Empire il fut sans doute écarté à la Restauration.

* DUPIN dans son "cours au conservatoire des Arts et Métiers (1826-1828) qui garde l'esprit de CLAIRAUT et les bandes parallèles.
* CATALAN (1843 puis réimprimé en Belgique) qui étudie, avant les triangles semblables : "les segments de deux droites quelconques déterminés par trois parallèles sont proportionnels".
* MERAY, professeur à Dijon, (1874) étudie à la fois plan et espace et parle de "bandes" et de "murs parallèles" et même de rapports algébriques.

(Voir également Annexe 3).

Ces auteurs furent très controversés dans les sphères officielles française.

Notons enfin que ni CHASLES (en 1837) ni HOUEL (en 1867) dans leurs "essais sur la géométrie" ne s'attardent sur le sujet ni ne citent THALES à cette occasion. Ils n'ont pas dû le rencontrer plus que nous.

Viennent alors manuels scolaires et programmes. Ces nouvelles entités du 19ème siècle agissent plus ou moins les unes sur les autres. Dans les multiples "Géométrie d'après Legendre" de CIRRODE (1844) à GIROD (1897) en passant MACE de LESPINAY, VACQUANT, ANDRE, et autres, le nom de THALES n'apparaît pas. Silence également après la réforme des programmes français de 1905. Rien chez BOREL (1905) et pourtant SAINTE LAGUE (1913) use de lignes proportionnelles orientées, NIEWENGLOSKY et GERARD (1918) ont des théorèmes de MENELAUS et de CEVA. HADAMARD (1922) à côté de la figure issue de LA CAILLE écrit "Théorème fondamental", ILLOVICI et ROBERT (1939) usent de vecteurs et d'homothétie, et toujours rien chez LECONTE en 1942.

Mais quand donc apparaît THALES ?

La première édition (1866) de "Eléments de géométrie" de ROUCHE et COMBEROUSSE ne dit rien ; mais dans l'édition de 1883, au livre III, figures semblables, cette scolie (Document 17) : "Dans les triangles l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés, cette propriété fondamentale, dont la découverte est due à THALES (639-548), ne subsiste pas pour les polygones quelconques" (Découverte et dates restant à vérifier...).

Curieuse entrée en scène !

Mais, le "Théorème" ?

En 1882 le cours de COMBETTE comporte -entre parenthèses- un théorème de Thalès (Document 18) : "Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle partage les deux autres côtés en parties proportionnelles". Puis dans un ouvrage édité chez Mame à Tours avec pour nom d'auteur F.J. et sans date de parution (cela est fréquent à la toute fin du 19ème siècle pour, semble-t-il des motifs fiscaux...) figure -sans parenthèses- le même théorème de Thalès (Document 19) et, dans les "Exercices de géométrie" associés se trouvent des compléments historiques (même document).

Par contre BARBARIN dans sa « Géométrie rationnelle » (ouvrage, dit-il, inspiré d'HILBERT, en 1911) on trouve : « Théorème fondamental (Thalès) : Si deux sécantes coupent des parallèles, ... »

Ainsi, dès l'apparition, deux pistes ! Un théorème différent et dans des chapitres différents.

- Triangle coupé dans le cadre des triangles semblables (famille d'EUCLIDE ?) chez COMBETTE, F.J., dans de nouvelles éditions VACQUANT (1908) et MACE de LESPINAY (1917), BOUCHERY et GARDINET (1920), BECHE (1920) et plus tard CHENEVIER, etc...
- Bandes parallèles et sécantes dans le cadre des lignes proportionnelles (famille d'ARNAULD ?) on y trouve, avec BARBARIN, BRACHET et DOMARQUET, MAILLARD, LEBOSSE et HEMRY, LESPINARD et PERNET. On y évoque parfois la notion de projection. En 1937, FOULON dans son « Théorème fondamental de Thalès » introduit les rapports algébriques pour l'unicité et la réciproque.

Relevons quelques curiosités d'éditions. CAMMAN et REBOUIS pour les classes de 2ème et 1ère (1927) ont un théorème fondamental -sans nom- suivi d'un simple théorème, (Document 20) mais, des mêmes auteurs, dans une « Géométrie dans l'espace » (1912) figure un théorème de Thalès. Même aventure chez CHENEVIER : Classe de 2ème (1931) il y est question de bandes parallèles avec réciproque et sans nom, alors que classe de 4ème et 3ème (1925) y figure un théorème de Thalès -triangle coupé. En 1937, dans le « Mémento encyclopédique Larousse » R. DONTOT écrit que « THALES introduit la géométrie en Grèce avec la théorie des triangles semblables » et énonce plus loin : « Théorème de Thalès : les vecteurs homologues déterminés sur deux droites par des parallèles sont proportionnels ».

Cette variété d'énoncés, et de place du théorème demeure dans la seconde moitié du XXème siècle où THALES est maintenant cité dans les programmes officiels français. Vers 1990, semble dominer la famille Euclide mais apparaissent des « figures de Thalès », des « configurations de Thalès » et le nom de l'homme de Milet est associé à des formules telles que : $k\vec{V}_1 + k\vec{V}_2 = k(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$ ou celle relevée dans un ouvrage roumain (Document 21), mais ceci est une autre histoire...

Mais, au fait, qu'en est-il au delà de l'« Hexagone ».

Sur le sujet qui nous occupe des ouvrages en anglais ou en allemand n'offrent pas de trace de THALES (Documents 22). Y-a-t-il une raison ? Dans « A history of Mathematics », C. BOYER écrit (1968) « Au contraire des Egyptiens, les anciens Babyloniens étaient familiers avec le fait qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit, proposition généralement connue comme étant le théorème de Thalès ».

Et voilà ! Dans les ouvrages d'outre-Manche ou d'outre-Rhin, THALES figure bien mais à une autre place (Documents 23). Un collègue d'Helvétie, questionné sur cette affaire, associait, quant à lui, le nom de notre héros à la propriété de la hauteur du triangle rectangle... etc... (Documents 22).

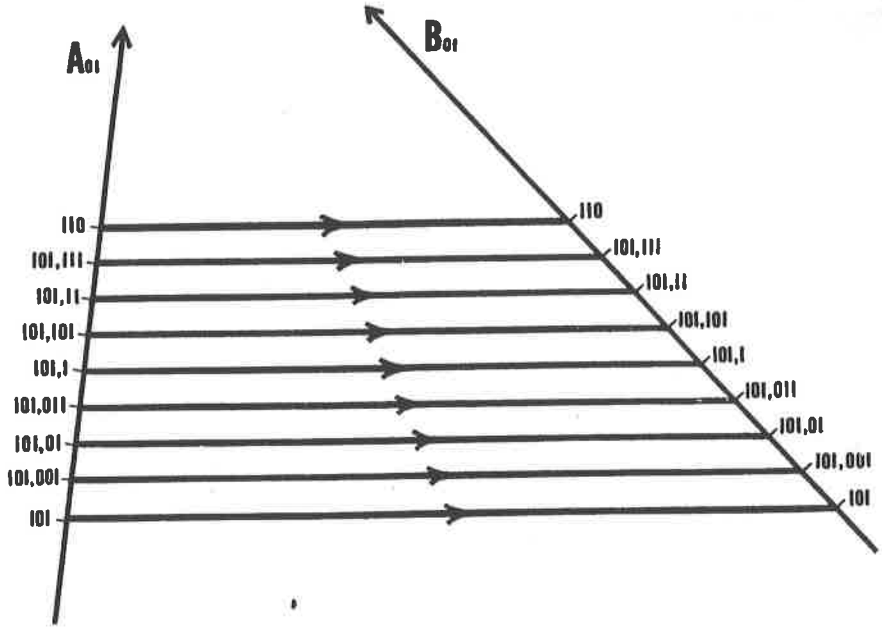
L'Europe de l'Enseignement aura à se pencher sur cette dénomination sinon, comme l'écrivait PASCAL : « Vérité au deçà des Pyrénées, erreur au delà ».

Il reste encore à tenter d'expliquer pourquoi cette dénomination française, cette invention, au sens juridique du terme -est inventeur celui qui trouve un objet dont le propriétaire est inconnu.

Une hypothèse peut être avancée. Aux débuts de la Troisième République (1870-1880)) le programme de l'agrégation de Mathématiques stipulait que les candidats auraient à faire montre de connaissances en histoire de la discipline. Est-il interdit de penser que les candidats d'alors, devenus maîtres, eurent envie d'utiliser leurs acquis en la matière, en introduisant des noms propres dans leurs cours. Il apparaît en effet que des propriétés citées dans les ouvrages reçurent à cette époque le parrainage inégalement justifié d'EULER, PTOLEMEE, SIMSON, GAUSS ou PASCAL.

Des programmes français de la fin du XXème siècle ont évoqué la dimension historique en mathématiques. Ce petit travail a voulu y contribuer. Il a surtout voulu montrer, ce qui est essentiel à son sens, que derrière les mathématiques il y a des hommes.

La « Mathématique moderne » n'oublia pas notre théorème...



LA PROJECTION PARALLÈLE

$p : A_{01} \rightarrow B_{01}$

CONSERVE LES ABSCISSES BINAIRES LIMITÉES

FIG. 140

Plus généralement, nous allons prouver le

THÉORÈME DE THALÈS

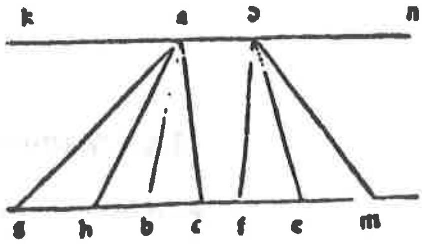
Toute projection parallèle $p : A_{01} \rightarrow B_{01}$
CONSERVE LES ABSCISSES

(Papy - 1965)

Suivent documents et annexes.

VI

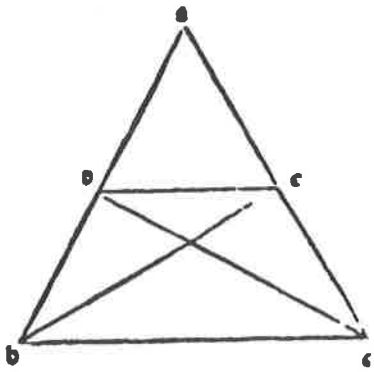
proportionalitatis cadem ꝓportio basis.b.c.ad basim.e.f.que est superficiei.a.c. ad superficiē.d.f.quod est propositum.❡De triangulis equalis altitudinis idem probabitur ⁊ eodem modo per.38.primi ductis lineis ab extremitatibus earum quas ad bases sumes multiplices ad vertices triangulorum.



