IREM de DIJON

LA VRAIE THEORIE
DES
QUANTITES NEGATIVES
ET DES
QUANTITES PRETENDUES IMAGINAIRES

par C.V. MOUREY

(Reproduction par les soins de l'IREM DE DIJON (1992))

UNIVERSITE DE BOURGOGNE

I.R.E.M.-B.P. 138 -21004 DIJON Cédex

Dans l'histoire de la représentation des nombres complexes, antérieurement au mémoire de GAUSS (1831), trois ouvrages méritent attention, qui peuvent être lus en français :

- "Essai sur la représentation analytique de la direction" du norvégien WESSEL (1797).
- "Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires" d'ARGAND (1806).
- "La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires" de MOUREY (1828).

L'ouvrage d'Argand a été réédité par la librairie Blanchard (Paris 1971) ; celui de Wessel, dans sa traduction du centenaire faite à la diligence de l'Académie de Copenhague (1897) a été reproduit par l'IREM de Dijon en 1980. Ce même IREM présente aujourd'hui l'essai que Mourey dédiait "aux amis de l'évidence".

La biographie de C. V. MOUREY nous est inconnue. L. de Fourcy dans ses "Leçons d'algèbre" fait référence à Mourey. La "vraie théorie" fut rééditée en 1861. LAISANT la cite dans sa traduction du "traité des équipollences" de BELLAVITIS (1814), WOOD dans "Elements of coordinate geometry" (New York 1879), GUIOT dans son "Calcul Vectoriel" (1912)... Ces ouvrages sont anciens. L'apport de Mourey semble assez oublié maintenant.

Et qu'en dit-il lui même ? *"J'ai trouvé une algèbre émanée de la Géométrie ; c'est une géométrie généralisée et rendue algébrique"* et *"L'algèbre et la géométrie se trouvent fondues dans une même science"*. (Préface).

Figure également dans l'ouvrage (page 76) une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre -*Toute équation a au moins une racine"*-, démonstration qui avait attiré l'attention de LIOUVILLE dans son "Journal" (1839-40).

Il eût été regrettable que les amateurs ne puissent goûter la lecture de ces riches pages.

Henry PLANE
(1991)

TABLE

DES SIGNES OU NOTATIONS

RENVOYANT AUX DÉFINITIONS.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

PRÉFACE.

Entraîné, presque dès l'enfance, dans les méditations analytiques, je ne puis résister plus longtemps au désir de soumettre au jugement des êtres pensants quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu. Ce sont les difficultés que présente la théorie de l'Algèbre, qui ont fait, pendant de longues années, le sujet principal de mes réflexions. Avide de clarté, mon esprit ne pouvait être satisfait de cette science, telle qu'elle a été présentée jusqu'à ce jour. Il a osé entreprendre d'en dévoiler les mystères ; et je ne dois pas craindre de dire qu'il y est parvenu, ou bien l'évidence la plus forte et la plus constante n'est qu'une vaine illusion.

Tous les mathématiciens qui pensent, et qui sont de bonne foi, conviennent que la théorie des quantités négatives est loin d'être satisfaisante. Mais, s'il en est ainsi des quantités simplement négatives, que doit-on dire des imaginaires ? Pour un esprit qui tient à voir clair, n'ont-elles pas quelque chose de repoussant? Quoi! en opérant sur des êtres imaginaires, on obtiendra des résultats réels? La vérité sortira de la région des chimères? Non, la chaîne des vérités n'est point interrompue; le chaos n'en sépare point les deux extrémités. Cherchons, et nous trouverons les anneaux intermédiaires.

— Mais, répondra peut-être un algébriste métaphysicien, ce n'est pas sur des êtres imaginaires que nous opérons; c'est uniquement sur des formules, c'est-à-dire, sur des figures algébriques; et, bien que ces figures n'expriment point de quantités, elles n'en sont pas moins, en elles-mêmes, quelque chose de réel. Ainsi, nous ne faisons pas sortir le réel de l'imaginaire; mais, de formules qui n'expriment rien, nous déduisons des formules qui expriment des quantités. Dans tout cela, il n'y a rien d'absurde, rien de chimérique.

— Certes, on ne m'accusera pas d'avoir affaibli cette réponse, et l'on conviendra peut-être, que si je ne suis pas satisfait de l'Algèbre qui existe, ce n'est pas faute de l'avoir saisie autant qu'elle en est susceptible. La réponse de mon métaphysicien, quoique un peu subtile, est exacte, et je n'ai rien à y opposer; mais elle ne résout pas la difficulté tout entière. J'accorde donc, qu'à l'extrême rigueur, on n'opère pas sur des êtres imaginaires; mais il reste une difficulté qui est grande pour tout esprit exact : c'est qu'on applique à des figures qui n'expriment rien, des transformations, des règles et des équations qui n'ont été démontrées que pour les formules qui expriment des quantités. On n'a pas encore fait voir, par le raisonnement, que cette application soit légitime. Ce qu'on a dit de mieux à cet égard, c'est qu'on n'a pas découvert jusqu'ici, qu'elle ait conduit à de faux résultats. C'est là, sans doute, une forte présomption en sa faveur, mais ce n'est pas de l'évidence. On doit convenir que la science serait beaucoup plus satisfaisante, si l'on pouvait en baser toutes les parties sur des raisonnements rigoureux, sur une évidence du premier ordre, sur des idées simples, palpables, comme celles des éléments de Géométrie. Eh bien, c'est là le but que je me suis proposé, et que je crois avoir atteint.

Non-seulement j'ai atteint ce but, mais j'ai rencontré, en même temps, un autre résultat qui n'est peut-être pas moins précieux; avec un nouveau système d'Algèbre, que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de Géométrie, auquel je ne m'attendais pas. Ce ne sont cependant pas deux sciences; ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle a deux faces, l'une algébrique, et l'autre géométrique. C'est une

Algèbre émanée de la Géométrie; c'est une Géométrie généralisée et rendue algébrique.

L'idée fondamentale de cette théorie est celle du chemin, considéré comme conduisant en un seul sens. Sur toute ligne on peut concevoir deux chemins conduisant en sens opposés, l'un de A en B, par exemple, et l'autre de B en A. Pour que deux chemins soient égaux, en tant que chemins, il ne suffit pas qu'ils aient même longueur, il faut aussi qu'ils aient même direction. De sorte que tous les rayons d'un même cercle, considérés comme conduisant du centre à la circonférence, sont des chemins inégaux. L'expression algébrique (ou même arithmétique) d'un chemin en déterminera la direction, relativement à un autre chemin pris pour terme de comparaison, ou, si l'on veut, pour unité. D'après ce système, toutes les racines des équations sont des chemins réels, toutes les formules usitées en Algèbre expriment des chemins réels situés sur un même plan ; toutes les racines de l'unité, en particulier, sont tous les rayons d'un même cercle.

Au moyen de cette méthode, nous pourrons enfin démontrer que *toute équation a au moins une racine;* proposition qui était restée jusqu'ici sans démonstration, et qu'on était forcé d'admettre gratuitement dans les éléments d'Algèbre. La démonstration, qui est élémentaire, et qui

me paraît très-rigoureuse, est tellement générale, qu'elle embrasse même le cas où les coefficients sont ce qu'on appelle imaginaires.

L'Algèbre et la Géométrie se trouvent, comme on le voit, fondues dans une même science; d'où il résulte que les principes de la Géométrie acquièrent un nouveau degré de généralité, et que l'évidence géométrique éclate sur tous les points de l'Algèbre. Soit sous le rapport algébrique, soit sous le rapport géométrique, on découvre des champs aussi vastes que nouveaux, et l'on trouve des instruments puissants pour en faire l'exploitation. Dans l'application à la Mécanique, on ne rencontrera pas de moindres avantages; il semble même que ce soit spécialement pour cette partie que soit fait le système dont il s'agit.

Pour développer complétement cette théorie, il faudrait refaire toutes les branches des Mathématiques. Jusqu'ici je n'ai pu m'occuper, comme on le pense bien, que des principes fondamentaux, et cependant j'ai composé un manuscrit assez considérable. Mais, les circonstances ne me permettant pas de faire imprimer actuellement un ouvrage aussi volumineux, j'ai pris le parti de publier d'abord cet opuscule, qui n'en est qu'un faible abrégé. Dans un cadre aussi rétréci, serai-je assez heureux pour mettre en évidence, et sans les défigurer, au moins les objets principaux? Je réclame à cet égard, non-seulement l'indulgence du lecteur, mais, pour ainsi dire, sa coopération; je ne puis espérer quelque succès qu'autant qu'il voudra bien m'aider par ses propres réflexions, et par un peu de zèle pour le triomphe de la vérité. Le système que je propose est tout neuf; il rencontrera des ennemis nombreux et puissants : des idées qui règnent depuis des siècles, des habitudes invétérées, des espèces de droits acquis.... Sans doute il finira tôt ou tard par triompher, comme doit le faire tout ce qui est bon et vrai; mais est-il réservé à son auteur de jouir de ce triomphe?

TABLE DES MATIÈRES.

LA VRAIE THÉORIE

DES

QUANTITÉS NÉGATIVES

ET DES

QUANTITÉS PRÉTENDUES IMAGINAIRES.

INTRODUCTION.

Source des difficultés de l'Algèbre.

1. Pour exprimer la différence de deux quantités, on place la plus petite à droite de la plus grande, en les séparant par le signe —; $6 - 4$.

On aurait une expression absurde, si l'on plaçait la plus grande à droite de la plus petite; ainsi la formule $4 - 6$ est absurde.

Il suit de là qu'il est impossible d'exprimer la différence par le moyen du signe —, lorsque l'un des termes est inconnu ou arbitraire. Soit x un terme inconnu ou arbitraire : on ne peut pas écrire $a - x$, parce qu'on ne sait pas si x n'est pas plus grand que a; on ne peut pas davantage poser $x - a$, parce qu'on ne sait pas si x n'est pas plus petit que a.

Il suit de là que le signe —, considéré comme exprimant la soustraction, ne peut pas être admis en Algèbre. L'Algèbre, étant censée ne s'occuper que de quantités inconnues ou arbitraires, ne peut point admettre de soustraction.

Il faut donc trouver le moyen d'exprimer la différence de deux quantités, sans recourir à la soustraction; autrement l'Algèbre resterait imparfaite. C'est à quoi tendent les observations suivantes.

Moyen de suppléer à la soustraction.

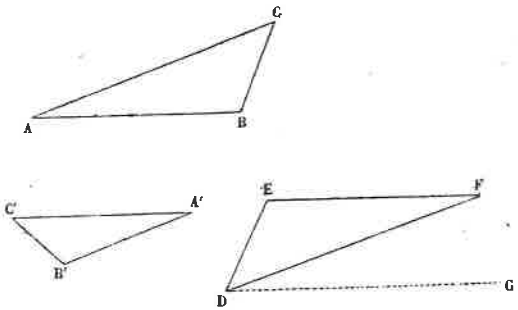
2. Si un voyageur, ou un mobile quelconque, partant du point A, va d'abord au point B (*fig.* 1, 2, 3 et 4),

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.



et que du point B il aille ensuite en C, il sera aussi

avancé que s'il fût allé directement de A en C, ni plus ni moins; donc,

voyage de A *en* B + *voyage de* B *en* C *est équivalent à voyage de* A *en* C;

ou, pour abréger,

$$AB + BC = AC.$$

Ainsi, dans les figures 2 et 3, le voyage AC, qui est à proprement parler la différence des deux voyages AB, BC, peut être considéré comme la somme *réduite* de ces deux voyages. On peut donc faire, par exemple,

6 lieues au sud + 4 li. au nord = 2 li. au sud,
4 li. sud + 6 li. nord = 2 li. nord.

Donc,

6 li. sud — 4 li. sud = 6 li. sud + 4 li. nord,
6 li. nord — 4 li. nord = 6 li. nord + 4 li. sud.

Ainsi, par rapport aux voyages, la soustraction peut être remplacée par une addition. Au lieu de retrancher, par exemple, 4 li. sud, on ajoutera 4 li. *nord*. En général, au lieu de retrancher un voyage, on en ajoutera *l'inverse*.

On peut exprimer la différence de deux longueurs, quoiqu'elles soient inconnues ou arbitraires. Soient a, b ces deux longueurs, et soit d la différence. Si a est $> b$, on aura

$$a \text{ sud} + b \text{ nord} = d \text{ sud} :$$

si a est $< b$, on aura

$$a \text{ sud} + b \text{ nord} = d \text{ nord} ;$$

donc, dans l'un et l'autre cas,

$$a \text{ sud} + b \text{ nord} = d \text{ sud ou nord}.$$

Si donc on fait

$$a \text{ sud} + b \text{ nord} = d',$$

d' sera un voyage d'une longueur égale à d, c'est-à-dire égale à la différence entre a et b; donc, la différence entre a et b peut toujours s'exprimer par une formule de la nature de

$$a \text{ sud} + b \text{ nord}.$$

3. La difficulté que présentait la soustraction est donc complétement vaincue, par rapport aux quantités linéaires. Pour la résoudre par rapport aux autres espèces de quantités, nous n'aurons qu'à représenter toutes les quantités par des lignes, en regardant ces lignes elles-mêmes comme exprimant des voyages. Cette représentation ne coûtera rien dans la pratique; on ne peut pas soumettre les quantités aux opérations des calculs, sans les représenter par des nombres abstraits; il suffira donc de regarder les nombres abstraits comme des chemins. Nous ne tarderons pas à donner un peu plus de développement à cette idée.

DÉVELOPPEMENT.

4. Nous appellerons *ligne directive* ou *chemin*, la ligne considérée comme représentant un voyage, c'est-à-dire comme conduisant dans un seul sens. Il est bon de concevoir le chemin comme fluant, et indiquant par son flux le sens dans lequel il conduit.

Pour désigner le chemin qui conduit de A en B, nous dirons simplement AB; et pour désigner celui qui conduit de B en A, nous dirons BA. Ces deux notations AB, BA indiquent donc deux chemins différents, ou deux lignes directives différentes, quoiqu'elles n'expriment qu'une même ligne non directive.