Propositio .2.

Si linea recta duo trianguli latera secans reliquo fuerit equidistans: eam duo illa latera proportionaliter secare. Si vero ꝓportionaliter secet eā reliquo latere equidistare necesse est.

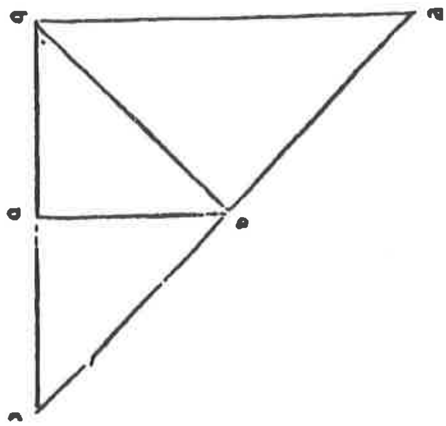
❡Sit triangulus.a.b.c.cuius duo latera.a.b.⁊.a.c.secet linea.d.e. equidistanter tertio lateri.quod est.b.c. dico q erit ꝓportio .a.d.ad.d.b.sicut .a.e. ad.e.c.⁊ econverso si fuerit ꝓportio.a.d.ad.d.b.sicut.a.e.ad.e.c.linea.d.e.erit equidistans linee.b.c.protraham enim duas lineas.e.b.⁊.d.c.eritque per.37.primi triangulus.e.d.b.equalis triangulo.d.e.c.propter id quod ipsi sunt ambo sup lineā.d.e. inter lineas equidistantes.itaque per secundam partē.7.quinti: ꝓportio trianguli.a.d.e.ad utrūque illorum erit una: sed ꝓportio ei⁹ ꝑ premissā ad triangulū.e.d.b. ē sicut linee.a.d.ad lineā.d.b.⁊ ad triangulū.d.e.c.sicut linee.a.e.ad lineā.e.c.Nam ipe cum utroque illoꝝ est equalis altitudinis: quare erit ꝓportio.a.d.ad.d.b.sicut.a.e ad.e.c.quod est primum.❡Et si hoc fuerit erit per premissam ipsius.a.d.e.utrūque illoꝝ proportio una: quare per secundam partem.9.quinti ipsi sunt adinvicē equales: ⁊ quia ipsi sunt super eandē basim.videlicet lineam.d.e.⁊ ex eadem parte erunt per 39.primi: linea.d.e.equidistans linee.b.c.quod est secundum.



Propositio .3.

Si ab aliquo angulorum trianguli linea recta ad basim ducta angulum illum per equalia secet: duas partes ipsi⁹ basis reliquis eiusdem trianguli lateribus proportionales esse. Si vero due partes basis quas linea ab angulo ducta distinguit reliquis trianguli lateribus ꝓportionales fuerint lineam illam angulū ꝑ equalia dividere necessario cōprobatur.

❡Sit trigonus.a.b.c.cuius angulum.a.dividat linea.a.d.ꝑ equalia: dico q proportio.b.d.ad.d.c.est sicut.b.a.ad.a.c.⁊ econverso: protraham enim.b.e. equidistantem.a.d.⁊ producā.c.a.quousque concurrat cū.b.e.in puncto.e.eritque per primam partē.29.primi angulus.e.b.a.equalis angulo.b.a.d.⁊ per secūdam partem eiusdem angulus.e.angulo.d.a.c.quare angulus.e.est equalis angulo.e.b.a.ergo per.6.primi.e.a.est equalis.a.b.⁊ ideo ꝑ primā partem.7.quinti proportio.c.a.ad.a.c.ē sicut.b.a.ad.a.c.sed per premissam.c.a.ad.a.e. ē sicut.b.d.ad.d.c.ergo b.a.ad.a.c.sicut.b.d.ad.d.c.quod est primum.❡Secunda pars que est conversa prime ptis probabitur converso modo.Manente enim eadem dispositione si fuerit proportio.b.a.ad.a.c.sicut.b.d.ad.d.c.quare per premissā.c.a.ad.a.e.ē sicut b.d.ad.d.c.erit eadem proportio.c.a.ad.a.e.que est.b.a.ad.a.c. ergo per primā partem.9.quinti.e.a.⁊.a.b.sunt equales. quare per.5.primi duo anguli.e.⁊.e.b.a sunt equales.igitur per primā ⁊ secundā partem.29.primi angulus.b.a.d.ē equalis angulo.d.a.c.quod est secundum.



f

LE SIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

PROPOSITION II.

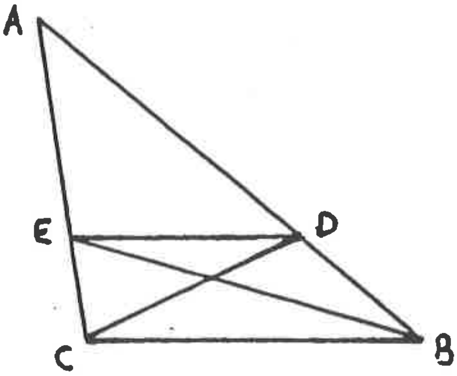
THÉORÈME.

Si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallele au côté restant du triangle.

Que l'on mène la droite DE (fig. 122) de manière qu'elle soit parallèle à un des côtés du triangle ABC : je dis que CE est à EA comme BD est à DA.

Menez les droites BE, CD.

Le triangle BDE est égal au triangle CDE (prop. 37. 1), parce qu'ils ont la même base et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles. Mais deux quantités égales ont la même raison avec une même quantité (prop. 7. 5) : donc le triangle CDE est au triangle ADE comme le triangle BDE est au triangle ADE. Mais le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA : car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la base AB, sont entr'eux comme leurs bases (prop. 1. 6). Par la même raison le triangle CDE est au triangle ADE comme CE est à EA : donc BD est à DA comme CE est à EA (prop. 11. 5).



PROPOSITION III.

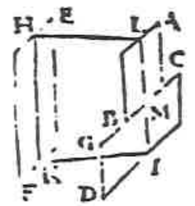
THÉORÈME.

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segmens de la base auront la même raison que les autres côtés de ce triangle; et si les segmens de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite qui est menée du sommet à la section partagera l'angle de ce triangle en deux parties egales.

Soit le triangle ABC (fig. 123), que l'angle BAC soit partagé en deux parties égales par la droite AD : je dis que BD est à DC comme BA est à AC.

③ CLAVIUS (in 8° - 1589)

tria plana per lineas rectas H K, L M, M I. Quoniam igitur parallela sunt plana A B, E F; erunt & communes sectiones L M, H K, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I M, H K. Quam ob rem cum rectæ L M, I M, parallelæ sint ipsi H K, existantque in eodem plano secante H I, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 3a. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana A B, C D, vnum planum efficient: Ideo propterea quod recta L I, in vno iaceat plano. Quod est propositum.

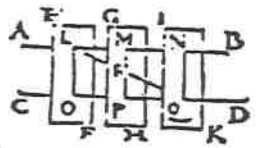


ITAQUE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

17\. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue ex parallelæ sint, vt in figura, siue nõ, existẽtes tñ in eodẽ plano; siue in trãsuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis E F, G H, I K, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earũ inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, N Q, in planis E F, I K, & coniungatur recta L Q, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH. Eritque triangulum L N Q, in vno plano: similiter triangulum L O Q, in vno plano. Quoniam vero pla-



* 16. vnde. * 1. vndec. * 2. vndec.

na parallela GH, IK, secantur plano triangu. L N Q, erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt R P, L O. Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN: item vt L R, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

QVOD si datæ duæ rectæ AB, CD, sint in vno eodẽque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planũ per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, quæ inter se parallelæ erunt, eruntque; Recta MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto præter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus, & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionẽ planorum LOQN, GH.

SI vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia cum triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodẽ illo plano, quod ex ipsis conficiuntur, quod est cõtra hypothesim,) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorũ; ac proinde vnam rectam non constituent: alias in vno essent plano, quod est absurdum.

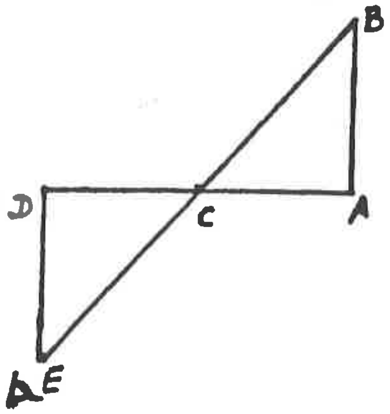
EADEM hæc propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, nõ sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholii demonstratũ est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON

* 16. vnde. * 2. sexti * 16. vnde. * 2. vndec.

④

(NIPSIUS) 1er siècle



⑤

Mensura autem colligitur duplici modo. Aut enim linum tenue expeditum uno capite nectitur in sagitta : quae cum ad muri fastigia directa pervenerit ex mensura lini murorum altitudo deprehenditur. Aut certe, cum sol obliquus umbram turrium murorumque jaculatur in terram, tunc, ignorantibus adversariis, umbrae illius spatium mensuratur ; itemque decempeda figitur ex umbra ipsius similiter mensuratur : quo collecto numero, nemo dubitat ex umbra decempedae inveniri altitudinem civitatis, cum sciatur quanta altitudo quantum umbrae emittat in longum.