Des deux extrémités d'un chemin, l'une est le point de départ, ou l'*origine;* l'autre est le point d'arrivée, ou le *terme*. Dans AB, par exemple, l'origine est A, et le terme est B; dans BA, au contraire, l'origine est B, et le terme est A. La droite et la gauche d'un chemin sont la droite et la gauche du spectateur qui, placé à l'origine, regarde le terme.

Les quantités se diviseront donc en directives et non directives. Nous diviserons de même la science des Mathématiques, ainsi que chacune de ses branches, l'Algèbre, la Géométrie, etc. Les Mathématiques directives seront celles qui traiteront des quantités directives; et les Mathématiques non directives seront.... Ce sont donc les Mathématiques directives qui sont le sujet de ce petit ouvrage.

Addition.

5. Nous dirons que deux chemins sont *de suite*, si le terme de l'un est l'origine de l'autre. Ainsi, dans les figures 1, 2, 3 et 4, les deux chemins AB et BC sont de suite, parce que le terme B du premier, est l'origine du second.

L'équation

$$AB + BC = AC$$

sera notre principe fondamental.

Il ne faut pas s'amuser à discuter sur la rigueur de ce principe; pour tirer au court, il faut le regarder comme une convention à admettre. On doit admettre cette convention, si elle est utile : or, elle est de la plus grande utilité, puisqu'elle seule peut nous fournir le moyen de suppléer, en Algèbre, à la soustraction. Donc,

La *somme* de deux chemins de suite est le chemin simple qui conduit de l'origine du premier au terme du second; plus simplement, c'est le chemin qui a même origine que le premier, et même terme que le second.

6. Trois lettres P, Q, R désignant trois points quelconques, on peut faire l'addition des deux chemins PQ, QR, sans voir la figure. En effet, de quelque manière que ces trois points puissent être situés, les deux chemins PQ, QR sont de suite, puisque le terme Q du premier est l'origine du second; donc leur somme est le chemin PR, qui a même origine P que le premier, et même terme R que le second.

Mais non-seulement on peut faire de cette manière l'addition de PQ avec QR, on peut tout aussi bien faire celle de PR avec RQ, celle de QR avec RP, etc. En un mot, trois points quelconques P, Q, R donnent de suite 6 équations :

$$PQ + QR = PR, \qquad PR + RQ = PQ,$$
$$QP + PR = QR, \qquad QR + RP = QP,$$
$$RP + PQ = RQ, \qquad RQ + QP = RP.$$

7. Plusieurs chemins sont de suite, si le terme du premier est l'origine du second; le terme du second, l'origine du troisième; le terme du troisième, l'origine du quatrième; et ainsi de suite. Tels sont les chemins,

AB, BC, CD, DE, EF, etc. (sans figure).

Ces chemins donneront successivement,

$$AB + BC = AC : \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$AC + CD = AD;$$

d'où

$$AB + BC + CD = AD : \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$AD + DE = AE;$$

d'où

$$AB + BC + CD + DE = AE : \ldots\ldots \quad (3)$$
$$AE + EF = AF;$$

d'où

$$AB + BC + CD + DE + EF = AF : \ldots \quad (4)$$

et ainsi de suite.

Ces équations (1), (2), (3) et (4), font voir qu'en général, la somme de plusieurs chemins de suite est le chemin simple qui a même origine que le premier et même terme que le dernier.

Égalité.

8. L'égalité n'est pas une relation aussi absolue qu'on pourrait le penser au premier abord. Deux choses sont égales ***pour tel emploi***, si, étant substituées l'une à l'autre dans cet emploi, elles produisent un même effet. Ainsi, deux choses peuvent être en même temps égales et inégales; égales pour un emploi, et inégales pour un autre. Par exemple, deux pièces de monnaie, de même diamètre, même épaisseur et même forme sont égales pour remplir un espace donné; mais il ne s'ensuit pas qu'elles soient égales pour payer la valeur d'un objet donné.

Pour que deux lignes non directives soient égales, il suffit qu'elles aient même longueur; mais cela ne suffit pas pour que deux chemins soient égaux : il faut en outre qu'ils aient même direction. Car si deux chemins de même longueur et de directions différentes ont même origine, ils conduiront le voyageur d'un même point en deux points différents; donc, étant substitués l'un à l'autre, ils ne produiront pas le même effet; donc ils ne peuvent pas être réputés égaux en tant que chemins.

Pour que deux chemins aient même direction, il n'est pas nécessaire qu'ils soient situés sur une même droite; il suffit qu'ils soient parallèles et qu'ils conduisent dans le même sens.

Pour exprimer que deux chemins ont même direction, nous dirons qu'ils sont *concurrents*.

Pour exprimer que deux chemins ont des directions opposées, nous dirons qu'ils sont *opposés*.

Donc, pour que deux chemins soient égaux, il faut et il suffit qu'ils soient concurrents et qu'ils aient même longueur.

Pour exprimer que deux chemins sont opposés et qu'ils ont même longueur, nous dirons qu'ils sont *inverses*.

Deux chemins parallèles, et non situés sur une même ligne, sont concurrents, si la droite qui joint leurs deux origines ne se croise pas avec celle qui joint leurs deux termes.

Deux chemins parallèles, et non situés sur une même ligne, sont opposés, si la ligne qui joint leurs deux origines se croise avec celle qui joint leurs deux termes.

Addition.

9. Proposons-nous maintenant de faire l'addition de deux chemins qui ne sont pas de suite. Soient les deux chemins AB, DE (*fig.* 1, 2, 3 et 4). Du terme B de l'un, traçons un chemin BC qui ait même direction et même longueur que l'autre. Les chemins AB et BC étant de suite, il est facile de trouver leur somme; elle est AC. Nous regarderons donc AC comme la somme de AB + DE; car si DE est égal à BC, il est tout naturel de regarder la somme de AB + DE comme égale à la somme de AB + BC.

Le résultat AC que nous venons de trouver, est la

somme de AB + DE. Si l'on voulait trouver la somme de DE + AB, il faudrait, du terme E de DE, tracer un chemin EF égal à AB, et prendre DF pour somme.

10. On peut démontrer que cette seconde somme DF sera égale à la première AC (c'est-à-dire qu'elle aura même longueur et même direction que celle-ci). Par rapport aux figures 1, 2 et 3, la proposition est trop évidente pour que je doive m'y arrêter; je me bornerai donc à la démontrer pour le cas représenté par la figure 4, c'est-à-dire pour le cas où les deux chemins donnés AB et DE ne sont pas parallèles.

Si l'on observe que EF est opposé à BA, et ED à BC, on verra que les deux angles E et B ont leurs côtés parallèles, et leurs ouvertures tournées en sens opposés; d'où il résulte qu'ils sont égaux. Donc les deux triangles ABC, DEF sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc les deux côtés AC et DF ont des longueurs égales. De l'égalité de ces triangles, il résulte encore que les angles A et F, C et D sont égaux. Les chemins AC, FD sont opposés, puisqu'ils forment des angles égaux avec les chemins opposés AB, FE. Donc les chemins AC et DF sont concurrents; donc ces deux chemins AC et DF sont égaux dans ce troisième cas, comme dans les deux premiers; donc, dans tous les cas,

$$AB + DE = DE + AB.$$

11. Si à un chemin AB on ajoute successivement plusieurs chemins, on obtiendra le même résultat définitif que si au même chemin AB on ajoute la somme de tous les autres. J'entends que, par exemple,

$$AB + BC + CD + DE = AB + (BC + CD + DE).$$

1..

En effet, le deuxième membre de cette équation est égal à

$$AB + BE = AE:$$

or, le premier est aussi égal à AE; donc, etc.

12. La somme de plusieurs chemins est la même dans quelque ordre qu'on fasse l'addition. (Je ne m'arrêterai pas à donner ici la démonstration; j'observerai seulement que cette proposition se déduit des deux précédentes.)

Inverse. Signe —.

13. La somme de deux chemins inverses est zéro. Car,

$$AB + BA = AA:$$

or, AA n'est qu'un point; c'est zéro de chemin; donc,

$$AB + BA = 0.$$

D'où

$$AB + \textit{inverse}\ AB = 0;$$

d'où

$$AB + \textit{inverse}\ AB = AB - AB \ldots\ldots \qquad (1)$$

Mais nous avons démontré que le signe —, considéré comme exprimant la soustraction, ne peut pas être admis en Algèbre (n° 1); il est donc convenable de lui donner quelque autre interprétation, afin de l'utiliser. L'équation ci-dessus (1) nous en fournit le moyen; nous n'avons qu'à admettre que ce signe — signifiera + *inverse*. Ou bien encore, nous pouvons admettre que — signifiera simplement *inverse*, et nous écrirons $AB + - AB = 0$. Nous emploierons tantôt l'une et tantôt l'autre de ces deux interprétations; mais, dans l'un et l'autre cas, l'énoncé sera le même, *plus inverse*.

14. Il est évident que l'inverse de l'inverse de AB, étant l'inverse de BA, est AB lui-même; donc

$$- - AB = - BA = AB.$$

Ainsi, la réunion de deux signes — est nulle, et doit être supprimée.

Nombre directif.

15. On éprouvera peut-être quelque difficulté à lier les idées de direction et d'opposition à celles de nombre et d'unité; mais rappelons-nous qu'autrefois nous en avons autant éprouvé pour concevoir un nombre fractionnaire. Ces difficultés disparaissent également lorsqu'on avoue franchement que les nombres directifs, ainsi que les fractionnaires, ne sont pas des nombres proprement dits. Tâchons de nous former sur tout cela des idées bien claires.

L'unité *absolue* est un objet simple et indivisible; tel est le point mathématique. Le nombre absolu est une collection d'unités absolues, ou au moins une unité absolue. Ainsi le nombre absolu ne peut être ni fractionnaire ni directif. Mais, par abus, on a appelé *nombres* les quantités mesurées et exprimées en nombres; et conséquemment on a appelé *unités* les quantités prises pour mesures, et qui se trouvent représentées par des unités absolues. La mesure peut s'appeler unité *relative*, et la quantité mesurée, nombre *relatif*.

Lorsqu'il s'agit d'exprimer les chemins en nombres, c'est-à-dire de les rapporter à une mesure, il ne suffit pas de déterminer la longueur de cette mesure ou de cette unité, il faut aussi en déterminer la direction.

Si l'unité est, par exemple, un mètre conduisant de gauche à droite, les chiffres 1, 2, 3, etc., représenteront 1 *mètre à droite,* 2 *mètres à droite,* 3 *mètres à droite,* etc. Donc les quantités 1 *mètre à gauche*, 2 *mètres à gauche,* 3 *mètres à gauche,* etc., qui seront respectivement égales à — 1 *mètre à droite,* — 2 *mètres à droite,* — 3 *mètres à droite,* etc., pourront être représentées par les formules — 1, — 2, — 3, etc. (n° **13**).

Le nombre relatif est dit *concret* lorsqu'on en spécifie l'unité, et *abstrait* dans le cas contraire. Ainsi, dans l'hypothèse précédente, les formules 1, 2, 3,... — 1, — 2, — 3,... représentent des nombres abstraits. On conçoit donc que le nombre abstrait peut être un chemin, comme toute autre quantité.

Je viens de présenter le nombre abstrait comme ayant une unité déterminée par une condition; mais souvent elle est totalement arbitraire. Elle est même toujours censée arbitraire, car toute proposition relative aux nombres abstraits est indépendante de l'unité. Cette équation, par exemple, $2 + 3 = 5$, sera vraie, quelle que soit la quantité représentée par 1. On peut donc regarder les nombres abstraits comme des quantités rapportées à une unité arbitraire.

Afin de pouvoir appliquer aux nombres abstraits la théorie des chemins, il nous faut considérer l'unité abstraite comme un chemin d'une longueur et d'une direction déterminées arbitrairement.

Il est important d'observer que toutes les propositions relatives aux nombres abstraits supposent qu'ils soient tous rapportés à une même unité.

Positif et négatif.

16. De ces idées résultent d'abord deux espèces de nombres : 1° ceux qui ont même direction que l'unité, et 2° ceux qui ont une direction opposée à l'unité. Les premiers sont représentés simplement par les chiffres

1, 2, 3, etc.; les derniers, par les chiffres affectés du signe —; — 1, — 2, — 3, etc. Il serait fort à désirer que l'on désignât ces deux espèces de nombres par des dénominations qui répondissent à des idées si simples et si justes; je serais tenté d'appeler les premiers *commétriques*, et les derniers *antimétriques;* mais s'il faut obéir à la routine, servons-nous des mots *positif* et *négatif*. Nous nous souviendrons donc que le nombre dit positif est celui qui a même direction que l'unité, et que le nombre dit négatif est celui qui a une direction opposée à l'unité.

De ces définitions résultent plusieurs conséquences qu'il est important de signaler dans l'enseignement, pour préserver les élèves des fausses idées que présentent naturellement les mots *positif* et *négatif*, ainsi que le signe —, lorsqu'on l'énonce par le mot *moins*.

1° Il n'y a que les chemins et les mouvements, en un mot, il n'y a que les quantités susceptibles de conduire en deux sens opposés qui puissent être positives ou négatives.

2° Une quantité, même directive, n'est ni positive ni négative tant qu'on ne la rapporte pas à une unité d'une direction déterminée. (L'unité abstraite elle-même est censée avoir une direction déterminée.)

3° La même quantité directive sera positive ou négative à notre gré, selon qu'il nous plaira de prendre l'unité dans un sens ou dans l'autre.

4° Toute quantité négative est aussi grande que son inverse positive.

5° Les quantités négatives sont tout aussi réelles et aussi palpables que les positives.

6° Les quantités négatives ne sont point les résultats de soustractions impossibles.

7° Elles ne sont, pas plus que les positives, les résultats de soustractions renversées. Dans $2 + - 6 = - 4$, le résultat -4 est le résultat d'une soustraction; mais dans $-2+6=4$, le résultat 4 est pareillement le résultat d'une soustraction. Ces deux soustractions ne sont pas plus renversées l'une que l'autre; elles sont l'une et l'autre directes, puisque dans l'une et l'autre on retranche la plus petite quantité de la plus grande.

17. *Remarques.* 1° On emploie le signe + par opposition au signe — (inverse). Ainsi, l'on écrit $+a$, $+4$, pour a, 4. Le signe + employé de cette manière, n'exprime point d'addition; il signifie *non inverse*, ou si l'on veut *directe*. Mais l'énoncé de ce signe ne tire pas à conséquence comme celui du signe —.

2° Lorsque le signe — affecte un chiffre, on peut l'énoncer par le mot *négatif;* car -4, par exemple, est un nombre négatif. Dans le même cas, le signe + peut s'énoncer par *positif.*

3° Il n'en est pas de même devant une lettre. On peut représenter un nombre négatif par b, par exemple; or, dans cette hypothèse, $+b$ sera négatif, et $-b$, positif. Ainsi, lorsque le signe — affecte une lettre, il ne peut être énoncé que par le mot *inverse.*

Addition.

18. D'après les idées que nous venons de développer, l'addition des nombres négatifs ne peut offrir aucune difficulté. Il est clair qu'on doit opérer comme il suit :

$$6+-4=\ 6 \text{ moins } 4=2\ (*),$$
$$-4+\ 6=\ 6 \text{ moins } 4=2;$$
$$-6+\ 4=-\ 6 \text{ moins } -4=-2,$$
$$4+-6=-\ 6 \text{ moins } -4=-2,$$
$$-6+-4=-10.$$

(*) Je proposerai d'exprimer par *moins* $\dot{-}$; mais je ne ferai aucun usage de ce signe.

Puis,

$$4-6=4+-6=-2 \text{ (n° 13)},$$
$$-6-4=-6+-4=-10.$$

Puis,

$$6--4=6+--4=6+4=10 \text{ (n° 14)},$$
$$-6--4=-6+--4=-6+4=-2.$$

Discussion sur les signes >, <.

19. On a successivement

$$3-1<3-0, \quad \text{ou} \quad 2<3,$$
$$3-2<3-1, \quad \text{ou} \quad 1<2,$$
$$3-3<3-2, \quad \text{ou} \quad 0<1,$$

par analogie, il y a des algébristes qui font

$$3-4<3-3, \quad \text{ou} \quad -1<0,$$
$$3-5<3-4, \quad \text{ou} \quad -2<-1,$$

et ainsi de suite.

On pourrait sans doute modifier l'interprétation du signe <, de manière à légitimer cette manière de l'employer. Il suffirait, par exemple, de l'énoncer par les mots *à gauche de*, *au-dessous de*, etc. Mais je suis convaincu qu'il est beaucoup plus avantageux, dans la pratique, de laisser à ce signe, ainsi qu'à son inverse >, leurs significations naturelles *plus petit que*, *plus grand que*, et de faire

$$-1>0,\ -2>-1,\ -3>-2, \text{ etc.}$$

Sans doute, de -1 à 0 il y a une relation qui se trouve aussi de 0 à $+1$; mais nous exprimerons cette relation comme il suit :

$$+1=0+\text{positif}, \quad 0=-1+\text{positif}.$$

Ainsi,

$$3 = 2 + \text{pos.},\quad 2 = 1 + \text{pos.},\quad 1 = 0 + \text{pos.},$$
$$0 = -1 + \text{pos.},\quad -1 = -2 + \text{pos.},$$
$$-2 = -3 + \text{pos.}, \ldots$$

et.

$$-3 = -2 + \text{nég.},\quad -2 = -1 + \text{nég.},$$
$$-1 = 0 + \text{nég.},$$
$$0 = +1 + \text{nég.},\quad +1 = +2 + \text{nég.},$$
$$+2 = +3 + \text{nég.} \ldots$$

On peut exprimer *pos.* par $+$, et *nég.* par $-$: $-1 = 0 + -$, $0 = -1 + +$, etc.

---

20. Il est peut-être temps de donner quelques développements à l'idée que j'ai indiquée dans le n° 3, sur l'art d'appliquer la théorie actuelle aux quantités de toutes espèces.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de calculer les variations que doit subir la fortune d'un individu, que nous appellerons Pierre. Soit 3000 francs la fortune actuelle de Pierre; nous imaginerons un mobile T, qui ait parcouru un chemin AB = à 3000 unités abstraites (n° 15), et ce chemin AB sera le représentant de la fortune actuelle de Pierre. Établissons que T sera assujetti, par la suite, à parcourir autant d'unités positives que Pierre gagnera de francs, et autant d'unités négatives que Pierre perdra de francs: il résultera que le nombre des unités contenues de A à T, sera constamment l'expression exacte de la fortune de Pierre.

Cette conclusion serait encore vraie s'il arrivait que

Pierre vînt à perdre plus qu'il n'a, de sorte qu'il ne lui restât que des dettes. Pierre avait 3000 francs, et il a perdu 4000 francs; d'où il suit qu'il n'a plus rien, et qu'il doit 1000 francs; eh bien, le chemin AT était 3000, T a parcouru -4000; donc AT est maintenant $=$ à $3000 + -4000 = -1000$; donc la dette de 1000 francs se trouve représentée par le chemin AT, qui est égal à -1000; ce qui est exact. Donc, en toute circonstance, pour découvrir ce que sera la fortune de Pierre, il suffira de calculer quelle sera la longueur et la direction du chemin AT.

Je suppose que, dans une circonstance désignée, le mobile T se soit trouvé en un point B, et qu'on veuille découvrir combien Pierre a gagné ou perdu depuis cette circonstance; il suffira de calculer la longueur et la direction actuelle de BT.

Exemple. Depuis que T était en B, Pierre a successivement

gagné 300 fr., perdu 700 fr., et gagné 100 fr.;

combien a-t-il gagné ou perdu, en définitive, depuis cette époque?

Traduisez : Depuis que T était en B, il a parcouru successivement

$$+300,\quad -700 \quad\text{et}\quad +100;$$

quel est actuellement le chemin BT?

Réponse. Actuellement,

$$BT = 300 - 700 + 100 = -300.$$

Donc, depuis que T était en B, Pierre a perdu 300 fr.

On peut dire aussi que Pierre a gagné -300 fr.

(*l'inverse de* 300 fr.); ce qui signifie qu'il a produit ou souffert un effet inverse de 300 fr. de gain.

Le mobile T représente le terme de la fortune de Pierre. Par abréviation, on peut l'appeler *terme* de cette fortune.

En général, pour calculer les variations d'une quantité, il suffit de calculer les mouvements du représentant de son terme.

Une quantité non directive peut croître ou diminuer; elle ne peut pas subir une troisième espèce de mutations; donc le représentant du terme d'une quantité ne peut se mouvoir qu'en deux sens opposés, le positif et le négatif. Donc si l'on trouvait que le terme d'une quantité (autre qu'un chemin, un voyage, etc.) eût parcouru un chemin non parallèle à l'unité, il faudrait conclure que le problème qui aurait conduit à un tel résultat serait absurde.

Cette observation n'empêche pas que, dans la résolution d'un problème quelconque, on ne puisse faire intervenir, comme auxiliaires, des nombres de toutes directions.

Du temps.

Quant au temps en particulier, rien n'est plus naturel que de le représenter par une ligne infinie, dont une partie soit derrière nous et l'autre devant. Chaque point de cette ligne représente un instant; mais, par extension, l'on peut donner le nom d'*instants* à ces points. Voyager sur cette ligne en avançant, c'est pour ainsi dire voyager dans le temps, du présent au futur, ou du passé au présent. Voyager en reculant, c'est aller du futur au présent, ou du présent au passé. D'après cela, le calcul des temps ne sera absolument qu'un calcul de chemins. Pour calculer la distance d'une époque à une autre, on calculera le chemin qui

conduit du représentant de la première au représentant de la seconde. La direction de ce chemin fera connaître si la seconde époque est postérieure ou antérieure à la première. Si la direction qui conduit en avant est prise pour positive, celle qui conduit en arrière sera négative. Supposons que l'unité représente une année; si l'on trouve que de l'époque A à l'époque B le chemin est $+20$, on conclura que l'époque B est de 20 ans postérieure à A : et si l'on trouve au contraire que le chemin AB est -20, on conclura que B est de 20 années antérieure à A.

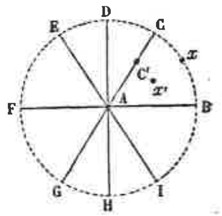
Soient A, B, C trois époques quelconques, on aura les équations (n° 6)

$$AB + BC = AC, \quad AC + CB = AB, \text{ etc. } (^*).$$

Angle directif. Verseur. a_r.

21. Appelons *r* l'angle compris entre AB et AC (*fig.* 5); les deux chemins AB, AC, ayant même ori-

Fig. 5.



gine et même longueur, AB deviendrait AC, si on le faisait tourner sur son origine A, de droite à gauche, en lui faisant décrire l'angle *r*. Pour dire *faire tourner*, nous dirons *verser*. Ainsi *verser* AB *de r*, ou *par r*,

(*) *Voyez* le Supplément, à la fin du volume.

c'est faire tourner AB sur son origine, de manière à lui faire décrire l'angle r : donc

AB *versé* par $r =$ AC.

C'est ce que nous exprimerons ainsi :

$$AB_r = AC;$$

lisez, par abréviation, AB *verse* $r =$ AC.

L'angle r est alors le *verseur* de AB, et le *rapport directeur* de AC à AB. Le rapport directeur de AC à AB est donc l'angle qui conduit de AB en AC.

L'angle considéré comme verseur, ou comme rapport directeur, est donc une espèce de chemin conduisant d'une direction à une autre; en un mot, c'est un *angle directif*.

Sur un plan donné, l'angle directif est susceptible de conduire en deux sens opposés; de droite à gauche ou de gauche à droite, comme un chemin sur une ligne donnée. Il faut donc considérer l'angle directif comme fluant circulairement de droite à gauche, ou de gauche à droite (par rapport au spectateur qui est placé au sommet).

Remarquez qu'il y a deux angles qui conduisent de AB en AC; l'un tournant de droite à gauche, et mesuré par le petit arc BxC : l'autre tournant de gauche à droite, et mesuré par le grand arc BHFDC. Outre ces deux angles directifs, il y en a deux autres, compris entre les mêmes chemins, et conduisant de AC en AB; l'un tournant de gauche à droite, et mesuré par le petit arc CxB, l'autre tournant de droite à gauche, et mesuré par le grand arc CDFHB.

L'angle directif conduit de l'un de ses côtés à l'autre; or, le côté d'où il conduit est son *origine*, et le côté où il conduit est son *terme*. L'origine de l'angle est le ***côté dirigeant***, le terme est le ***côté dirigé***.

Indication de l'angle.

22. La manière dont on indique ordinairement les angles en Géométrie, ne peut pas être employée ici : car elle ne laisse aucun moyen pour distinguer les quatre angles directifs qui sont formés par deux chemins de même origine. Pour exprimer un angle directif, il faut au moins quatre lettres : la 1re est celle du sommet, la 2e répond au côté dirigeant, la dernière répond au côté dirigé; et entre la 2e et la dernière, il faut placer une ou plusieurs lettres servant à indiquer dans quel sens l'angle tourne. Ainsi les quatre angles directifs, formés par AB et AC, s'exprimeront comme il suit :

ABxC,	ABJHFDC,
ACxB,	ACDFHB.

Il n'est pas absolument nécessaire que les lettres qui suivent celle du sommet expriment l'arc qui mesure l'angle; ainsi l'angle ABxC peut aussi bien s'exprimer par ABx'C'.

23. Comme nous prendrons ordinairement les angles directifs de droite à gauche, nous pouvons convenir que tout angle directif qui ne sera exprimé que par trois lettres, tournera de droite à gauche; ainsi ABC signifiera ABxC, et ACB désignera ACDFHB. D'après cette convention, il n'y aura que les angles tournant de gauche à droite qui exigeront plus de trois lettres.

Angle directif exprimé en nombres. Unité de l'angle directif. Angle positif et négatif.

24. Pour exprimer en nombres les angles directifs, il faut en déterminer l'unité par une convention. Nous

prendrons pour unité l'angle droit fluant de droite à gauche. Ainsi

$$ABD = 1; \quad \text{et} \quad AD = AB_1.$$
$$ABDF = 2; \quad \text{et} \quad AF = AB_2.$$
$$ABDFH = 3; \quad \text{et} \quad AH = AB_3.$$

Puis, $ABJH = -1$; d'où, $AH = AB_{-1}$.
$ABHF = -2$; d'où, $AF = AB_{-2}$.
$ABHFD = -3$; d'où, $AD = AB_{-3}$.

Ainsi, $AB_{-1} = AB_3 = -AB_1$.
$AB_{-3} = AB_1 = -AB_3$.
$AB_{-2} = AB_2 = -AB$.

Il est évident que

$$AB = AB_0 = AB_4 = AB_{-4}.$$

Si $ABC = \frac{2}{3}\ (= 60^\circ)$, on fera

$$AC = AB_{\frac{2}{3}}.$$

Si $ABDE = 1\frac{1}{3}\ (= 120^\circ)$, on fera

$$AE = AB_{1\frac{1}{3}}.$$

Et ainsi des autres.

25. Si l'on a les deux équations

$$AE = AC_s, \quad AC = AB_r,$$

d'où il résulte d'abord,

$$AE = (AB_r)_s,$$

on déduira

$$AE = AB_{r+s}.$$

Car il est évident que

$$\textit{angle}\ ABC + ACE = ABE;$$

donc, si $ABC = r$, et $ACE = s$,

il suit $ABE = r + s$;

d'où, $AE = AB_{r+s}$.

Il faut donc se rappeler qu'en général,

$$(AB_r)_s = AB_{r+s}, \quad \text{ou} \quad (a_r)_s = a_{r+s}.$$

De l'égalité spéciale des angles directifs. $\doteq$.