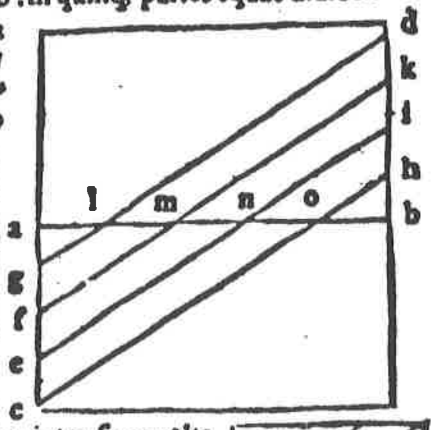
(VEGECE)
5eme siècle

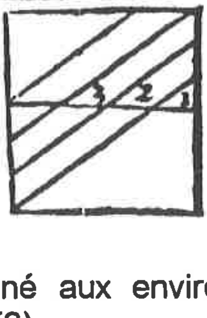
Il y a deux façons de mesurer.
Ou bien un peloton de fil fin est noué par un bout à une flèche. Lorsque celle-ci parvient au droit du haut du mur de la longueur du fil on déduit la hauteur.
Ou bien, lorsque le soleil...

⑥

¶CAROLI BOVILLI SAMAROBRINI LIBELLVS DE MATHEMATICIS SVPPLEMENTIS AD STVDIOSISSIMVM VIRVM REMVNDVM BOVCHERIVM IVRISPERITVM.

Rectam lineam/in quotlibet partes equales diuidere.
¶ Quo pacto rectā lineā liceat in duo equa partiri: demōstrat Euclides. Quo autem modo fit quotlibet equalium partium numero/ diuidenda: hactenus quod norim proposuit demonstrauitq; nemo. huius tamē scientia: haud parum Geometricis conducit disciplinis. Nam frequentiuscule/ in geometricis demonstrationibus: expetitur recte linee quātalibet sectio/ atq; diuisio. Sit igitur recta linea a b : in quinq; partes equas diuidenda. Super puncta a et b/ educo in diuersam partē: duas perpendiculares/cuiuscūq; quātitatis (Nā nil differt/ debent tamen esse inter se equales) a c et b d. que super lineā a b: creant rectos angulos coalternos c a b et a b d. Partior deinde ambas lineas a c et b d : in quattuor partes equales a c/ in punctis e f g: b d vero punctis h i k. Et duco lineas quattuor: c h/ e i/ f k/ et g d. quib; pposita linea a b: erit in quinq; partes equales secta/ atq; diuisa: in punctis l. m. n. o. ¶ Huius enim rationē/ facile collige per lineas equidistantes et coalternos angulos. Erunt enim linee c h/ e i/ f k/ et g d inuicem equidistantes. quare et coalterni anguli qui ab ipsis super lineam a b: in punctis l m n o facti sunt: erunt equales: et intercepte inter equidistātes/ linee a l/ l m/ m n/ n o/ et o b: angulorum coalternorum latera inter se equalia. ¶ Et eodem modo procede/ in quātalibet recte linee partitione factis super eam/ diuersa ex parte rectis angulis coalternis eorūq; lateribus/ vno minore numero equaliter sectis: q̄ sit proposite linee expetita diuisio. ¶ Si enim diuidenda est proposita linea ternario: partire coalternorum angulorū/ perpendicularia super datā lineā latera binario. Si in quattuor eam partiri volueris: eadē latera in tria sunt partienda. Si in septē/ data linea est diuidenda: latera eadem diuide senario. Et ita deinceps.





Carolus Bovillus - Charles de Bouelle ou Bouvelles - né aux environs d'Amiens (samarobrina) en 1470, enseigna et mourut à Noyon (1553).

M H; l'on conclura le mesme si les triangles & les parallelogrâme sont constituez sur vne mesme base, &c.

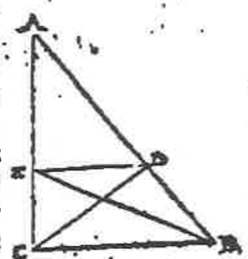
ij

THEOREME 2. PROP. 2.

Si à l'vn des costez d'vn triangle, l'on mene quelque ligne droicte parallele, elle couppera les costez du triangle proportionellement : Et si les costez sont couppez proportionellement, la ligne droicte conioignant les poincts des sections, sera parallele à l'autre costé du triangle.

Au triangle ABC, soit premierement la ligne droicte BE, parallele au costé B C. Ie dis que les costez A B, A C, sont couppez proportionnellement aux poincts D & E, c'est à dire que A D, est à D B, comme A E, à E C.

Car ayant mené les droictes lignes C D, B E, a les triangles D E B, D E C, constituez sur la base D C, & entre mesmes paralleles D E, B C, seront egaux entr'eux : partant comme le triangle A D E, est au triangle D E B; ainsi le mesme A D E, sera au triangle DEC; b Mais comme A D E, est à D E B, ainsi la base A D, est à la base D B. (Puis que ces triangles sont de mesme hauteur, comme il appert si par le point E, on mene vne ligne parallele à A B:) Et par mesme raison, comme le triangle A D E, au triangle DEC, ainsi la base A E, à la base E C, c donc comme A D, est à D B,



a 37. 1.
b 7. 5.
c 1. 6.
d 11. 5.

ainsi A E, est à E C, (puis que ces 2. raisons sont de mesme à la raison du triangle A D E, au triangle D E B, & du mesme triangle A D E, au triangle D E C. Ce qui est proposé.

Secondement que la droicte ligne D E, couppe les costez A B, A C, proportionellement. Ie dis que D E, est parallele à l'autre costé C B.

g 1. 6. Car derechef ayant mené B E, C D: g Comme la base A D, sera à la base D B, ainsi le triangle A D E, au triangle D E B, puis qu'ils sont de mesme hauteur; Mais comme A D, est à D B, ainsi A E, à E C, par l'hypothese. f Donc comme le triangle A D E, sera au triangle D E B, ainsi A E, sera à E C: Mais derechef comme la base A E, est à la base E C, ainsi le triangle A D E, au

h 11. 5. triangle D E C, estant de mesme hauteur: h Donc comme le triangle A D E, est au triangle D E B,

i 9. 5. ainsi le mesme triangle A D E, au triangle D E C: i Donc les triangles D E B, D E C, seront egaux:

k 39. 1. Et partant puis qu'ils sont constituez sur mesme base: k ils seront aussi entre mesme paralleles. Donc D E est parallele à B C. Ce qui est proposé. Partant si à l'vn des costez, &c. Ce qui falloit demonstrer.

iij

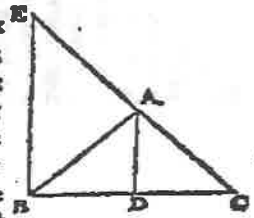
THEOREME 3. PROP. 3.

Si vn angle d'vn triangle est couppé en deux parties egales, & que la ligne droicte qui couppe l'angle couppe aussi la base; les segmens de la base auront mesme raison entr'eux que les autres costez du triangle: Et si les segments de la base ont mesme raison entr'eux que les autres co-

stez du triangle, la ligne droicte menee du sommet au poinct de la section, couppe l'angle du triangle en deux egalement.

Soit le triangle A B C, dont l'angle B A C, soit couppé en deux egalement par la ligne droicte A D, qui couppe aussi la base au poinct D. Ie dis premierement que comme B A, est à A C, ainsi B D, est à D C.

Car soit menee B E, parallele à D A, rencontrant C A, prolongee vers E; Or elles se rencontreront puis que les angles C & C B E, sont moindres que deux droicts, a car C, & C D A, sont moindres que deux droicts b & C D A, est egal à C B E, l'externe à l'interne; C & C E B, seront pareillement moindres que deux droicts & l'angle E B A, c sera egal à son alterne B A D, & l'angle E, egal à l'externe D A C. Donc puis que les deux angles B A D, D A C, sont egaux par l'hypothese; les angles E B A, & E, seront d egaux entr'eux, d partant les lignes A B, A E, e egales entr'elles. e Donc comme E A, sera à A C, ainsi B A, sera à la mesme A C, f mais comme E A, est à A C, ainsi B D, est à D C, puis que au triangle B E C, la droicte ligne D A, est parallele au costé B E: Donc comme B A, sera à A C, ainsi g B D, sera à D C. Ce qui est proposé.



a 17. 1.
b 29. 1.
d 6. 1.
e 7. 5.
f 2. 6.
g 11. 5.

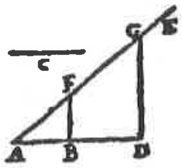
Secondement soit comme B A, à A C, ainsi B D, à D C: Ie dis que la droicte ligne A D, couppe l'angle B A C, en deux egalement: Car

⑧ Henrion (1623) Mémoires mathématiques

CONSTRVCT. DE DIVERS PROB. 227

Probleme XLVI.

Couper vne ligne droicte donnee en parties, qui soient entr'elles selon vne raison donnee.



Soit la ligne droicte donnée AD, qu'il faut couper en deux parties, qui ayent telle raison entr'elles que AF a C.

Soit conioinct AF auec AD, faisant l'angle DAF tel qu'on voudra, & icelle AF, estant prolongée iusques en E indeterminément, soit prise FG, egale a C; & ayant mené DG, soit menée FB, parallele à GD; & elle coupera AD en B, selon la raison de AF à FG, c'est à dire C, comme il est manifeste: ce qu'il faloit faire. 2. p. 6

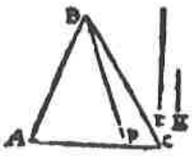
SCHOLIE.

Le mesme se fera aussi auec le compas de prop: transferant la raison donnee sur l'vne des iambes, & posant a l'ouuerture de l'extremité d'icelle la ligne AD, & l'ouuerture de l'extremité de AF, donnera le segment AB.

Probleme XLVII.

D'vn angle d'vn triangle rectiligne, mener vne ligne droicte, qui diuise le triangle selon vne raison donnee.

Soit le triangle donné ABC, & il faut de l'angle B mener vne ligne droicte, qui diuise le triangle selon la raison de D à E.