26. Soit donc,

$$AC = AJ_{\frac{4}{3}} \quad \text{et} \quad AJ = AB_{3\frac{1}{3}};$$

on déduira : $AC = AB_{3\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}$;

d'où, $AC = AB_{4+\frac{2}{3}}$;

ainsi, voilà un angle directeur qui est plus grand que 4 angles droits. Cet angle est mesuré par la ligne circulaire BDFHJC, laquelle renferme toute la circonférence plus l'arc BC. Cet arc supplémentaire BC est, dans l'hypothèse, égal à $\frac{2}{3}$. Si l'arc BC est $=$ à $\frac{2}{3}$, il s'ensuit que

$$AC = AB_{\frac{2}{3}}.$$

Donc, $AB_{4+\frac{2}{3}} = AB_{\frac{2}{3}}$.

En général,

$$AB_r = AB_{r+4} = AB_{r+8} = AB_{r+12} = \text{etc.}$$

Ainsi, l'angle directif est susceptible de croître à l'infini ; mais tout angle directeur qui n'est pas plus petit que 4 angles droits, peut être remplacé par son excédant sur le plus grand multiple de 4 angles droits qu'il contienne.

On peut donc dire que deux angles sont égaux *en tant qu'angles directeurs,* si leur différence est exactement 4^q ou un multiple de 4^q. J'exprimerai cette espèce d'égalité par le signe $\stackrel{\prime}{=}$, ainsi surmonté d'un accent (nº 8). Donc

$$r \stackrel{\prime}{=} r+4 \stackrel{\prime}{=} r+8 \stackrel{\prime}{=} r+12 \stackrel{\prime}{=} \ldots \stackrel{\prime}{=} r+4n$$

(n étant un nombre entier).

27. Il suit de là que tout angle négatif peut être remplacé par un positif. Ainsi,

$$-1 \stackrel{\prime}{=} -1+4 \stackrel{\prime}{=} 3,$$

$$-\frac{1}{3} \stackrel{\prime}{=} -\frac{1}{3}+4 \stackrel{\prime}{=} 3+\frac{2}{3}.$$

En général,

$$-r \stackrel{\prime}{=} 4-r.$$

28. Il est évident qu'en général,

$$-a = a_2.$$

Ainsi, par exemple,

$$-AB = AF = AB_2,$$

$$-AC = AG = AC_2, \quad -AD = AH = AD_2, \text{ etc.}$$

Il suit de là qu'en général,

$$-a_r = a_{r+2}.$$

Car, $\quad -a_r = (a_r)_2 = a_{r+2}$ (nº 25).

Ainsi,

$$-a_1 = a_{1+2} = a_3,$$

$$-a_2 = a_{2+2} = a_4 = a_0 = a.$$

$$-a_3 = a_{3+2} = a_5 = a_1$$

Si r est > 2, on peut faire $-a_r = a_{r-2}$. Car, dans ce cas, $a_{r+2} = a_{r+2-4} = a_{r-2}$. Ainsi, par exemple, $-a_6 = a_{6-2} = a_4 = a$. Et en effet, $-a_6 = -a_2 = a$.

Le signe — est donc synonyme du verseur 2 (c'est-à-dire, 2 *angles droits*).

Des nombres directifs.

29. Si l'on prend AB pour unité, on aura

$$AB = 1,$$

$$AD = 1_1,$$

$$AF = 1_2 = -1,$$

$$AH = 1_3 = -1_1.$$

On aura pareillement

$$AC = 1_{\frac{2}{3}}, \quad AE = 1_{\frac{1}{3}},$$

$$AG = 1_{2\frac{2}{3}}, \quad AJ = 1_{3\frac{1}{3}}.$$

Ainsi, on aura une infinité de nombres de même longueur que l'unité, mais différents par leurs directions.

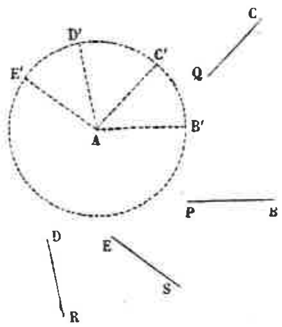
Puis, sur chaque direction, l'on aura une infinité de nombres concurrents entre eux, mais différents par leurs longueurs.

On peut diviser ces nombres en trois classes : *parallèles, perpendiculaires* et *obliques;* c'est-à-dire, parallèles à l'unité, perpendiculaires à l'unité, et obliques par rapport à l'unité. Les parallèles se divisent en positifs et négatifs. Les perpendiculaires se divisent en dirigés par 1, et dirigés par 3.

Rapport directeur entre deux chemins qui n'ont pas même origine.

30. Si les deux chemins QC et AC′ (*fig.* 6) sont concurrents et ont même longueur, ils seront égaux;

Fig. 6.



donc si AC′ est égal à AB'_r, QC sera pareillement égal à AB'_r. Donc r, c'est-à-dire l'angle AB′C′, qui est le rapport directeur de AC′ à AB′, est aussi le rapport directeur de QC à AB′. D'après cela, on trouvera facilement la manière de résoudre les deux problèmes suivants :

1° Étant donnés de position un chemin AB′ et un point Q, et étant données la grandeur et la direction d'un angle r, tracer un chemin QC qui soit égal à AB'_r.

On commencera par tracer AC′ égal à AB'_r, puis on fera QC égal à AC′.

2° Étant donnés de position deux chemins AB′, QC, d'origines différentes, trouver le rapport directeur de l'un à l'autre; de QC à AB′, par exemple.

On tracera AC′ concurrent avec QC; l'angle AB′C′ étant le rapport de AC′ à AB′, sera le rapport de QC

à AB′; de sorte que si l'angle AB′C′ est désigné par r, et si QC a même longueur que AB′, on aura

$$QC = AB'_r.$$

Digène.

31. Le rapport directeur de QC à AB′ s'exprimera par la formule

$$QC \therefore AB'.$$

(Lisez : QC *directeur à* AB′; ou QC *recteur* AB′.)

Ainsi, $\quad QC \therefore AB' = AB'C' = r.$

(Cela ne suppose nullement que les chemins QC, AB′ et AC′ aient des longueurs égales.)

Il suit de là que

$$AC' \therefore AB' = AB'C'.$$

J'appelle *digène* (*) la figure géométrique composée de deux chemins, que l'on compare pour trouver le rapport directeur de l'un à l'autre. Le digène, comme l'angle directif, se compose de deux côtés, dont l'un est l'origine ou le côté dirigeant, et l'autre le terme ou le côté dirigé. Dans QC ∴ AB′, c'est AB′ qui est le côté dirigeant, et QC le côté dirigé.

L'angle directif n'est qu'un cas particulier du digène; c'est un digène dont les deux côtés ont la même origine.

32. Il est évident que deux angles directifs sont égaux,

1° S'ils ont leurs côtés dirigeants concurrents, et leurs côtés dirigés concurrents, tels sont ABC et DGF (*fig.* 4);

(*) Δὶς γένος, deux origines.

2° S'ils ont leurs côtés dirigeants opposés, et leurs côtés dirigés opposés; tels sont ABC et FED.

33. La valeur d'un digène QC ⁛ AB′ (*fig.* 6) est l'angle directif AB′C′, qui a même côté dirigeant AB′, et dont le côté dirigé AC′ est concurrent avec le côté QC du digène. (C'est la définition, n° 31.)

Il suit de là, et de la proposition qui précède, qu'un digène et un angle directif sont égaux,

1° S'ils ont leurs côtés dirigeants concurrents, et leurs côtés dirigés concurrents;

2° S'ils ont leurs côtés dirigeants opposés, et leurs côtés dirigés opposés.

34. Il suit de tout cela que deux digènes sont égaux,

1° S'ils ont leurs côtés dirigeants concurrents, et leurs côtés dirigés concurrents;

2° S'ils ont leurs côtés dirigeants opposés, et leurs côtés dirigés opposés.

35. Le rapport directeur d'un chemin à son concurrent est évidemment zéro.

Le rapport directeur d'un chemin à son opposé est évidemment 2 angles droits.

Le rapport d'un chemin à son parallèle est zéro ou 2⁹.

Le rapport directeur d'un chemin à son perpendiculaire est 1⁹ ou 3⁹.

Ainsi, l'équation $a \therefore b = 0$, fait voir que a et b sont concurrents.

L'équation $a \therefore b = 2$, fait voir que a et b sont opposés.

L'équation $a \therefore b = 0$ *ou* 2, fait voir que a et b sont parallèles.

L'équation $a \therefore b = 1$ *ou* 3, fait voir que a et b sont perpendiculaires.

36. Trois directions quelconques donneront une équation de la nature de celle-ci (*fig.* 6) :

$$(SE \therefore RD) + (RD \therefore QC) \doteq SE \therefore QC.$$

D'un point A quelconque, pris pour commune origine, soit tiré AE′ concurrent avec SE, AD′ avec RD, AC′ avec QC; on aura

$$SE \therefore RD = AD'E',$$
$$RD \therefore QC = AC'D',$$
$$SE \therefore QC = AC'E' :$$

or, il est évident que

$$AC'D' + AD'E' \doteq AC'E'; \text{ donc, etc.}$$

37. Dans l'équation, ou *équi-digène*

$$SE \therefore RD = QC \therefore PB$$

on peut changer de place les *moyens*, et déduire

$$SE \therefore QC = RD \therefore PB.$$

En conservant la construction précédente, on a

$$SE \therefore RD = AD'E',$$
$$QC \therefore PB = AB'C';$$

d'où $AB'C' = AD'E'$.

Puis, $SE \therefore QC = AC'E'$,
$RD \therefore PB = AB'D'$;

il s'agit donc de démontrer que

$$AB'D' \text{ est } = \text{à } AC'E'.$$

Mais, $\quad AB'D' \doteq AB'C' + AC'D',$

$$AC'E' \doteq AC'D' + AD'E',$$

et nous venons de voir que

$$AB'C' = AD'E';$$

donc $AB'D' = AC'E'$; donc, etc.

Multiplicateur directif.

38. Tout nombre directif se forme de l'unité directive, par multiplication, division et *version* (j'appelle ainsi l'opération par laquelle on *verse* un chemin, n° 21).

Définition. Pour multiplier une quantité par un nombre directif, il faut opérer sur le multiplicande, par multiplication proprement dite, par division proprement dite, et par version, de la même manière qu'il faudrait opérer sur l'unité pour composer le multiplicateur. Ainsi, pour multiplier par $\left(\frac{9}{4}\right)_{\frac{2}{3}}$, par exemple, il faut multiplier par 9, diviser par 4, et verser par $\frac{2}{3}$. Cela se réduit à multiplier par $\frac{9}{4}$, et verser par $\frac{2}{3}$.

Donc, en général, pour multiplier par b_s, il faut multiplier par b, et verser par s. Ainsi,

$$a_r \times b_s = (a_r \times b)_s = [(ab)_r]_s = ab_{r+s} \quad (\text{n}^\circ\ 25).$$

Ainsi, par exemple,

$$1_{\frac{1}{2}} \times 1_{\frac{1}{2}} = 1_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1_1.$$

$$1_1 \times 1_1 = 1_{1+1} = 1_2 = -1.$$

$$1_2 \times 1_2 = 1_4 = 1, \text{ ou } -1 \times -1 = 1.$$

$$1_3 \times 1_3 = 1_6 = 1_{6-4} = 1_2 = -1.$$

$$1_3 \times 1_1 = 1_4 = 1.$$

$$1_1 \times 1_2 = 1_3.$$

$$1_3 \times 1_2 = 1_{5-4} = 1_1.$$

Par rapport à cette définition de la multiplication, je ferai la même observation que j'ai faite relativement à celle de l'addition (n° 5); il ne faut pas la regarder comme une vérité à démontrer, mais seulement comme une convention à admettre. On doit admettre cette convention si elle est utile; or, elle est très-utile, car il en résulte, comme on le verra, que toutes les formules de l'Algèbre expriment des quantités réelles, et qu'elles s'appliquent très-avantageusement à la Géométrie (et par conséquent à la Mécanique).

---

39. Le produit de deux nombres directifs est le même dans quelque ordre qu'on en fasse la multiplication;

$$a_r \times b_s = b_s \times a_r.$$

Car, $\quad 1^{\text{er}} = ab_{r+s}, \quad 2^{\text{me}} = ba_{s+r}:$

or, $ab = ba$, et $r + s = s + r$; donc, etc.

On démontrera facilement cette seconde proposition,

$$a \times b \times c \times d \times \ldots = a \times (b \times c \times d \times \ldots).$$

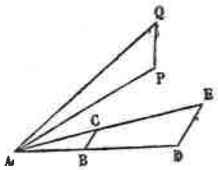
(Les lettres a, b, c, ... représentent ici des nombres de directions quelconques.)

Au moyen de ces deux propositions, l'on peut démontrer que le produit de plusieurs nombres est le même dans quelque ordre qu'on les range, et de quelque manière qu'on les groupe entre parenthèses.

---

40. Soit p un nombre positif. Si l'on fait $AD = AB \times p$ (*fig.* 7), $AE = AC \times p$, et que l'on joigne DE, il résul-

Fig. 7.



tera $DE = BC \times p$. (Les deux triangles ABC, ADE, ont un angle commun A, compris entre deux côtés proportionnels, etc.) Mais,

$$AC = AB + BC \quad \text{et} \quad AE = AD + DE;$$

donc, p étant positif,

$$(AB + BC) \times p = AB \times p + BC \times p.$$

Maintenant, faisons tourner le triangle ADE sur le sommet A, de manière que AD décrive un angle égal à un angle donné r. Soit APQ la position où s'arrê-

tera ce triangle; on aura d'abord, par construction, $ADP = r$ (*); et $AP = AD_r$.

Mais il est clair que AE a tourné comme AD; donc

$$AEQ = r, \quad \text{et} \quad AQ = AE_r.$$

Je veux démontrer que PQ est pareillement égal à DE_r. On sait d'abord que PQ a même longueur que DE; il suffit donc de démontrer que

$$PQ \mathbin{\cdot.\cdot} DE \text{ est } = \text{à } r = ADP.$$

Or, nous avons : *angle* $PQA = DEA$;

donc, $PA \mathbin{\cdot.\cdot} PQ = DA \mathbin{\cdot.\cdot} DE$;

changeant de place les moyens (n° 37),

$$PA \mathbin{\cdot.\cdot} DA = PQ \mathbin{\cdot.\cdot} DE;$$

mais il est facile de voir que (n° 34)

$$PA \mathbin{\cdot.\cdot} DA \text{ est} = \text{à } AP \mathbin{\cdot.\cdot} AD = ADP = r;$$

donc, $PQ \mathbin{\cdot.\cdot} DE = r$. Donc, etc.

Mais $AE = AD + DE$,

et $AQ = AP + PQ$;

donc, $(AD + DE)_r = AD_r + DE_r$.

C'est-à-dire que, pour verser la somme de deux chemins par un angle directif donné, il suffit de verser chacun de ces chemins, par le verseur donné, et de faire l'addition des résultats.

(*) Il faut bien se rappeler la manière dont j'indique les angles, n° 22.

Des deux dernières propositions il résulte évidemment

$$(\mathrm{AB}+\mathrm{BC})\times p_r = \mathrm{AB}\times p_r + \mathrm{BC}\times p_r.$$

Soit, pour simplifier, $\mathrm{AB}=c$, $\mathrm{BC}=d$, et $p_r=q$; on aura

$$(c+d)\times q = c\times q + d\times q.$$

Mais, $(c+d)\times q = q\times(c+d)$ (n° 39), $c\times q = q\times c$, et $d\times q = q\times d$; donc

$$q\times(c+d) = q\times c + q\times d.$$

Soit $q=a+b$, on aura donc

$$(a+b)\times(c+d) = (a+b)\times c + (a+b)\times d;$$

mais $$(a+b)\times c = a\times c + b\times c,$$

et $$(a+b)\times d = a\times d + b\times d;$$ donc

$$(a+b)\times(c+d) = a\times c + b\times c + a\times d + b\times d;$$

équation qui indique la manière de multiplier un binôme par un binôme. Il est facile d'étendre cette règle à la multiplication d'un polynôme quelconque par un polynôme quelconque.

Remarquez qu'il n'est pas question ici de la règle des signes; car $a-b$, par exemple, signifie $a+-b$; ce qui peut encore se changer dans $a+b_2$ (n° 28).

---

41. De la théorie de la multiplication résulte celle de la division. Puisque

$$a_r\times b_s = ab_{r+s},$$

il s'ensuit que

$$\frac{d_z}{a_r} = \left(\frac{d}{a}\right)_{z-r}.$$

Car en supposant $\frac{d_z}{a_r} = b_s$, il vient

$$d_z = ab_{r+s};\ \text{donc,}\ d=ab,\ \text{et}\ z \doteq r+s\ (\text{n° } 26);$$

donc, $$b \doteq \frac{d}{a},\quad \text{et}\quad s \doteq z-r;$$

donc, $$b_s = \left(\frac{d}{a}\right)_{z-r}.$$

Ainsi, par exemple,

$$\frac{1_3}{1_1} = \left(\frac{1}{1}\right)_{3-1} = 1_2 = -1.$$

$$\frac{1}{-1} = \frac{1_0}{1_2} = 1_{0-2} = 1_{4-2} = 1_2 = -1\ (\text{n° } 27).$$

$$\frac{-1}{-1} = \frac{1_2}{1_2} = 1_{2-2} = 1_0 = 1.$$

$$\frac{1_1}{1_3} = 1_{1-3} = 1_{-2} = 1_{-2+4} = 1_2 = -1.$$

La division conduit souvent à des verseurs négatifs, mais on les rend positifs, en y ajoutant 4^q (n° 27).

Proportion.

42. La proportion n'est autre chose que l'égalité de deux quotients. Ainsi,

$$a : b :: c : d \ \text{signifie}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

ou $$a : b = c : d;$$

ce qu'on peut énoncer ainsi :

$$a \text{ rapport à } b = c \text{ rapport à } d.$$

Il me semble que l'usage de ces équations serait bien préférable à celui de la notation qu'on appelle *proportion*. Ce sont ces équations que nous appellerons *équi-quotients*. Dans l'équi-quotient $a : b = c : d$, si a est égal à b multiplié par p_r, il résulte

$$a : b = p_r; \text{ d'où } c : d = p_r; \text{ d'où } c = d \times p_r.$$

Soit donc, par exemple, $a = b \times 2_1 = 2b_1$;

il résultera $c = d \times 2_1 = 2d_1$.

Ainsi, dans la proportion ou l'équi-quotient, entre quantités directives, le 3ᵉ terme doit se déduire du 4ᵉ, par multiplication, division et version, de la même manière que le 1ᵉʳ se déduit du 2ᵉ.

Exemples.

$$1_1 : 1 = 1_2 : 1_1,$$
$$1_2 : 1 = 1_4 : 1_2,$$
$$1_2 : 1_1 = 1_3 : 1_2,$$
$$1_3 : 1_2 = 1_4 : 1_3,$$
$$1_3 : 1_1 = 1_5 : 1_3.$$

En général,

$$1_r : 1_s = 1_z : 1_{z+s-r}.$$

Car $1_r : 1_s = 1_{r-s}$;

donc, si l'on fait

$$1_r : 1_s = 1_z : x,$$

on aura

$$1_z : x = 1_{r-s}: \text{ d'où } 1_z = x \times 1_{r-s};$$

d'où $x = \dfrac{1_z}{1_{r-s}} = 1_{z-(r-s)} = 1_{z+s-r}$:

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Donc $1_r : 1_s :: 1_z : x = 1_{z+s-r}$.

Donc si l'on fait

$$1_r : 1_s :: 1_z : 1_u,$$

il viendra $u + r \overset{\prime}{=} s + z$;

c'est-à-dire que, dans une proportion de cette nature, la somme des verseurs des extrêmes est égale, en tant qu'angle, à la somme des verseurs des moyens.

On doit voir que, dans toute proportion *directive*, le rapport directeur du 1ᵉʳ terme au 2ᵉ est égal à celui du 3ᵉ au 4ᵉ. Ainsi la proportion (*fig.* 7)

$$AP : AB = AQ : AC$$

renferme l'équi-digène

$$AP \therefore AB = AQ \therefore AC.$$

En général, la proportion

$$a : b :: (\text{ou} =) \; c : d$$

renferme l'équi-digène

$$a \therefore b = c \therefore d.$$

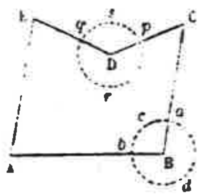
Similitude des polygones.

43. Dans la science dont je tâche de donner une idée, et que l'on peut appeler indifféremment *Algèbre directive* ou *Géométrie directive*, toute ligne et tout angle doit être considéré comme directif. Ainsi, dans

le polygone *directif*, chaque côté et chaque angle doit être considéré comme fluant. Déterminons donc, une fois pour toutes, dans quel sens flueront les côtés, et dans quel sens flueront les angles dans le polygone directif.

Par rapport au spectateur qui est placé hors du polygone, chaque côté fluera de gauche à droite. Ainsi, dans le polygone de la *fig.* 8, les côtés sont AB, BC,

Fig. 8.



CD, DE et EA; et non pas BA, AE, ED, DC et CB. Ces derniers chemins sont les inverses des côtés du polygone.

Il suit de là que les côtés d'un polygone directif sont des chemins de suite, et que leur somme est zero :

$$AB + BC + CD + DE + EA = AA = 0.$$

Remarquez encore que la personne qui parcourrait successivement tous les côtés d'un polygone, en suivant leur flux, aurait constamment sur sa gauche l'aire enveloppée.

L'angle d'un polygone répondant à un sommet désigné est l'angle qui conduit de droite à gauche, du côté qui prend son origine en ce sommet, à l'inverse du côté qui se termine au même sommet. Ainsi, l'angle du sommet B est BCA, ou B*acb*. L'angle du sommet D est DEABC, ou D*qrp*. On verra de même que

l'angle en C est CDB, que l'angle en E est EAD, et que l'angle en A est ABE.

On voit que tout angle directif d'un polygone est l'angle intérieur de même sommet, fluant de droite à gauche, par rapport au spectateur qui est situé à ce sommet, hors du polygone.

44. Dans un polygone directif, on peut admettre un 1er côté, un 2e côté, un 3e côté, etc. Le 1er côté sera celui qu'on voudra; le 2e sera celui qui prendra son origine au terme du 1er; le 3e sera celui qui prendra son origine au terme du 2e; et ainsi de suite.

Le 1er angle est celui qui a son sommet à l'origine du 1er côté; le 2e angle est celui qui a son sommet à l'origine du 2e côté;....

Ainsi, l'origine du 1er angle est le 1er côté; l'origine du 2e angle est le 2e côté, etc. Puis, le terme du 2e angle est l'inverse du 1er côté; le terme du 3e angle est l'inverse du 2e côté;.... le terme du 1er angle est l'inverse du dernier côté.

Comparer un polygone P à un polygone P′, c'est comparer le 1er côté de P au 1er côté de P′, le 2e côté au 2e côté,... le 1er angle au 1er angle, le 2e angle au 2e angle....

Cette comparaison suppose que le nombre des côtés et des angles soit le même en P et en P′.

Les deux polygones sont équi-angles si la correspondance peut être établie de telle manière que chaque angle de P soit égal à son correspondant en P′.

Si chaque angle est égal à son correspondant, et si les côtés correspondants sont en proportion, les polygones comparés seront semblables.

45. Mais, de ces deux conditions, la seconde renferme la première; et par conséquent elle suffit. Soient ABCDE.... et A′B′C′D′E′.... (sans figure) les deux

polygones comparés. Si les côtés correspondants sont en proportion, on a

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \dots .$$

Or, ces équi-quotients renferment les équi-digènes (n° 42)

$$AB \cdot\!.\!\cdot A'B' = BC \cdot\!.\!\cdot B'C' = CD \cdot\!.\!\cdot C'D' = \dots ,$$

ou,
$$AB \cdot\!.\!\cdot A'B' = BC \cdot\!.\!\cdot B'C',$$
$$BC \cdot\!.\!\cdot B'C' = CD \cdot\!.\!\cdot C'D',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mais,
$$AB \cdot\!.\!\cdot A'B' = BA \cdot\!.\!\cdot B'A' \text{ (n° 33)},$$
$$BC \cdot\!.\!\cdot B'C' = CB \cdot\!.\!\cdot C'B',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

donc,
$$BA \cdot\!.\!\cdot B'A' = BC \cdot\!.\!\cdot B'C',$$
$$CB \cdot\!.\!\cdot C'B' = CD \cdot\!.\!\cdot C'D',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Changeant les moyens entre eux (n° 37),

$$BA \cdot\!.\!\cdot BC = B'A' \cdot\!.\!\cdot B'C',$$
$$CB \cdot\!.\!\cdot CD = C'B' \cdot\!.\!\cdot C'D',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

ou,
$$BCA = B'C'A',$$
$$CDB = C'D'C,$$
$$\dots\dots\dots$$

voilà l'égalité des angles déduite de la proportionnalité des côtés. Ainsi, pour que deux polygones soient semblables, il suffit que les côtés correspondants, considérés comme directifs, soient en proportion.

Notation AB_+.

46. Quelle que soit la direction du chemin AB, la notation AB_+ exprimera un chemin positif de même longueur que AB.

AB_+ se lit AB *positif.*

Ainsi,
$$(4_1)_+ = 4, \quad \text{ou} \quad (-4)_+ = +4.$$

Le signe $+$, employé de cette manière, s'appellera *déverseur.*

---

47. Quatre chemins AB, A'B', BC, B'C', peuvent être en proportion, eu égard à leurs longueurs, sans être en proportion eu égard à leurs directeurs. Dans ce cas, on ne peut pas dire $AB : A'B' :: BC : B'C'$; mais on peut dire

$$AB_+ : A'B'_+ :: BC_+ : B'C'_+.$$

Si l'on a les deux équations

$$AB_+ : A'B'_+ = BC_+ : B'C'_+,$$
$$AB \cdot\!.\!\cdot A'B' = BC \cdot\!.\!\cdot B'C',$$

on peut évidemment déduire

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Mais, de l'équation $BCA = B'C'A'$,

il résulte $\quad AB \cdot\!.\!\cdot A'B' = BC \cdot\!.\!\cdot B'C'.$

Car il résulte successivement

$$BA \because BC = B'A' \because B'C';$$

d'où,
$$BA \because B'A' = BC \because B'C';$$

d'où,
$$AB \because A'B' = BC \because B'C'.$$

D'après cela, il est facile de démontrer que deux polygones sont semblables, si leurs côtés correspondants sont en proportion, eu égard à leurs longueurs, et si les angles correspondants sont égaux. Je ne m'arrêterai pas à développer la démonstration.

Par rapport aux angles, remarquez que deux angles correspondants sont égaux en tant que directifs, s'ils sont égaux en tant que non directifs; car chaque angle directif d'un polygone a même grandeur que l'angle non directif de même sommet.

---

48. Il peut arriver que deux polygones soient tels que, lorsqu'on les regarde comme non directifs, ils aient leurs angles égaux chacun à chacun, et que néanmoins, lorsqu'on les rend directifs, il soit impossible de faire correspondre les côtés et les angles de manière que chaque angle réponde à son égal. Tels sont les deux triangles ABC et A'B'C' (*fig.* 4). Considérés comme non directifs, ils ont leurs angles égaux chacun à chacun; A = A', B = B' et C = C'. Lorsqu'on les considère comme directifs, les côtés du premier sont AB, BC et CA; mais ceux du second ne sont pas

A'B', B'C' et C'A'; ils sont B'A', A'C' et C'B' (n° 43). Donc, si l'on fait correspondre A' à A, B' ne répondra pas à B, ni C' à C. En effet, si l'on faisait correspondre A à A', B à B' et C à C', il résulterait que AB répondrait A' à B', BC à B'C' et CA à C'A'; donc chaque côté de ABC répondrait à l'inverse d'un côté de A'B'C' au lieu de répondre à un côté de ce triangle, comme cela doit être. Aussi, ces deux triangles ne sont-ils pas semblables en tant que directs. On dira, si l'on veut, qu'ils sont *inversement semblables*.