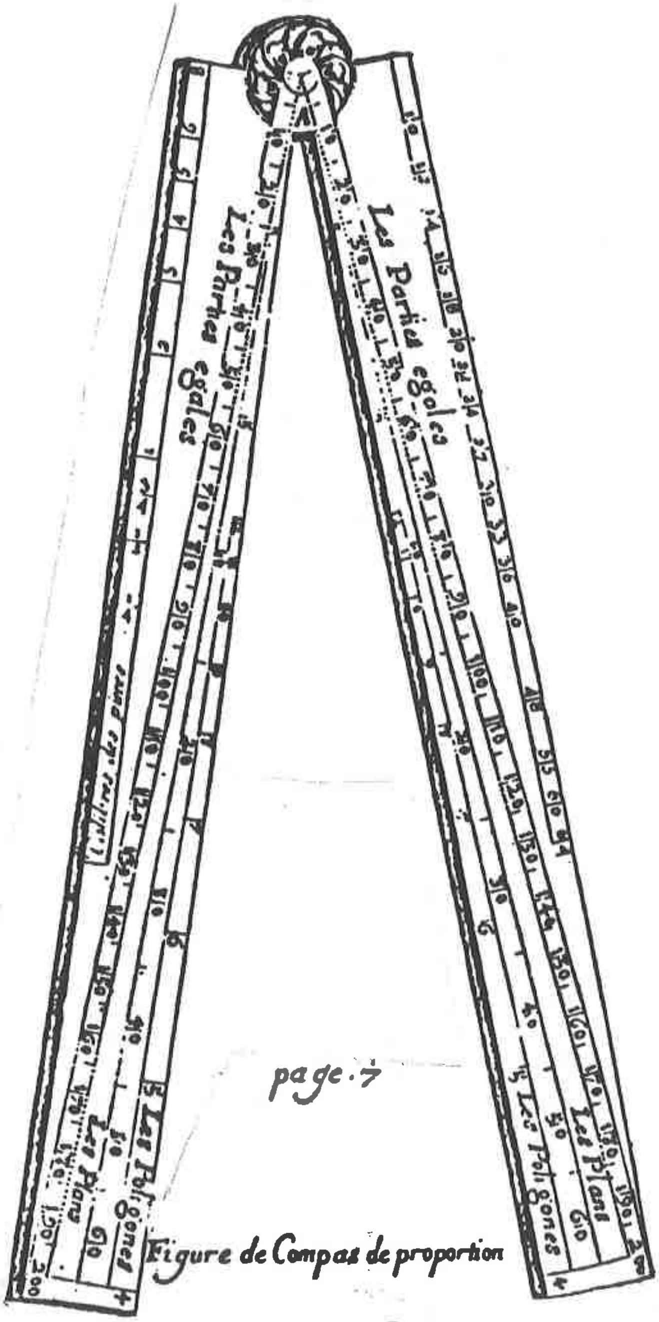
Soit par le prob. preced. coupé AC costé opposite a l'angle B en P, selon la raison de D à E, puis soit menée BF; & icelle diuisera le triangle selon le requis: ce qui est manifeste. 1. p. 6

SCHOLIE.

Le poinct F sera trouué auec le compas de prop. puis que auec iceluy se peut couper AC, selon la raison donnée.

⑨ Ozanan

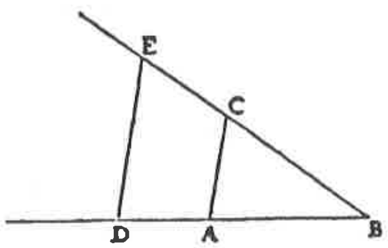
L'usage du compas de proportion (1691)



⑩ Descartes (1637)

LA GEOMETRIE.

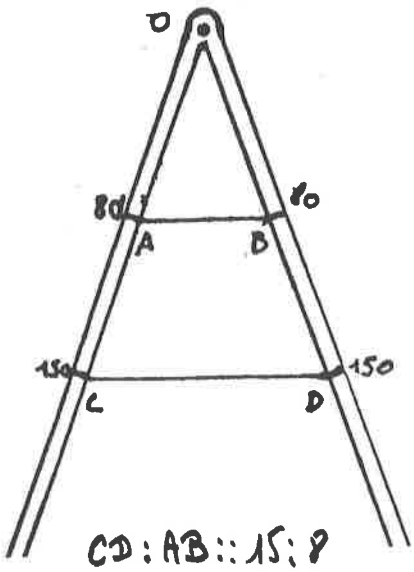
La Multiplication.



Soit par exemple AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC est le produit de cete diuision.

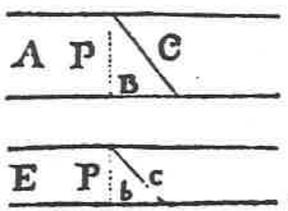


CD : AB :: 15 : 8

paru sans nom d'auteur chez Charles Savreux à PARIS
M. DC. LXVII.
Avec privilège du Roy

PROPOSITION FONDAMENTALE
DES LIGNES PROPORTIONELLES.

LORS que deux lignes sont également inclinées en deux differens espaces paralleles, elles sont entr'elles comme les perpendiculaires de ces espaces, & leurs éloignemens du perpendicule sont aussy en même raison.



Soient deux espaces A & E.
Soient appellées dans l'espace *A*.
La perpendiculaire, *P*.
L'oblique, *C*.
L'éloignemẽt du perpendicule *B*.
Et soient de même appellées dans l'espace, *E*.
La perpendiculaire *p*.
L'oblique *c*.
L'éloignement du perpendicule *b*. Je dis que

$$Pp :: Cc :: Bb.$$

coquille → p au lieu de P dans E

16

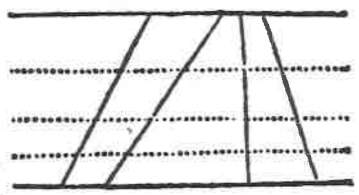
Et en voila la preuve tres naturelle, dont je ne croy pas que jamais personne se soit avisé.

Soit *p* divisée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. & ces aliquotes quelconques de *p* soient appellées *x*.

Si on tire par tout les points de cette division telle qu'elle soit des paralleles à l'espace *A*, cet espace sera divisé en autant de petits espaces paralleles qu'*x* sera dans *p*, & ces petits espaces seront égaux par le 2[e] Lemme, parce qu'ils auront tous *x* pour perpendiculaire.

Et de là il s'ensuit que *C* sera aussy divisé en aliquotes pareilles à celles de *P*, parce que les portions de *C*, qui se trouvent entre chacun de ces petits espaces égaux y estant également inclinées par le 9. Lemme, y sont égales par le 8.

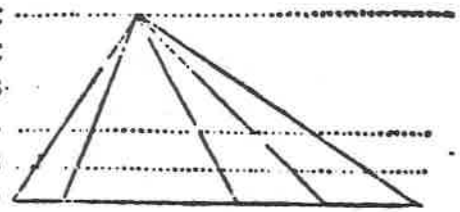
PREMIER COROLLAIRE.



PLUSIEURS lignes estant diversement inclinées dans le même espace parallele, si elles sont toutes coupées par des paralleles à cet espace, elles le sont proportionellement, c'estadire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la 1[re], ou la 2[e], ou la 3[e] &c. comme chaque autre toute a la même partie 1[re], ou 2[e], ou 3[e] &c.

C'est une suitte manifeste du precedent Theoreme, puisque d'une part toutes les toutes sont dans le même espace, qui est l'espace total. Toutes les premieres parties dans le 1[er] espace partial, les 2[des] dans le 2[e], & ainsy des autres. Et que de l'autre chaque toute & chacune de ses parties sont également inclinées chacune dans son espace par le 9[e] Lemme. Donc la 1[re] toute est à sa 1[re] partie comme la seconde toute à sa 1[re] partie.

SECOND COROLLAIRE.



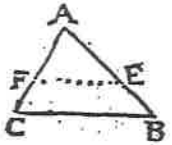
SI plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionellement par toutes les lignes paralleles à celle qui les termine.

C'est la même chose que le precedent Corollaire, puisque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles se trouveront toutes dans le même espace parallele, & par consequent les paralleles à cet espace les doivent toutes couper proportionellement.

THEOREME VII.

Lorsqu'on coupe deux côtez d'un triangle par une ligne parallele à la base de l'angle qu'ils comprennent, ils sont coupez proportionnellement. Eucl. VI. Prop. 2. 16

Soit le triangle ABC, je méne EF parallele à BC, je dis que $AE. EB :: AF. FC.$ Le triangle AEF est semblable au triangle ABC, puisqu'ils sont équiangles* : car outre que l'angle A est commun, l'angle $AEF = ABC$, & l'angle $AFE = ACB$* : donc $AB. AE :: AC. AF$* & *dividendo* * $AB - AE. AE :: AC - AF. AF.$ Or $AB - AE = EB$, & $AC - AF = FC.$ Donc $EB. AE :: FC. AF.$ Permutando, $AE. EB :: AF. FC.$

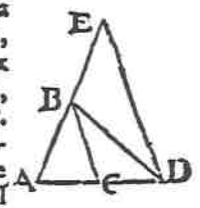


* 5 n. 24
* L. 1. n. 37.
* 5 n. 36.
* L. 3. n. 51.

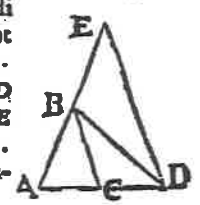
THEOREME VIII.

Si l'angle d'un triangle est coupé en deux également par une ligne droite, qui coupe aussi la base, les segmens de la base seront l'un à l'autre, comme les deux autres côtez. Et si cela est, la ligne tirée du sommet à la base coupe l'angle en deux également. Eucl. VI. Prop. 3. 17

Soit le triangle ABD. La ligne BC tirée du sommet, coupe l'angle B en deux également. Il faut prouver, 1°. que $AB. BD :: AC. CD.$ Soit mené DE parallele à BC, & prolongez le côté AB jusqu'à ce qu'il rencontre cette parallele. Les angles ABC &



* L. 2. n. 27. AED sont égaux* & par la même raison CBD & BDE.* On suppose ABC & CBD égaux ; * L. 3. n. 23. donc CBD & BED seront aussi égaux ; & par consequent BDE & BED : ainsi le triangle DBE, étant isocelle, $BD = BE$. Or $AB. AC :: BE$ * 5 n. 16. (ou BD). CD*. Donc $AB. AC :: BD. CD.$ & *alternando* $AB. BD :: AC. CD.$

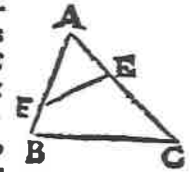


2°. Il faut prouver que si cela est, BC coupe ABD par la moitié. Puisque supposant comme dessus DE parallele à BC. & AB prolongée en * 5 n. 16. E, alors $AB. BE :: AC. CD$*, & par l'hypothese $AB. BD :: AC. CD$ donc $BE = $ * L. 3. n. 42. BD* & le triangle DBE sera isocelle* & * L. 2. n. 37. aura les angles $BED = BDE$* : mais à cause des paralleles BC, ED, les angles ABC, BED * L. 2. n. 83. ou son égal BDE seront égaux ; *comme aussi * L. 2. n. 27. CBD, BDE* : donc l'angle $ABC = CBD$; ce qu'il falloit prouver. * L. 2. n. 25.