49. Si deux triangles directifs ont leurs angles correspondants égaux chacun à chacun, leurs côtés seront en proportion, eu égard à leurs directions, et eu égard à leurs longueurs, et ces triangles seront semblables, même en tant que directifs. (On trouvera facilement la démonstration.)

50. Deux triangles sont semblables, même en tant que directifs, si chaque côté est parallèle à son correspondant, ou si chaque côté est perpendiculaire à son correspondant. (Je ne donnerai pas ici la démonstration.)

Puissances et racines.

51. Il sera convenu que a^m_r signifie $(a^m)_r$, et non $(a_r)^m$.

Principe. $$\left(a^m_r\right)^n = a^{m\times n}_{r\times n}.$$

Car, $\left(a^m_r\right)^3$, par exemple, est = à

$$a^m_r \times a^m_r \times a^m_r = a^{m+m+m}_{r+r+r} = a^{m\times 3}_{r\times 3}.$$

Ainsi,

$$(1_2)^2 = 1_{2\times 2} = 1_4 = 1, \quad \text{ou} \quad (-1)^2 = 1.$$

$$\left(1_{\frac{4}{3}}\right)^3 = 1_{\frac{4}{3}\times 3} = 1_4 = 1,$$

$$\left(1_{\frac{8}{3}}\right)^3 = 1_{\frac{8}{3}\times 3} = 1_8 = 1.$$

$$(1_1)^4 = 1_{1\times 4} = 1_4 = 1,$$

$$(1_2)^4 = 1_{2\times 4} = 1_8 = 1,$$

$$(1_3)^4 = 1_{3\times 4} = 1_{12} = 1.$$

52. *Corollaires.* Les racines de l'équation

$$x^2 = 1,$$

sont $1 = AB$ (*fig.* 5), et $1_2 = -1 = AF$.

Celles de $x^3 = 1$,

sont $1 = AB$, $1_{\frac{4}{3}} = AE$ et $1_{\frac{8}{3}} = AG$.

Celles de $x^4 = 1$,

sont $1 = AB$, $1_1 = AD$, $1_2 = AF$ et $1_3 = AH$.

Celles de $x^6 = 1$,

sont $1 = AB$, $1_{\frac{4}{6}} = AC$, $1_{\frac{8}{6}} = AE$, $1_{\frac{12}{6}} = AF$,

$1_{\frac{16}{6}} = AG$ et $1_{\frac{20}{6}} = AJ$.

En général, les racines de l'équation

$$x^n = 1,$$

sont $1,\ 1_{\frac{4}{n}},\ 1_{\frac{8}{n}},\ 1_{\frac{12}{n}},\dots\ 1_{\frac{4(n-1)}{n}}$.

On peut pousser plus loin cette série de racines; on peut même la pousser à l'infini; mais en obtenant de nouvelles formules, on n'obtiendra pas de nouvelles valeurs. Voici ce qu'on trouvera :

$$1_{\frac{4n}{n}} = 1_4 = 1,$$

$$1_{\frac{4n+4}{n}} = 1_{4+\frac{4}{n}} = 1_{\frac{4}{n}},$$

$$1_{\frac{4n+8}{n}} = 1_{4+\frac{8}{n}} = 1_{\frac{8}{n}},$$

etc., etc.

C'est la même période de valeurs $1,\ 1_{\frac{4}{n}},\ 1_{\frac{8}{n}},\dots\ 1_{\frac{4(n-1)}{n}}$; c'est, dis-je, la même période qui se répète. Elle se répéterait ensuite une seconde fois, puis une troisième, et à l'infini, sans que jamais on trouve aucune racine qui ne soit égale à quelque terme de cette période.

Il est évident que cette période ne renferme pas deux termes égaux; c'est-à-dire qui aient la même direction.

Le nombre des termes de cette période est visiblement égal à n.

Donc, l'équation $x^n = 1$ a un nombre de racines réelles, égal à n, ni plus ni moins.

Voilà les racines de l'unité. Voilà les quantités prétendues imaginaires.

53. Remarquez que la pluralité des racines de l'équation $x^n = 1$, provient de la pluralité des racines de l'équation $z \times n \mathrel{\acute{=}} 0$ (en désignant par z un angle directeur). En effet, si l'on fait $x = 1_z$, il vient $(1_z)^n = 1$;

d'où $1_{z\times n} = 1_0$; d'où $z \times n \stackrel{\prime}{=} 0$. Mais cette équation, $z\times n \stackrel{\prime}{=} 0$, a un nombre n de racines; car, nous avons vu que (nº 26)

$$0 \stackrel{\prime}{=} 4 \stackrel{\prime}{=} 8 \stackrel{\prime}{=} 12 \stackrel{\prime}{=} \ldots;$$

donc, l'équation $z \times n \stackrel{\prime}{=} 0$ signifie indifféremment

$$z\times n = 0;\quad \text{d'où}\quad z = 0:$$

$$z\times n = 4;\quad \text{d'où}\quad z = \frac{4}{n}:$$

$$z\times n = 8;\quad \text{d'où}\quad z = \frac{8}{n}:$$

$$z\times n = 12;\quad \text{d'où}\quad z = \frac{12}{n}:$$

etc.

Du signe σ.

54. Établissons que σ représentera quelqu'une des valeurs 0, 4^q, 8^q, 12^q, etc.; en un mot, quelque multiple de 4 *angles droits.*

L'équation $z\times n \stackrel{\prime}{=} 0$ pourra être remplacée par $z\times n = \sigma$; d'où $z = \frac{\sigma}{n}$. Les racines de l'équation $x^n = 1$, seront donc toutes exprimées par

$$x = 1_{\frac{\sigma}{n}}.$$

Si l'on avait en même temps,

$$x^n = 1,\quad y^n = 1,\quad z^n = 1,\ \text{etc.},$$

il ne faudrait pas exprimer indistinctement x, y, z, etc.,

par $1_{\frac{\sigma}{n}}$; car ces inconnues x, y, z, etc., ne seraient pas nécessairement égales; on ferait donc,

$$x = 1_{\frac{\sigma'}{n}},\quad y = 1_{\frac{\sigma''}{n}},\quad z = 1_{\frac{\sigma'''}{n}},\ \text{etc.}$$

Les racines de l'équation

$$x^n = 1,$$

sont exprimées par

$$x = 1_{\frac{r+\sigma}{n}}.$$

Car, $$\left(1_{\frac{r+\sigma}{n}}\right)^n = 1_{r+\sigma} \stackrel{\prime}{=} 1_r.$$

---

55. Il suit du nº 53, que de l'équation $r \stackrel{\prime}{=} s$ on ne peut pas conclure que $\frac{r}{n}$ soit $\stackrel{\prime}{=}$ à $\frac{s}{n}$. Si l'on veut diviser les deux membres de cette équation, de manière à conserver l'égalité, il faut commencer par la transformer dans

$$r = s + \sigma$$

(σ étant un multiple inconnu de 4 angles droits, positif ou négatif);

et déduire $$\frac{r}{n} = \frac{s}{n} + \frac{\sigma}{n}.$$

Ainsi, quoique 6 soit $\stackrel{\prime}{=}$ à 2, on ne peut pas conclure que $\frac{6}{n}$ soit $\stackrel{\prime}{=}$ à $\frac{2}{n}$. En effet, soit $n=2$; $\frac{6}{2}=3$, et $\frac{2}{2}=1$: or, 3 n'est pas $\stackrel{\prime}{=}$ à 1.

Gardez-vous donc bien de faire $\frac{r}{n}\stackrel{\prime}{=}\frac{r\pm4}{n}$; mais faites,

$$\frac{r}{n}\stackrel{\prime}{=}\frac{r}{n}\pm4\stackrel{\prime}{=}\frac{r\pm4\times n}{n}.$$

Et,

$$\frac{r}{n}\stackrel{\prime}{=}\frac{r}{n}\pm\sigma\stackrel{\prime}{=}\frac{r\pm\sigma\times n}{n}.$$

Ainsi, par exemple, $\frac{18}{3}\stackrel{\prime}{=}\frac{18-4\times3}{3}\stackrel{\prime}{=}\frac{6}{3}\stackrel{\prime}{=}2$; mais $\frac{18}{3}$ n'est pas $\stackrel{\prime}{=}$ à $\frac{18-4}{3}$, ni $\stackrel{\prime}{=}$ à $\frac{18-16}{3}$, etc.

Donc, pour changer l'angle directif négatif $\frac{-3}{4}$, par exemple, en un positif, il ne faut pas faire $\frac{-3}{4}\stackrel{\prime}{=}\frac{4-3}{4}$; mais $\frac{-3}{4}\stackrel{\prime}{=}\frac{-3+4\times4}{4}\stackrel{\prime}{=}3\frac{1}{4}$.

Et en effet, $\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}\stackrel{\prime}{=}4-\frac{3}{4}\stackrel{\prime}{=}3+\frac{1}{4}$.

En général, $\frac{-r}{n}\stackrel{\prime}{=}\frac{4n-r}{n}\stackrel{\prime}{=}\frac{\sigma\times n-r}{n}$.

---

56. Quoique l'équation $u\times3\stackrel{\prime}{=}r$ ait 3 racines, $\frac{r}{3}$, $\frac{r+4}{3}$ et $\frac{r+8}{3}$, néanmoins, la quantité r n'a qu'un seul tiers (c'est-à-dire qu'il n'y a pas deux quantités inégales qui soient des tiers de r), et la formule $\frac{r}{3}$ n'a qu'une seule valeur.

Donc, pareillement, quoique l'équation $x^3=1_r$ ait 3 racines, $1_{\frac{r}{3}}$, $1_{\frac{r+4}{3}}$ et $1_{\frac{r+8}{3}}$, il ne s'ensuit pas que la quantité 1_r ait trois racines 3ièmes, ni que la formule $\sqrt[3]{1_r}$ ait trois valeurs.

Quoique les quantités $\frac{r+4}{3}$, $\frac{r+8}{3}$ soient des racines de l'équation $u\times3\stackrel{\prime}{=}r$, elles ne sont pas des tiers de r, ni des valeurs de la formule $\frac{r}{3}$.

Donc, pareillement, quoique les quantités $1_{\frac{r+4}{3}}$ et $1_{\frac{r+8}{3}}$ soient des racines de l'équation $x^3=1_r$, il ne s'ensuit pas qu'elles soient des racines 3ièmes de 1_r, ni des valeurs de la formule $\sqrt[3]{1_r}$.

Il est donc tout simple et tout naturel d'établir, que la formule $\sqrt[n]{1_r}$ exprimera uniquement $1_{\frac{r}{n}}$, et qu'elle n'aura qu'une seule valeur, comme la formule $\frac{r}{n}$ elle-même. Donc, les racines de l'équation $x^n=1_r$, sont

$$x=\sqrt[n]{1_r}=1_{\frac{r}{n}},$$

$$x=\sqrt[n]{1_{r+4}}=1_{\frac{r+4}{n}},$$

$$x=\sqrt[n]{1_{r+8}}=1_{\frac{r+8}{n}},$$

etc.

Si l'on veut exprimer vaguement une quelconque des valeurs de x, il faut donc faire (nº 54),

$$x = \sqrt[n]{1_{r+\sigma}} = 1_{\frac{r+\sigma}{n}}.$$

Donc, la racine quelconque de $x^n = 1$,

est $$x = \sqrt[n]{1_\sigma} = 1_{\frac{\sigma}{n}}.$$

Donc, la racine quelconque de $x^n = a$,

est $$x = 1_{\frac{\sigma}{n}} \times \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a})_{\frac{\sigma}{n}}.$$

Et, la racine quelconque de $x^n = a_r$,

est $$x = 1_{\frac{r+\sigma}{n}} \times \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a})_{\frac{r+\sigma}{n}}.$$

Si a est positif, la valeur de $\sqrt[n]{a}$ sera le nombre positif dont a est la puissance nième. Si a n'est pas positif, faites $a = a_{+c}$ (nº 46);

d'où, $$\sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a_+})_{\frac{c}{n}};$$

d'où, $$x = (\sqrt[n]{a_+})_{\frac{c+r+\sigma}{n}}.$$

Mais $\sqrt[n]{a^n}$ sera toujours a; $\sqrt[n]{a^m}$ sera toujours $a^{\frac{m}{n}}$. Ainsi, quoique a représenterait -4, d'où il suit que a^2 serait égal à 16, la valeur de $\sqrt[2]{a^2}$ serait a ou -4; et ne serait pas $\sqrt{16}$, ou $+4$. D'ailleurs, on devrait faire

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{-4 \times -4} = \sqrt{4_2 \times 4_2} = \sqrt{16_4}$$
$$= (\sqrt{16})_2 = 4_2 = -4 \text{ (voy. nº 59).}$$

57. Nous avons vu que de l'équation $r \stackrel{\prime}{=} s$ on ne peut pas déduire $\frac{r}{n} \stackrel{\prime}{=} \frac{s}{n}$, mais $\frac{r}{n} \stackrel{\prime}{=} \frac{s+\sigma}{n}$ (nº 55); donc pareillement,

de l'équation $$1_r = 1_s,$$

on ne peut pas déduire $\sqrt[n]{1_r} = \sqrt[n]{1_s}$,

mais bien $$\sqrt[n]{1_r} = \sqrt[n]{1_{s+\sigma}};$$

car $$1_{\frac{r}{n}} = 1_{\frac{s+\sigma}{n}}.$$

Ainsi, quoique 1_6 soit $=$ à 1_2, on ne peut pas conclure que $\sqrt[n]{1_6}$ soit $=$ à $\sqrt[n]{1_2}$. En effet, soit $n = 2$; $\sqrt[2]{1_6} = 1_3$, et $\sqrt[2]{1_2} = 1$: or, 1_3 n'est pas $=$ à 1_1.