DEFINITION. I.

18. *Les lignes antiparallelès sont celles qui sur les lignes qu'elles coupent font bien les mêmes angles, mais c'est d'un autre côté.*

Les lignes paralleles font les mêmes angles d'un même côté, avec les lignes * L. 1. n. 27. qu'elles coupent*. Si $AFE = ABC$, les lignes FE & BC seroient ainsi paralleles ; mais si $AFE = ACB$, ces lignes sont antiparalleles.



THEOREME IX.

Lorsqu'on coupe les côtez d'un triangle par une ligne antiparallele à sa base, les côtez de ce triangle sont coupez en proportion reciproque. 18

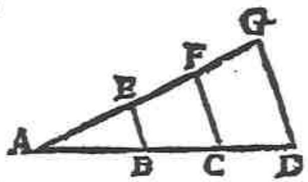
Même Figure.

FE est antiparallele à BC : ainsi $AFE = AGB$; en $AEF = ABC$. Le triangle AEF a donc les memes angles que ABC, & par consequent ils sont semblables, & leurs côtez sont proportionnels*, mais leurs côtez homologues n'ont pas * 5 n. 100 la meme situation, car AB n'est pas homologue avec AF, mais avec AE : ainsi ces côtez AB & AC ne sont pas coupez dans une proportion droite. AB n'est pas à AF comme AG à AE ; de sorte que de ces quatre grandeurs, la premiere est à la quatriéme comme la troisiéme à la seconde, AB, $AE :: AC. AF.$

PROBLEME I.

Couper une ligne droite semblablement à une ligne qui est déja coupée. Eucl. VI. Prop. 10. 20

La ligne AD est coupée en trois parties AB, BC, CD : on propose de couper la ligne AG en trois parties proportionnelles à celles de AD. Je joins AG avec AD ; de sorte qu'elles fassent un angle, quel qu'il soit. Aprés je mene par les points G & D une ligne droite, & à celle-ci des paralleles par les points B & C de la coupée. Les paralleles coupent AG, en trois parties, qui sont propor-



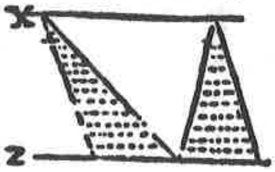
12 B. LAMY

Elemens de Geometrie.

Livre II. Section V.

Cette methode que nous expliquons ici s'appelle la methode des indiviſibles ; parce qu'on ſuppoſe des lignes qui ont une largeur indiviſible à cauſe de ſa petiteſſe.

On peut employer cette même methode pour prouver l'égalité des triangles qui ſont ſur une même baſe, & qui ont la même hauteur ou qui ſont entre deux paralleles ; car ſi on ſuppoſe que deux lignes égales ont le même mouvement, & qu'elles ſe diminuent proportionnellement, il faut que dans le même temps elles faſſent des ſurfaces égales. Si auſſi on conçoit deux ſurfaces ſur deux baſes égales, compoſées d'un égal nombre de lignes indiviſibles, qui ſont diminuées proportionnellement ; de ſorte que toutes ſoient égales chacune à chacune, il faut que ces deux ſurfaces qui ſont deux triangles ſoient égales.



14 De LA CAILLE (1744) « des lignes proportionnelles », page 279

Des Lignes proportionelles.

En général toutes les proprietés que nous avons démontrées ſur les quantités proportionelles, conviennent aux lignes qui le ſont. Ainſi nous ſuppoſerons toujours la démonſtration de ces proprietés. Au reſte, il ne s'agit ici que de proportions & progreſſions géométriques ; & c'eſt la partie la plus eſſentielle des Elements de Geometrie.

430. Pour la traiter avec ordre, ſuppoſons d'abord que
ſur la droite AB on prenne des parties égales AD, DG, 41.
GI, &c, & que l'on mene les paralleles DF, GH, IK, &c, ſur la droite AC, il eſt clair que les parties AF, FH, HK, de cette droite ſeront égales entre elles : car ſi on mene parallélement à AC les lignes DE, GR, IS, les triangles ADF, DGE, GIR ſeront égaux. Donc AF = DE = GR = FH = HK = &c.

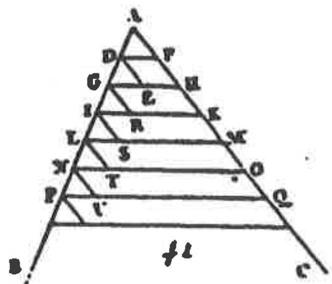
On aura donc AD : AF :: DG : FH :: GI : HK ; & par conſéquent AP ſomme de tous les antécédents eſt à AQ ſomme de tous les conſéquents (241), comme un ſeul antécédent AD eſt à ſon conſéquent AF, comme un nombre quelconque de parties de AB eſt au même nombre de parties de AC ; par exemple :: AG : AH :: AI : AK :: DI : FK, &c.

431. Donc 1°, *Si deux droites AE, AD ſont coupées par* 42.
deux ou par un plus grand nombre de paralleles ED, CB, leurs parties CE, BD ſeront proportionelles aux lignes entieres AE, AD.

432. 2°, Si deux triangles ABC, *abc* ſont ſemblables, 43.
tous leurs côtés homologues ſont proportionels.

Car ſi l'angle B = *b*, & ſi on prend ſur AB la partie DB égale au côté homologue *ab*, en menant DF parallele à AC, le triangle BDF ſera égal au triangle *abc*.

Or AB : BC :: BD : BF. Donc AB : BC :: *ab* : *bc*.



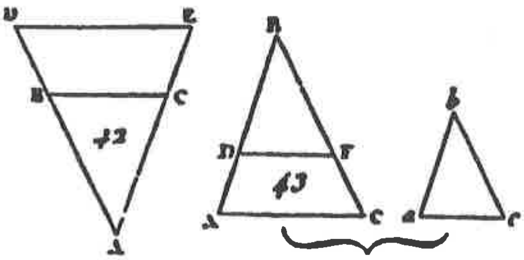


FIG. Car ſes angles ſont tous égaux ; leur ſomme $= 180°$.
20. Donc chacun $= 60°$.

397. Si du ſommet AB d'un triangle iſoſcele BC on abaiſſe la perpendiculaire BF ſur la baſe AC, je dis que tous les points de cette perpendiculaire BF ſeront chacun à égale diſtance de A & de C, & que par conſéquent la baſe AC ſera diviſée en deux également au point F. Car AB = BC, à cauſe du triangle iſoſcele ABC. Donc &c. (376).

REMARQUE. Toutes les fois que les deux angles de la baſe d'un triangle ſont aigus, la perpendiculaire abaiſſée de ſon ſommet tombe en dedans du triangle ; mais ſi l'un des deux eſt obtus, cette perpendiculaire tombe en dehors.
21. *Voyez* les Triangles ACB, FCB. La démonſtration eſt aiſée.

De la ſimilitude & de l'égalité des Triangles.

22. & 23. 398. ON appelle triangles *ſemblables* ceux dont tous les angles ſont reſpectivement égaux. Ainſi, ſi l'angle ABC = *dbf*, & ſi en même temps BAC = *bdf*, & ACB = *dfb*, les triangles ABC, *dbf* ſont ſemblables.

Si deux triangles ſont ſemblables, les côtés oppoſés aux angles égaux ſe nomment *côtés homologues*. En général, on appelle *dimenſions homologues* de deux figures les lignes de même dénomination dans l'une & dans l'autre, ou même des lignes tirées de la même maniere dans l'une & dans l'autre. Par exemple, dans deux cercles, les rayons, les diamétres, les circonférences, les arcs d'un égal nombre de degrés, ainſi que leurs cordes, &c ſont des dimenſions homologues.

Cela poſé, nous allons faire connoître les cas dans leſquels on peut conclure la ſimilitude ou l'égalité de deux triangles.

399. I. *Deux triangles qui ont deux angles reſpectivement égaux ſont ſemblables.* Car le troiſieme eſt égal de part & d'autre (396).

Donc *ſi deux triangles rectangles ont chacun un angle aigu*

égal de part & d'autre, ces deux triangles ſeront ſemblables. FIG.

400. II. Deux triangles ſont ſemblables lorſque tous leurs côtés homologues ſont paralléles. Car alors tous leurs angles ſont reſpectivement égaux. 22.

401. III. *Deux triangles ſont ſemblables, lorſque tous les côtés de l'un ſont perpendiculaires aux côtés homologues de l'autre*, ou lorſqu'étant prolongés, ils ſe rencontrent à angles droits. Il ſuffit pour s'en convaincre de faire faire un quart de révolution autour d'un point fixe à l'un de ces triangles ; car alors ſes côtés homologues ſeront tous paralléles à ceux de l'autre triangle.

402. IV. Si un nombre quelconque de paralléles DF, IL, AC, coupent les côtés d'un angle ABC, tous les triangles BDF, BIL, BAC ſeront ſemblables. Car outre qu'ils ont l'angle B commun, tous les angles BDF, BIL, BAC ſont égaux (384) ; il en eſt de même des angles BFD, BLI, BCA.

Si les deux triangles ABC, *bdf* ſont ſemblables, & que l'on imagine le triangle *bdf* poſé ſur le triangle ABC de maniere que l'angle *b* tombe ſur ſon égal B, & le côté *db* ſur ſon homologue AB, je dis que le côté *df* repréſenté alors par DF ſera paralléle à la baſe AC. Car le triangle BDF égal à *bdf* ſera ſemblable au triangle ABC. Donc l'angle BDF = BAC. Donc les lignes DF & AC ſont paralléles.

403. V. Si deux triangles ont un angle égal & les côtés qui comprennent cet angle égaux de part & d'autre, ils ſont égaux & ſemblables.

En effet, ſi le triangle BDF avoit, outre l'angle commun B avec le triangle ABC, les deux côtés BD, BF, égaux reſpectivement à AB, BC, il eſt évident que ces deux triangles ſe confondroient.

404. VI. Deux triangles ABC, *abc*, qui ont tous leurs côtés homologues égaux, ſont égaux & ſemblables. 22.

Pour le prouver, imaginons le triangle *abc* poſé ſur ABC, de maniere que le côté *ac* tombe ſur AC ; il eſt clair que puiſque AB = *ab*, & que BC = *bc*, le point *b* & 24.

16 Dans un « cours de géométrie » du XIXième siècle

Il n'y a pas qu'une méthode...

. Problème 4. — *Diviser une droite en cinq parties égales.*

Soit la droite AB ; tirez une ligne indéfinie sur laquelle vous porterez cinq parties égales, prises arbitrairement. Prenez une ouverture de compas égale à leur somme CD, et des points C et D, décrivez des arcs qui se coupent en G. Joignez, par des droites, le point d'intersection G à tous les points de section de CD. Prenez ensuite la longueur de la ligne donnée AB, et portez-la de G en E et de G en F ; joignez EF, qui sera égale à AB et se trouvera divisée en cinq parties égales.

[illegible]. Problème 5. — *Diviser une droite en sept parties égales, au moyen d'un angle.*

Soit la droite AB ; tirez de l'extrémité A, et sous une inclinaison quelconque, une droite AC sur laquelle vous porterez sept fois une même ouverture de compas prise arbitrairement. Joignez la septième division à l'extrémité B de la ligne donnée, puis par les points de division menez des parallèles à CB ; ces parallèles diviseront AB en sept parties égales.

17 ROUCHE et COMBEROUSSE (1883)

Scolies.

203. Il résulte du n° 200 que, *dans les triangles, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés, et réciproquement.* Cette propriété fondamentale, dont la découverte est attribuée à Thalès (639-548 av. J.-C.), ne subsiste pas pour des polygones quelconques. Par exemple, un carré et un rectangle ont leurs angles égaux, et cependant leurs côtés homologues ne sont pas proportionnels. De même, un carré et un losange ont leurs côtés proportionnels, et cependant leurs angles ne sont pas égaux.

19 Du côté de chez Mame (Vers 1900)

<u>Théorème de Thalès</u>

221. *Toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.*

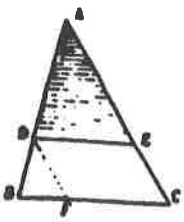


Fig. 104.

Soit ABC un triangle quelconque, et DE une parallèle au côté BC. Il faut prouver que les deux triangles ADE et ABC ont les angles respectivement égaux, et les côtés homologues proportionnels.

1° L'angle A est commun ; les angles D et B sont égaux comme correspondants, ainsi que E et C.

2° Menons DF parallèle à AC. La figure DECF est un parallélogramme, et ainsi DE = FC (n° 100). A cause des parallèles DE et BC on a (n° 213) : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Les parallèles DF et AC donnent également :

$\frac{AD}{AB} = \frac{FC \text{ ou } DE}{BC}$ d'où $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ Donc...

§ III. — Similitude et homothétie.

206. *Similitude.* L'étude des *figures semblables* repose principalement sur le *théorème de Thalès*, relatif aux triangles semblables. (G., n° 221.)

Pour résoudre un problème à l'aide de la similitude ou de l'homothétie, on construit une figure semblable à la figure demandée, et on compare une dimension à son homologue donnée. On opère surtout ainsi lorsque le problème proposé, ou le problème plus simple auquel on a pu le ramener, ne dépend que d'une ligne donnée.

206 a. Note. Le nom d'*homothétie* est dû à Chasles, mais l'étude des *figures homothétiques* est de Poncelet.

Actuellement l'étude de l'*homothétie* précède celle de la *similitude*, ou des *figures semblables*.

° Thalès, un des sept sages de la Grèce (639 à 548 av. J.-C.), alla s'instruire en Égypte : il mesura la hauteur des pyramides par le moyen de leur ombre ; aussi lui attribue-t-on les théorèmes relatifs aux triangles semblables. Thalès s'établit ensuite à Milet, et y fonda l'École ionienne. Il eut la gloire de compter Pythagore au nombre de ses disciples.

18 COMBETTE

2° Si on a la relation

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD},$$

les points A, C, B, D forment une division harmonique, car on en déduit successivement :

$$2AC \times AD = AB \times AD + AB \times AC$$

$$AC(AD - AB) = AD(AB - AC)$$

$$\frac{AC}{AB - AC} = \frac{AD}{AD - AB},$$

et enfin :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB};$$

ce qu'il fallait prouver.

THÉORÈME II *(Théorème de Thalès)*

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle partage les deux autres côtés en parties proportionnelles.

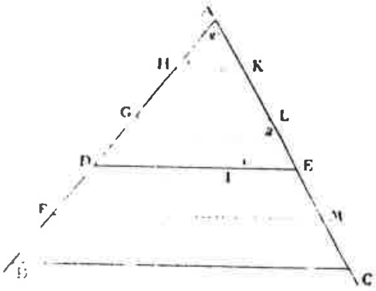


Fig. 137.

Soit DE parallèle au côté BC du triangle ABC, prouvons la proportion :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}.$$

1er Cas. — *Supposons les segments* DA, DB *commensurables entre eux*, et soit une commune mesure contenue trois fois dans DA et deux fois dans DB : on aura donc $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$. Par les points de division, traçons des parallèles à BC, et prouvons qu'elles partagent AC en cinq parties égales : par exemple, prouvons LE = AK.

A cet effet menons LI parallèle à AB : nous formerons le triangle ELI égal à HAK, parce que ces triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : en effet LI = DG, portions de parallèles comprises entre parallèles, et GD = AH par hypothèse;

puis les angles 1 et 1' sont égaux, ainsi que 2 et 2', parce que les côtés de ces angles sont respectivement parallèles et de même sens. Donc enfin LE = AK, et une même longueur étant contenue trois fois dans AE et deux fois dans EC, on a :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{3}{2}, \quad \text{donc} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}.$$

***2° Cas.** — *Les longueurs* DA *et* DB *n'admettent pas de commune mesure ;* partageons DB en n parties égales, et portons cette $n^{ième}$ partie de DB autant de fois que possible sur AD ; nous trouverons qu'elle est contenue m fois, avec un reste plus petit que cette longueur : d'où nous conclurons que l'on a :

$$\frac{m}{n} < \frac{DA}{DB} < \frac{m+1}{n}.$$

Par les points de division du côté AB, menons des parallèles à BC, elles partageront EC en n parties égales, et détermineront, sur AE, m divisions égales aux précédentes avec un reste plus petit que cette longueur ; donc on a aussi :

$$\frac{m}{n} < \frac{EA}{EC} < \frac{m+1}{n}.$$

Par suite, quel que soit le nombre n, les deux rapports $\frac{DA}{DB}$ et $\frac{EA}{EC}$ sont compris entre les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$: donc la différence entre ces rapports est moindre que $\frac{1}{n}$, différence entre les fractions, et comme $\frac{1}{n}$ est aussi voisin de zéro qu'on le veut, pour des valeurs suffisamment grandes de n, la différence des rapports est rigoureusement nulle, parce qu'elle n'est pas variable. Donc les rapports sont égaux.

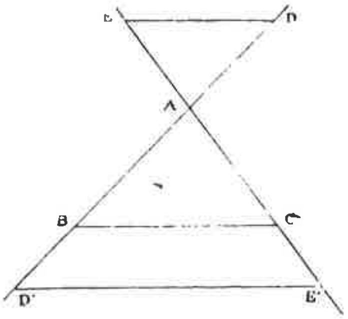


Fig 138.

20

§ 3. — LIGNES PROPORTIONNELLES

264. *Théorème fondamental.* — *Des droites parallèles déterminent sur des sécantes quelconques des segments proportionnels.*

Soient les droites parallèles AB, CD, EF et les sécantes AE et BF; il faut démontrer que

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}.$$

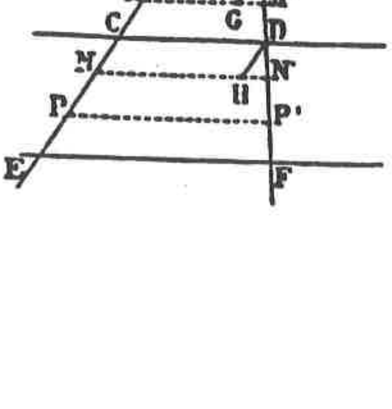
265. REMARQUE. — On peut écrire aussi :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF},$$

266. *Théorème.* — *Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux côtés qu'elle rencontre des segments proportionnels.*

Géométrie pl. Camman-Rebouis.

(1927)



§ 3. Teorema lui Thales

TEOREMA IX.3. Fie $\mathbf{A}$ un vector în planul Π prevăzut cu o origine O şi vectorul $\mathbf{A}' = \lambda \mathbf{A}$. Fie încă d_1, d_2 două axe care trec prin originea O. În aceste condiţii are loc relaţia:

$$\mathbf{A}'_1 = \lambda \mathbf{A}_1$$

sau, altfel spus:

$$(\lambda \mathbf{A})_1 = \lambda \mathbf{A}_1.$$

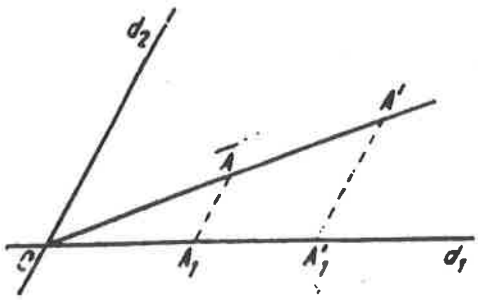


Fig. IX. 9

I. Să facem deocamdată ipoteza $\lambda > 0$ (fig. IX, 9).

a) Să presupunem $\lambda = p$ — întreg. În acest caz fie B, C,... puncte pe $\partial(O, A)$, aşa ca $\rho(O, A) = \rho(A, B) = \rho(B, C) = \dots \rho(L, A')$. După teorema lui Thales sub forma slabă avem:

$$\rho(O, A_1) = \rho(A_1, B_1) = \dots = \rho(L_1, A'_1),$$

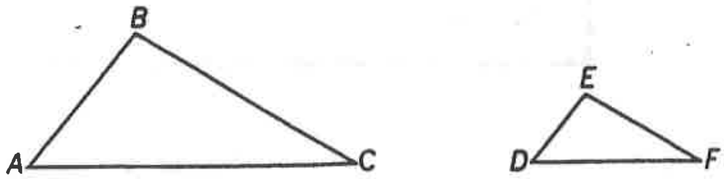
şi deci:

$$\rho(O, A'_1) = p\,\rho(O, A_1),$$

22 Elementary School Mathematics (6) - EICHOLZ - Addison/Wesley London (1964)

Ratio in geometry

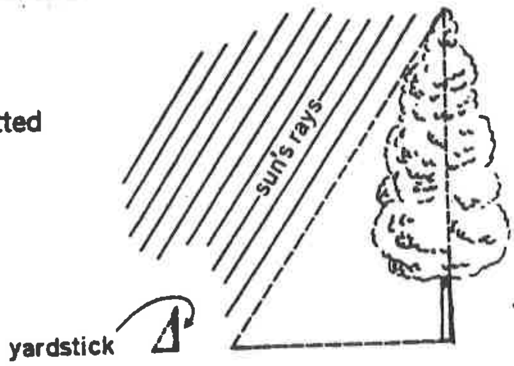
When two triangles (or polygons) are similar, their sides can be paired so that the ratios are equal. In the example below, the two triangles are similar and the ratio of their sides is 2:1.