Gardez-vous donc bien de faire

$$\sqrt[n]{1_r} = \sqrt[n]{1_{r\pm4}};$$

mais faites $$\sqrt[n]{1_r} = \sqrt[n]{1_{r\pm4\times n}};$$

car $$1_{\frac{r}{n}} = 1_{\frac{r\pm4\times n}{n}}, \quad \text{ou} \quad = 1_{\frac{r}{n}\pm4}.$$

Ainsi, $$\sqrt[3]{1_{18}} = \sqrt[3]{1_{18-4\times3}} = \sqrt[3]{1_6} = 1_2;$$

mais $\sqrt[3]{1_{18}}$ n'est pas $=$ à $\sqrt[3]{1_{18-4}}$, ni $=$ à etc., etc.

Il ne faut donc pas faire

$$\sqrt[4]{1_{-3}} = \sqrt[4]{1_{4-3}};$$

mais bien, $\sqrt[4]{1_{-3}} = \sqrt[4]{1_{4\times4-3}} = \sqrt[4]{1_{13}} = 1_{\frac{13}{4}}.$

Et, en effet,

$$\sqrt[4]{1_{-3}} = 1_{\frac{-3}{4}} = 1_{\left(-\frac{3}{4}\right)} = 1_{4-\frac{3}{4}} = 1_{\frac{13}{4}}.$$

En général, $\sqrt[n]{1_{-r}} = \sqrt[n]{1_{4n-r}} = \sqrt[n]{1_{\sigma\times n-r}}$.

---

58. Quelle est la valeur de $\sqrt[n]{-1}$?

Hors du radical, la formule -1 exprime indifféremment 1_2, 1_6, 1_{10}, ... et en général $1_{2+\sigma}$. S'il en était de même sous le signe, il en résulterait que la formule $\sqrt[n]{-1}$ exprimerait indifféremment $1_{\frac{2}{n}}$, $1_{\frac{6}{n}}$, $1_{\frac{10}{n}}$, ... et, en général, $1_{\frac{2+\sigma}{n}}$. Cela ne doit pas être admis; il est indispensable de restreindre la formule $\sqrt[n]{-1}$ à une seule valeur, sans quoi elle serait à peu près inutile. Établissons donc que cette formule

$$\sqrt[n]{-1} \text{ n'aura que la seule valeur } 1_{\frac{2}{n}}.$$

Donc, sous le signe,

-1 désigne 1_2, et non $1_{2\pm\sigma}$;

$-a$ désigne a_2, et non $a_{2\pm\sigma}$;

$-a_r$ désigne a_{2+r}, et non $a_{2+r\pm\sigma}$.

Donc, $\sqrt{-1} = 1_1$, $\sqrt[3]{-1} = 1_{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{-1} = 1_{\frac{1}{2}}$,

$\sqrt[5]{-1} = 1_{\frac{2}{5}}$, $\sqrt[6]{-1} = 1_{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[7]{-1} = 1_{\frac{2}{7}}$, etc.

Donc il ne faut pas faire

$$\sqrt[3]{-1} = -1,\quad \sqrt[5]{-1} = -1,\quad \sqrt[7]{-1} = -1, \text{ etc.,}$$

comme on le pratique dans l'Algèbre ordinaire. Je ne veux pas dire que les algébristes se trompent lorsqu'ils opèrent ainsi; ils ne se trompent pas dans leur système, puisqu'ils n'ont point admis de convention qui s'oppose à ce que les formules $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[5]{-1}$, $\sqrt[7]{-1}$, etc., représentent -1. Mais nous nous tromperions, nous, si nous opérions ainsi, parce que nous avons admis, et dû admettre, la convention générale $\sqrt[n]{1_r} = 1_{\frac{r}{n}}$, de laquelle il résulte que $\sqrt[3]{1_2}$ ne peut représenter que $1_{\frac{2}{3}}$; que $\sqrt[5]{1_2}$ ne peut représenter que $1_{\frac{2}{5}}$; etc.

---

59. D'après ces principes, il est facile d'effectuer les multiplications suivantes :

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = 1_1 \times 1_1 = 1_2 = -1.$$

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-c} = (\sqrt{a})_1 \times (\sqrt{c})_1 = (\sqrt{ac})_2 = -\sqrt{ac}.$$

$$\sqrt[4]{-1} \times \sqrt[4]{-1} = 1_{\frac{1}{2}} \times 1_{\frac{1}{2}} = 1_1 = \sqrt{-1}.$$

$$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-c} = (\sqrt[4]{a})_{\frac{1}{2}} \times (\sqrt[4]{c})_{\frac{1}{2}} = (\sqrt[4]{ac})_1 = \sqrt[4]{ac} \times \sqrt{-1}.$$

Il faut traiter de la même manière les radicaux de degrés impairs;

$$\sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{-1} = 1_{\frac{2}{3}} \times 1_{\frac{2}{3}} = 1_{\frac{4}{3}}.$$

En général,

$$\sqrt[m]{-1}\times\sqrt[n]{-1}=1_{\frac{2}{m}}\times 1_{\frac{2}{n}}=1_{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}}.$$

D'où, $$\sqrt[n]{-1}\times\sqrt[n]{-1}=1_{\frac{4}{n}}.$$

Peut-on faire $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{-1\times-1}$, comme on fait $\sqrt{a}\times\sqrt{c}=\sqrt{ac}$? Oui,

$$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} \text{ est } = \text{à } \sqrt{-1\times-1}.$$

Mais, $\sqrt{-1\times-1}$ n'est pas $=$ à $\sqrt{1}$; car

$$\sqrt{-1\times-1}=\sqrt{1_2\times 1_2}=\sqrt{1_4}:$$

or, $$\sqrt{1_4} \text{ n'est pas } = \text{à } \sqrt{1}.$$

Les deux quantités -1×-1 et $+1$ sont égales hors du signe radical, mais elles ne sont pas égales sous le signe, pas plus que 1_4 et 1_0.

Super-égalité. $\stackrel{:}{=}$.

60. On pourrait instituer un signe qui exprimât que deux quantités sont égales sous le signe radical (n° 8). Soit $\stackrel{:}{=}$ ce signe, que nous énoncerons *super-égale;* nous dirons :

$$-1\times-1\stackrel{:}{=}1_4,\quad \text{non} \stackrel{:}{=} 1;$$

et alors nous verrons clairement que

$$\sqrt{-1\times-1} \text{ est } = \text{à } \sqrt{1_4}=1_2,$$

et non $$=\sqrt{1}=1.$$

61. Appelons *prime-directeur* d'un chemin le rapport directeur de ce chemin à la direction positive. Ainsi, le prime-directeur de 1_r est r; celui de 1_4 est 4; celui de 1 est zéro, etc.

On voit alors que, pour que deux chemins soient *super-égaux,* il ne suffit pas qu'ils aient même longueur et même direction; il faut encore qu'ils aient même prime-directeur.

Quel que soit le chemin x, si l'on fait

$$x \stackrel{:}{=} x_{+r},\quad \text{ou}\quad x \cdot{.}\cdot 1 = r_r,$$

r sera le prime-directeur de x.

---

62. De l'équation $x^n = a$, il faut déduire

$$\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)_{\frac{\sigma}{n}} \text{ (n° 56)};$$

d'où, $$x=\left(\sqrt[n]{a}\right)_{\frac{\sigma}{n}};\quad \text{et non} = \sqrt[n]{a}.$$

Alors x reste un peu inconnue; elle reste confondue entre un nombre n de racines. La détermination de x dépend de celle du σ. Si aucune condition ne détermine ce σ, les n valeurs trouvées conviennent à x; mais quelquefois le problème établit certaines conditions qui déterminent le σ, et alors x n'a plus qu'une seule valeur.

63. Mais, si l'on a l'équation $x^n \stackrel{:}{=} a$,

on est en droit de déduire $$x \stackrel{:}{=} \sqrt[n]{a};$$

et même $$x = \sqrt[n]{a}.$$

64. Les principes que je viens d'indiquer lèvent toutes les difficultés relatives au calcul des radicaux, tant que les quantités sous le signe sont des monômes; mais il n'en est pas de même lorsque les quantités sous le signe sont des polynômes. Lorsqu'on a multiplié un polynôme par un polynôme, si l'on effectue quelque réduction dans le produit, on ne peut plus être sûr de conserver la super-égalité. Exemple,

$$(a+\sqrt{a^2-c^2})\times(a-\sqrt{a^2-c^2})$$
$$\overset{\vdots}{=} a^2+a\sqrt{a^2-c^2}-a\sqrt{a^2-c^2}-(a^2-c^2).$$

Il semble que ce produit doive se réduire comme il suit :

$$\overset{\vdots}{=} a^2-(a^2-c^2)\overset{\vdots}{=} a^2-a^2--c^2\overset{\vdots}{=} c^2_4;$$

d'où il résulterait

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-c^2}}\times\sqrt{a-\sqrt{a^2-c^2}}=\sqrt{c^2_4}=c_2=-c:$$

eh bien, ce résultat n'est pas vrai dans tous les cas. Soit $a=c$; la multiplication devient

$$\sqrt{c+\sqrt{c^2-c^2}}\times\sqrt{c-\sqrt{c^2-c^2}}=\sqrt{c}\times\sqrt{c}=+c.$$

Et il ne faut pas conclure de là que le résultat $+c$ convienne à tous les cas. Si l'on fait $a=0$, tout se réduit à

$$\sqrt{\sqrt{-c^2}}\times\sqrt{-\sqrt{-c^2}}=\sqrt{c_1}\times\sqrt{-c_1}$$
$$=\sqrt{c_1}\times\sqrt{c_3}=(\sqrt{c})_{\frac{1}{2}}\times(\sqrt{c})_{\frac{3}{2}}=c_{\frac{4}{2}}=c_2=-c.$$

Ainsi, le résultat qui convient à un cas, ne convient pas à l'autre. Cette multiplication ne peut pas se développer d'une manière générale.

Voici à quoi il faut s'en tenir pour la multiplication des polynômes situés sous le signe radical. Soient A et B deux polynômes quelconques, et soit trouvé

$$A\times B=P;$$

il ne faudra pas conclure $\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{P}$; mais seulement

$$\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{B}=(\sqrt[n]{P})_{\frac{\sigma}{n}}.$$

Ce qui se réduit à dire que le produit est quelqu'une des racines de l'équation $x^n=P$, sans déterminer laquelle.

---

65. Je dirai deux mots sur le calcul des logarithmes. Le logarithme d'un chemin doit se composer de deux parties : le logarithme proprement dit, ou logarithme de la longueur; et le prime-directeur, qui peut être considéré comme le logarithme de la direction.

Soit, par exemple,

$$x=7_{\frac{1}{2}}\times-15\times10\times1_{\frac{2}{3}};$$

je fais

$$\log 7_{\frac{1}{2}}=0,84509804_{\prime\prime}\tfrac{1}{2},$$
$$\log 15_2=1,17609126_{\prime\prime}2,$$
$$\log 10=1,00000000_{\prime\prime}0,$$
$$\log 1_{\frac{2}{3}}=0,00000000_{\prime\prime}\tfrac{3}{3},$$
$$\text{somme}=3,02118930_{\prime\prime}3\tfrac{1}{6};$$
$$\text{d'où,}\quad \log x=3,02118930_{\prime\prime}3\tfrac{1}{6}.$$

Le logarithme 3,0211893o répond dans les tables au nombre 1050; donc,

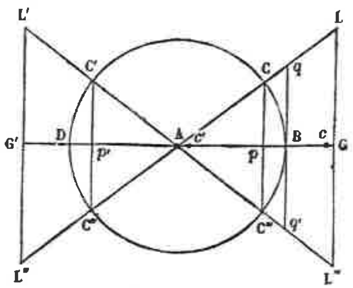
$$x = 1050_{3\frac{1}{6}}.$$

TRIGONOMÉTRIE.

66. Dans la Géométrie directive, toutes les lignes trigonométriques doivent être considérées comme des chemins. Soit

$$AB = \text{posit.} = 1 \quad (\textit{fig. } 9):$$

Fig. 9.



et soit, ang. $ABC = C$, $ABC' = C'$, $ABCC'C'' = C''$,

et $ABCC'C''C''' = C'''$; on aura :

$$\text{cosin } C = \text{cosin } C''' = Ap = \text{posit.}$$
$$\text{cosin } C' = \text{cosin } C'' = Ap' = \text{nég.}$$

$$\text{sin vers } C = \text{sin vers } C''' = p\,B = \text{posit.}$$
$$\text{sin vers } C' = \text{sin vers } C'' = p'\,B = \text{posit.}$$

$$\sin C = \sin C' = pC = p'C' = pc_1 = (\text{pos.})_1 = \text{pos.} \times \sqrt{-1}.$$
$$\sin C'' = \sin C''' = p'C'' = pC''' = pc_3 = (\text{pos.})_3 = \text{pos.} \times - \sqrt{-1},$$
ou, $\qquad = (pc')_1 = (\text{nég.})_1 = \text{nég.} \times \sqrt{-1}.$

$$\text{tang } C = \text{tang } C'' = Bq = (\text{pos.})_1 = \text{pos.} \times \sqrt{-1}.$$
$$\text{tang } C''' = \text{tang } C' = Bq' = (\text{pos.})_3 = \text{pos.} \times -\sqrt{-1},$$
ou, $\qquad = (\text{nég.})_1 = \text{nég.} \times \sqrt{-1}.$

$$\text{séc } C = Aq = (\text{posit.})_C.$$
$$\text{séc } C''' = Aq' = (\text{posit.})_{C'''}.$$
$$\text{séc } C' = Aq' = (\text{pos.})_{C'+2} = -(\text{pos.})_{C'} = (\text{nég.})_{C'}.$$
$$\text{séc } C'' = Aq = (\text{pos.})_{C''-2} = -(\text{pos.})_{C''} = (\text{nég.})_{C''}.$$

67. Donc, en général,

$$\text{cosin } x = \text{posit.} \quad \text{ou} \quad \text{négat.} = \text{parallèle.}$$
$$\text{sin vers } x = \text{posit.}$$
$$\sin x = (\text{posit.})_1 \quad \text{ou} \quad (\text{nég.})_1 = (\text{paral.})_1.$$
$$\text{tang } x = (\text{posit.})_1 \quad \text{ou} \quad (\text{nég.})_1 = (\text{paral.})_1.$$
$$\text{séc } x = (\text{posit.})_2 \quad \text{ou} \quad (\text{nég.})_2 = (\text{paral.})_2.$$

Donc,

$$(\sin x)_{-1} = \text{posit.} \quad \text{ou} \quad \text{négat.} = \text{paral.}$$
$$(\text{tang } x)_{-1} = \text{posit.} \quad \text{ou} \quad \text{négat.} = \text{paral.}$$
$$(\text{séc } x)_{-2} = \text{posit.} \quad \text{ou} \quad \text{négat.} = \text{paral.}$$

Notation $a_=$.