The ratio of $\overline{AB}$ to $\overline{DE}$ is 2:1.
The ratio of $\overline{BC}$ to $\overline{EF}$ is 2:1.
The ratio of $\overline{AC}$ to $\overline{DF}$ is 2:1.

EXERCISES

The two triangles shown by the dotted lines are similar. If the shadow of the yardstick is 2 feet and the shadow of the tree is 16 feet, how tall is the tree?



25. Der Strahlensatz

1. Trägt man auf dem Schenkel a eines Winkels (Fig. 210) gleich lange Strecken $SA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$ auf und zieht man durch die Endpunkte dieser Strecken parallele Gerade, so sind auch die auf dem zweiten Schenkel b durch die parallelen Geraden ausgeschnittenen Strecken SB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... gleich lang.

Verschieben wir nämlich irgendeine der Teilstrecken auf dem Schenkel b, etwa B_1B_2, in Richtung des Schenkels a nach $B_1'B_2'$ und dann diese Strecke in Richtung der Parallelen nach B_3B_4, so ist $B_1B_2 = B_1'B_2'$, $B_1'B_2' = B_3B_4$, also auch $B_1B_2 = B_3B_4$.

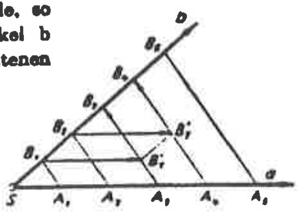


Fig. 210

2. a) Wir tragen nun auf dem Schenkel a des Winkels zwei verschieden lange Strecken SA_1 und A_1A_2 auf (Fig. 211) und ziehen wieder durch deren Endpunkte parallele Gerade, die auf dem zweiten Schenkel b die Strecken SB_1 und B_1B_2 ausschneiden.

Haben nun die Strecken SA_1 und A_1A_2 das gemeinsame Maß e, so gilt:

$$\begin{aligned} SA_1 &= p \cdot e \\ A_1A_2 &= q \cdot e \\ \hline SA_1 : A_1A_2 &= p : q \end{aligned}$$

Dabei sind p und q ganze Zahlen (in Fig. 211 ist $p = 4$, $q = 7$).

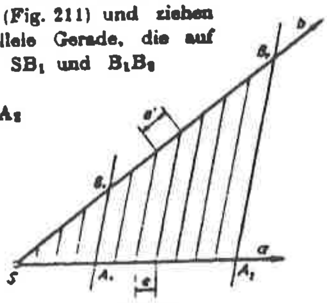


Fig. 211

Tragen wir nun das gemeinsame Maß e auf der Strecke SA_1 p-mal, auf der Strecke A_1A_2 q-mal auf, und ziehen wir auch durch die Teilungspunkte parallele Gerade zu den gegebenen Parallelen, so wird nach Absatz 1 die Strecke SB_1 in p, die Strecke B_1B_2 in q gleiche Teile e' geteilt. Daher gilt:

$$\begin{aligned} SB_1 &= p \cdot e \\ B_1B_2 &= q \cdot e' \\ \hline SB_1 : B_1B_2 &= p : q \end{aligned}$$

Aus den beiden Proportionen folgt:

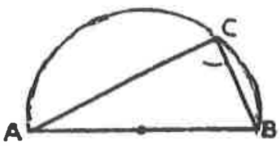
$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2$$

Lehrbuch der Mathematik für die 3 und 4 Klasse der Mittelschulen
LAUB - Wien 1966

23

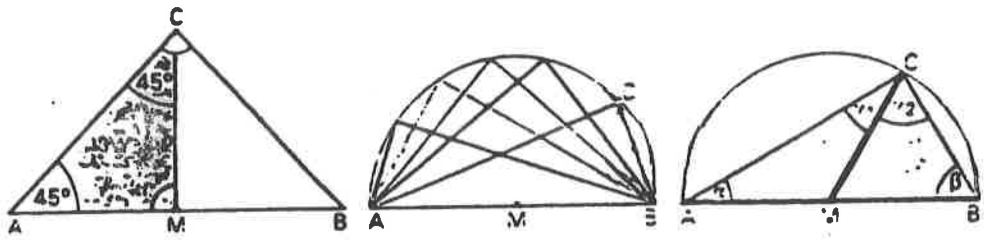
Gamma 7 - Mathematatik Gymnasium (1977)

Jedes Dreieck über einem Durchmesser in einem Halbkreis ist rechtwinklig.
Satz des Thales)



Lambacker Schweitzer (1983 - Stuttgart)

27 Der Satz des Thales



Satz: a) Wenn bei einem Dreieck ABC die Ecke C **auf dem Halbkreis über AB** liegt, dann hat das Dreieck **bei C einen rechten Winkel.**
b) Wenn ein Dreieck ABC **bei C einen rechten Winkel** hat, dann liegt **C auf dem Halbkreis über AB**
Kurz: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter

Theorem of Thales—

an angle inscribed in a semi-circle is a right angle

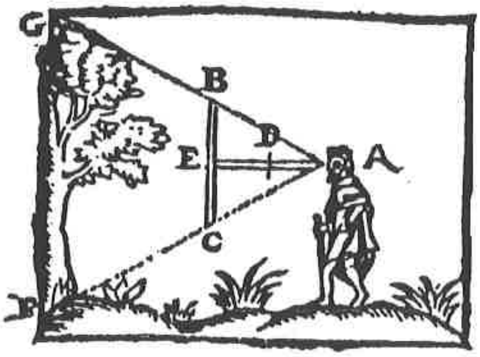
Et, au Brésil...

O ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

ANNEXE 1 - Variæ

Dans "Récréations mathématiques"
(sans nom d'auteur - Rouen 1629).
- maçons et charpentier useront long-temps encore du procédé.

PROBLEME 12.

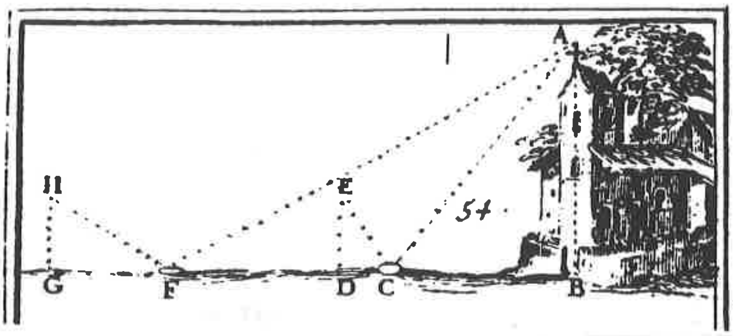


Mesurer la hauteur d'une Tour ou d'vn Arbre, par le moyen de deux petits bastons ou de deux pailles, sans autre formalité.

FAVT auoir deux bastons tellement proportionnez, que EB. soit esgal de DE. & DE. de DA. alors posant le poinct A. proche de l'angle de l'œil, & fermant l'autre, faut se reculer ou s'auancer iusques à ce que les rayons visuels d'escouurent le poinct de hauteur G. & de profondeur ou de racine si c'est vn arbre F. Alors mesurez la distance qu'il y a de vostre pied aupres de l'arbre, & vous aurez la hauteur d'iceluy: ce qui est requis.

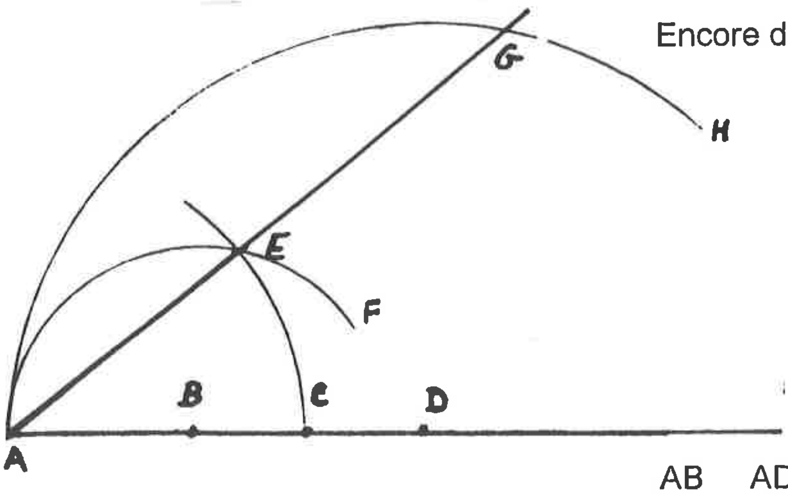
Dans "Récréations mathématiques"
d'OZANAM (1694)

Recreations Mathematiq. Planche 11. Page 198.



- On peut aller à la base B, on place un miroir en C et de E, on vise le reflet de A.
- On ne peut aller en B, on fait une seconde visée avec le miroir en F et du haut du même bâton (HG = ED) déplacé en H.

Encore dans le même ouvrage d'OZANAM



Trouver à trois lignes données une quatriéme proportionnelle.

POur trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatriéme proportionnelle, décrivez des deux extremitez B, D, de la premiere & de la troisiéme ligne donnée, par l'extremité commune A, les deux arcs de Cercle AEF, AGH, & ayant appliqué sur le premier AEF la ligne AE égale à la seconde ligne donnée AC, prolongez cette ligne AE jusqu'à ce qu'elle rencontre le second arc AGH, en quelque point, comme en G, & toute la ligne AG sera la quatriéme proportionnelle qu'on cherche.

$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AG}$ sans qu'apparaisse le mot parallèle...

ANNEXE 2

Sylvestre François LACROIX était chargé de l'enseignement des mathématiques à l'Ecole Centrale des Quatre nations à Paris. Ce cours a donné naissance de 1796 à 1799 à plusieurs ouvrages qui jouèrent un rôle quasi officiel dans les établissements de l'Empire.
Dans le « discours préliminaire » de la 4ème édition (An XIII-1804) des « Elemens de géometrie » figure cette appréciation du rôle de la « Géométrie d'ARNAULD ». Ce témoignage est intéressant car il se situa à l'heure d'un débat début du 19ème siècle.

Après la difficulté que nous venons de remarquer dans la théorie des parallèles, se présente celle qui tient aux rapports incommensurables dans les lignes proportionnelles. Euclide l'éluda en déduisant de la comparaison des aires des triangles, la proposition fondamentale de cette dernière théorie ; mais il est résulté de là, dans l'ouvrage de ce père de la science, une espèce de désordre, dont beaucoup de bons esprits ont été choqués. Arnauld (de Port-Royal), non-seulement s'en est expliqué avec force dans *la Logique, ou l'Art de penser* (4e part. chap. IX), mais il a encore entrepris de corriger ce défaut dans ses *Nouveaux Élémens de Géométrie*, imprimés pour la première fois à Paris, en 1667. Cet ouvrage est, je crois, le premier où l'on a rendu l'ordre des propositions de Géométrie conforme à celui des abstractions, en considérant d'abord les propriétés des lignes, puis celles des surfaces, et enfin celles des corps. Quoiqu'il ne soit pas exempt de reproches, et qu'on puisse en conclure que l'auteur n'étoit pas assez versé dans la Géométrie pour en perfectionner les détails, on n'y sauroit méconnoître les observations et le coup-d'œil d'un esprit supérieur, qui conçoit à la première vue l'ensemble d'un sujet et l'enchaînement de ses parties. L'opinion d'Arnauld paroît d'ailleurs mériter d'autant plus d'attention, qu'il y a lieu de croire qu'elle étoit aussi celle de Pascal.

Ce seroit un travail intéressant pour l'histoire de la science, que de comparer successivement les traités élémentaires qui ont obtenu dans leur temps un succès marqué, et d'en tirer en quelque sorte la chronologie des propositions. On retrouveroit ainsi l'origine de quelques propositions qui ont été oubliées pendant un certain temps, et qui ont reparu depuis comme nouvelles ; on appercevroit même quelquefois des pas rétrogrades, parce que la mode, ou des circonstances particulières dans la position d'un auteur, peuvent, jusqu'à un certain point, donner de la vogue à ses ouvrages, ou les condamner à l'obscurité. Les Elémens de Géométrie fourniroient en ce genre des remarques piquantes, et je ne doute pas que l'on ne distinguât alors ceux d'Arnauld, qui paroissent oubliés aujourd'hui. On y remarqueroit sur-tout l'idée de démontrer immédiatement sur les lignes, que *les parallèles menées par des points pris à égale distance sur les côtés d'un angle, coupent aussi l'autre côté en parties égales*, proposition dont ceux qui ont suivi l'ordre qu'il avoit adopté, ont fait depuis la base de la théorie des lignes proportionnelles. A la vérité la plupart d'entre eux n'ont mis aucune exactitude dans leur raisonnement ; mais s'ils en ont usé ainsi, ce n'est pas qu'il ne fût très-aisé de faire mieux ; car l'évidence n'est pas tellement propre à l'enchaînement établi par Euclide, qu'on n'en puisse trouver un qui soit aussi satisfaisant, et cela en faisant usage des moyens employés par Euclide lui-même.

En effet, s'il prouve la proposition fondamentale de la théorie des lignes proportionnelles en toute rigueur, ce n'est qu'en s'appuyant sur le rapport des parallèlogrammes de même hauteur, dans lequel peut se rencontrer aussi l'incommensurabilité ; et les raisonnemens dont il s'est servi pour démontrer cette dernière proposition, sont près à prouver directement la vérité de l'autre, dans quelque hypothèse que ce soit. Si ces raisonnemens sont bons en eux-mêmes, pourquoi ne pas les répéter dans toutes les circonstances où ils sont applicables ?

ANNEXE 3

"Eléments de géométrie" par LIAGRE - Collection : Encyclopédie populaire dirigée par A. QUETELET (Jamar éditeur - Bruxelles).

Une démonstration complète à la manière d'Archimède.

LIVRE III.

PROPORTION DES LIGNES ET DES FIGURES

41. Si quatre droites A, B, A', B' sont telles que la première, comparée à la seconde, soit avec elle dans le même rapport de grandeur que la troisième comparée à la quatrième, on aura la *proportion*.

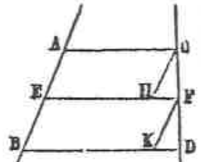
$$A : B = A' : B',$$

et les quatre droites sont dites *proportionnelles*.

La théorie des lignes proportionnelles est d'une importance très-grande et d'un usage continuel en géométrie : elle repose tout entière sur les propositions suivantes.

42. « Les parties interceptées sur deux droites quelconques « par trois parallèles, sont proportionnelles. »

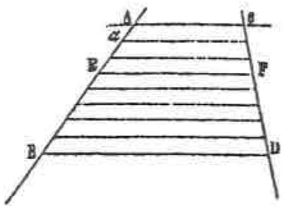
1° Supposons d'abord que les *segments* AE, EB, interceptés



sur la première droite AB, soient égaux : je dis que les segments CF, FD, interceptés sur la seconde droite CD, seront aussi égaux entre eux.

En effet, menons par les points C, F, des parallèles CH, FK à la droite AB : les triangles CHF, FKD seront égaux ; car ils ont CH = FK, comme égaux respectivement aux quantités égales AE, EB ; de plus, les angles C, F sont égaux comme correspondants, et les angles H, K égaux comme ayant leurs côtés parallèles : donc CF = FD.

2° Soient AE, EB inégaux, mais commensurables, et dans le rapport de 3 à 5 par exemple.



Portons la commune mesure A*a*, à partir du point A sur AB : elle sera contenue trois fois dans AE et cinq fois dans EB. Par les points de division, menons des parallèles à AC : la ligne CD se trouvera ainsi partagée en huit parties *égales* (1°), dont trois dans CF et cinq dans FD. On aura donc ces deux proportions :

$$AE : EB = 3 : 5$$
$$CF : FD = 3 : 5$$

d'où

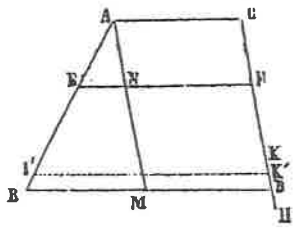
$$AE : EB = CF : FD.$$

3° Enfin, il peut arriver que AE, EB soient incommensurables ; c'est-à-dire, qu'aucune ligne, quelque petite qu'elle soit, ne puisse être contenue un nombre exact de fois dans EB en même temps que dans AE. Dans ce cas, nous allons prouver, par la *réduction à l'absurde*, que le rapport de AE à EB ne peut être ni plus grand ni plus petit que celui de CF à FD. — Ce mode de démonstration, pour le passage du commensurable à l'incommensurable, devant trouver de fréquentes applications dans la suite de cet ouvrage, nous engageons le lecteur à bien s'en pénétrer. Nous serons par là dispensés de répéter plus tard le même raisonnement.

Supposons d'abord que l'on ait :

$$AE : EB = CF : FK, \quad .... (1)$$

le quatrième terme étant plus petit que FD.



Divisons la droite CF en parties égales moindres que KD, et portons ces parties sur FD : il tombera au moins un point de division K' entre K et D ; menons K'I' parallèle à BD. Les segments CF, FK', AE, EI' étant commensurables par construction, on aura (2°) :

$$AE : EI' = CF : FK'. \quad .... (2)$$

Les antécédents des proportions (1) et (2) étant les mêmes, on peut établir une proportion entre leurs conséquents ; donc,

$$EB : EI' = FK : FK',$$

conclusion évidemment absurde, puisque EB > EI', tandis que FK < FK'.

On prouverait, par un raisonnement identique, qu'il est impossible de supposer

$$AE : EB = CF : FH,$$

le quatrième terme étant plus grand que FD. Donc, on doit nécessairement avoir

$$AE : EB = CF : FD.$$

43. « Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle partage « les deux autres côtés en parties proportionnelles. »

Menons AM parallèle à CD (fig. de la proposit. précéd.), nous formerons ainsi un triangle ABM, dans lequel la droite EN est parallèle au côté BM. Nous savons, d'ailleurs, que AN = CF, NM = FD ; la proportion précédente deviendra donc

$$AE : EB = AN : NM.$$

I. Auteur(s)

Henry PLANE – IREM de Dijon

II. Titre(s)

Thalès, quel Théorème ? ou un Centenaire bien français.

III. Caractéristiques de l'édition

Edité par l'IREM de DIJON en mai 1994
Format A4 – 28 pages

IV. Types de documents et supports

Ouvrage papier

V. Matériel utilisé dans l'ouvrage

–

VI. Public visé

Enseignants en mathématiques tous niveaux.

VII. Contenu

On connaît la légende de Thalès, mesurant la hauteur d'une pyramide à l'aide d'un bâton et de son ombre ; mais que faut–il en penser ?
Et depuis quand attribue–t–on notre "Théorème" à Thalès ? Voyage dans le temps, comparaison avec les pratiques actuelles d'autres pays que la France permettront d'y voir plus clair.

MCL :

Histoire des Mathématiques
Géométrie
Théorème de Thalès
Sociologie des Sciences

Prix : 25 F plus frais de port