68. Soit

$$(\sin x)_= = \sin(x)_{-1}, \quad (\text{tang } x)_= = (\text{tang } x)_{-1}, \quad (\text{séc } x)_= = (\text{séc } x)_{-2};$$

il résultera

$$(\sin x)_= = \text{parallèle}, \quad (\text{tang } x)_= = \text{parallèle},$$

et $\qquad (\text{séc } x)_= = \text{parallèle}.$

La notation $(\sin x)_=$ se lit : *sin* x *parallèle*. En général, $a_=$ exprimera un chemin parallèle à l'unité, et de même longueur que a.

Le signe = employé de cette manière, s'appellera *mi-déverseur*.

Donc,

$$\sin x = (\sin x)_{=1}, \quad \tang x = (\tang x)_{=1},$$

et

$$\text{séc}\, x = (\text{séc}\, x)_{=x}.$$

Il est évident que

$$\text{cosin}\, x = (\text{cosin}\, x)_=,$$

et

$$\text{sin vers}\, x = (\text{sin vers}\, x)_=.$$

Puis,

$$AC = AB_C = 1_C :$$
$$AC' = AB_{C'} = 1_{C'} :$$
etc.;

donc, en général, le premier rayon de x étant 1, le second est 1_x.

69.
$$Ap + pB = AB = 1,$$
$$Ap' + p'B = AB = 1;$$

donc, en général,

$$\text{cosin}\, x + \text{sin vers}\, x = 1.$$

D'où,

$$\text{sin vers}\, x = 1 - \text{cosin}\, x.$$

70.
$$AC = Ap + pC,$$
$$AC' = Ap' + p'C',$$
etc.;

donc, en général,

$$1_x = \text{cosin}\, x + \sin x.$$

Ou,

$$1_x = (\text{cosin}\, x)_= + (\sin x)_{=1}.$$

71.
$$Aq = AB + Bq,$$
$$Aq' = AB + Bq',$$
etc.;

donc, en général,

$$\text{séc}\, x = 1 + \tang x.$$

Ou,

$$(\text{séc}\, x)_{=x} = 1 + (\tang x)_{=1}.$$

---

72. Les triangles ApC, ABq sont semblables, même comme directifs, parce que chaque côté de l'un est concurrent avec son correspondant dans l'autre : Ap concurrent avec AB, pC avec Bq, et CA avec qA. Donc,

$$Ap : AB :: pC : Bq :: CA : qA;$$

d'où,

$$Ap : AB :: pC : Bq :: AC : Aq.$$

On verra de même que les triangles $AC'''pA$, $Aq'BA$ sont semblables; ce qui donne

$$AC''' : Aq' :: C'''p : q'B :: pA : BA;$$

d'où,

$$Ap : AB :: pC''' : Bq' :: AC''' : Aq'.$$

Les deux triangles $AC'p'A$, $Aq'BA$ sont semblables, même comme directifs, parce que chaque côté de l'un est opposé à son correspondant dans l'autre; AC′ opposé à A q', C′p' à q'B et p'A à BA. Donc,

$$AC' : Aq' :: C'p' : q'B :: p'A : BA\,;$$

d'où,

$$Ap' : AB :: p'C' : Bq' :: AC' : Aq'.$$

On verra de même que les triangles Ap'C″A, ABqA sont semblables, et donnent

$$Ap' : AB :: p'C'' : Bq :: AC'' : Aq.$$

De tout cela, il résulte en général :

$$\text{cosin}\,x : 1 :: \sin x : \text{tang}\,x :: 1_x : \text{séc}\,x.$$

D'où l'on peut déduire

$$\text{cosin}\,x : \sin x :: 1 : \text{tang}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}\,:$$

$$\text{cosin}\,x : 1_x :: 1 : \text{séc}\,x = \frac{1_x}{\text{cosin}\,x}.$$

---

73. Nous avons vu que

$$1_x = \text{cosin}\,x + \sin x \quad (\text{n}^\circ\ 70)\,:$$

on aura donc pareillement

$$1_z = \text{cosin}\,z + \sin z\,:$$

multipliant ces deux équations membre à membre :

$$1_{x+z} = \cos x.\cos z + \sin x.\cos z + \cos x.\sin z + \sin x.\sin z\,:$$

mais, par le même principe, on doit avoir :

$$1_{x+z} = \cos(x+z) + \sin(x+z)\,;$$

d'où, en substituant,

$$\cos(x+z) + \sin(x+z) = \text{cosin}\,x.\cos z + \sin x.\cos z + \cos x.\sin z + \sin x.\sin z.$$

On peut traduire cette équation comme il suit :

$$[\cos(x+z)]_{=} + [\sin(x+z)]_{=1} = (\cos x)_{=} \times (\cos z)_{=} + (\sin x)_{=1} \times (\cos z)_{=} + (\cos x)_{=} \times (\sin z)_{=1} + (\sin x)_{=1} \times (\sin z)_{=1}\,;$$

réduisant et transposant :

$$[\text{cosin}(x+z)]_{=} - (\cos x.\cos z)_{=} + (\sin x.\sin z)_{=}\,(^*) = -[\sin(x+z)]_{=1} + (\sin x.\cos z)_{=1} + (\cos x.\sin z)_{=1}.$$

Les deux membres de cette équation sont égaux à zéro; car si cela n'était pas, ces deux membres seraient deux chemins formant un angle droit : or, deux chemins formant un angle droit ne peuvent pas être égaux; donc, etc. Mais, ces deux membres étant égaux à zéro, voici ce qui en résulte :

$$\text{cosin}(x+z) = \cos x.\cos z - (\sin x)_{=}.(\sin z)_{=},$$
$$[\sin(x+z)]_{=} = (\sin x)_{=}.\cos z + \cos x.(\sin z)_{=}.$$

Ces deux équations sont celles que l'on trouve dans la Géométrie ordinaire; car, ce que nous appelons ici ($sinus$)$_{=}$ est ce qu'on appelle là (*sinus*).

Si nous voulons dégager ces équations du signe mi-déverseur, faisons

$$(\text{sinus})_{=} = (\text{sinus})_{-1}\,;$$

(*) Car, $(\sin x)_{=1} \times (\sin z)_{=1} = -(\sin x.\sin z)_{=}$.

observons, par rapport à la première, que

$$-(\sin x)_{-1}\times(\sin z)_{-1} = -(\sin x.\sin z)_{-2}$$
$$= +\sin x \sin z:$$

multiplions toute la seconde par 1_1; et nous aurons

$$\operatorname{cosin}(x+z) = \cos x.\cos z + \sin x.\sin z,$$
$$\sin(x+z) = \sin x.\cos z + \cos x.\sin z.$$

Application de la Trigonométrie aux opérations des calculs.

74. L'équation $1_x = \cos x + (\sin x)_{=1}$ (n° 70), fournit le moyen de ramener toutes les racines de l'équation $x^n = 1$ à la forme $a + b\sqrt{-1}$. Nous avons vu que les racines de l'équation $x^n = 1$ sont $1_{\frac{\sigma}{n}}$; or,

$$1_{\frac{\sigma}{n}} = \operatorname{cosin}\cdot\frac{\sigma}{n} + \left(\sin\frac{\sigma}{n}\right)_{=1} = \cos\frac{\sigma}{n} + \left(\sin\frac{\sigma}{n}\right)_{=}\sqrt{-1}.$$

(Il faut se rappeler que $\sigma = 0, 4q, 8q, 12q$, etc.) Ainsi, les racines de

$$x^3 = 1,$$

sont

$$\cos 0 + (\sin 0)_{=1},$$
$$\cos\frac{4}{3} + \left(\sin\frac{4}{3}\right)_{=1},\quad \cos\frac{8}{3} + \left(\sin\frac{8}{3}\right)_{=1}.$$

Ou,

$$\cos 0^\circ + (\sin 0^\circ)_{=1},$$
$$\cos 120^\circ + (\sin 120^\circ)_{=1},\quad \cos 240^\circ + (\sin 240^\circ)_{=1}.$$

Ou,

$$1,\quad -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ou

$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

De même, les racines de $x^5 = 1$, sont

$$1,\quad \cos\frac{4}{5} + \left(\sin\frac{4}{5}\right)_{=1},\quad \cos\frac{8}{5} + \left(\sin\frac{8}{5}\right)_{=1},$$
$$\cos\frac{12}{5} + \left(\sin\frac{12}{5}\right)_{=1},\quad \cos\frac{16}{5} + \left(\sin\frac{16}{5}\right)_{=1}.$$

Ou,

$$1,\quad \cos 72^\circ + (\sin 72^\circ)_{=1},\quad \cos 144^\circ + (\sin 144^\circ)_{=1},$$
$$\cos 216^\circ + (\sin 216^\circ)_{=1},\quad \cos 288^\circ + (\sin 288^\circ)_{=1}.$$

---

75. En général,

$$a_r = a.\operatorname{cosin} r + a.\sin r.$$

Car,

$$a_r = a \times 1_r,\quad \text{or,}\quad 1_r = \operatorname{cosin} r + \sin r \text{ (n° 70)},$$

donc; etc.

Tout chemin peut être ramené à la forme :

$$\pm p_+ \pm q_{+1},\quad \text{ou}\quad p_= + q_{=1}.$$

Soit a_+ la longueur de ce chemin, et r le prime-directeur; ce chemin sera

$$a_{+r} = a_+ \times \operatorname{cosin} r + a_+ \times \sin r:$$

or, il est évident que le premier terme de ce binôme est parallèle à l'unité, et le second perpendiculaire.

76. *Problème.* Faire l'addition de deux chemins dont l'un est parallèle à l'unité, et l'autre perpendiculaire. C'est-à-dire résoudre l'équation

$$\pm a \pm b_1 = x_u,$$

x et u étant les inconnues : a, b et x étant des quantités positives, dont les deux premières, a et b, sont connues.

Solution. Soit,

$+a = \text{AG}$ (*fig.* 9) ou $-a = \text{AG}'$; $+b_1 = \text{GL}$

ou $= \text{G}'\text{L}'$, ou $-b_1 = \text{GL}'''$ ou $\text{G}'\text{L}''$;

x_u sera $=$ à AL, ou AL′, ou AL″, ou AL‴; et u sera l'angle ABC, ou ABC′, ou ABC′C″, ou ABC′C″C‴.

Dans tous les cas,

$$\frac{\pm b_1}{\pm a} = \frac{\sin u}{\cos u} = \text{tang}\, u; \quad \frac{b}{a} = (\text{tang}\, u)_+.$$

Ayant la tangente de u, on pourra trouver l'angle u lui-même, par le moyen des tables, et en ayant égard aux signes de a et de b. Je suppose que la tangente trouvée réponde dans les tables à 30°;

si l'on a $+a+b_1$, on fera $u = 30°$:

si l'on a $-a+b_1$, on fera $u = 180° - 30° = 150°$:

si l'on a $+a-b_1$, on fera $u = 360° - 30° = 330°$:

si l'on a $-a-b_1$, on fera $u = 180° + 30° = 210°$.

On a ensuite

$$\begin{aligned} \text{AL} &: \text{AC} :: \text{AG} : \text{A}p, \\ \text{AL}' &: \text{AC}' :: \text{AG}' : \text{A}p', \end{aligned}$$

etc.;

dans tous les cas,

$$x_u : 1_u :: \pm a : \text{cosin}\, u;$$

d'où, $$x : 1 :: \pm a : \text{cosin}\, u;$$

d'où, $$x = \frac{\pm a}{\text{cosin}\, u}.$$

Connaissant u, on pourra donc trouver x, et le problème sera résolu.

On peut encore le résoudre par les équations suivantes :

$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\text{cosin}\, u = \frac{\pm a}{x},$$

$$(\sin u)_= = \frac{\pm b}{x}.$$

---

77. *Problème.* Faire l'addition de deux chemins de directions quelconques.

Soient p et q les longueurs, et r, s les prime-directeurs (n° **61**) de ces chemins; il s'agit de résoudre l'équation

$$p_r + q_s = x_u,$$

dans laquelle x est une longueur inconnue, et u un prime-directeur inconnu.

On a (n° **75**),

$$p_r = p \cdot \cos r + p \cdot \sin r,$$
$$q_s = q \cdot \cos s + q \cdot \sin s;$$

d'où,

$$x_u = (p \cdot \cos r + q \cdot \cos s) + (p \cdot \sin r + q \cdot \sin s);$$

mais il est évident que l'on peut faire

$$p\,.\cos r+q\,.\cos s=\text{parallèle}=\pm a,$$
$$p\,.\sin r+q\,.\sin s=\text{perpend.}=\pm b_1;$$

d'où, $$x_u=\pm a\pm b_1,$$

équation dans laquelle a et b sont positifs. Or, nous venons de voir la manière de résoudre cette équation; donc, nous pouvons faire l'addition de deux chemins quelconques, c'est-à-dire réduire, par le calcul, un binôme et un monôme.

Tous, ou à peu près tous les principes que j'ai exposés jusqu'ici, relativement à la science des calculs, vont trouver leur application dans le problème suivant.

PROBLÈME.

78. *Résoudre l'équation du 3ᵉ degré*

$$x^3+px+q=0\ldots \tag{1}$$

En faisant $x=y+z$, on trouve, par divers procédés assez connus,

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ldots \tag{2}$$

$$z^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ldots \tag{3}$$

et $$y\times z=-\frac{p}{3}\ldots \tag{4}$$

Soit, pour abréger,

$$y^3=\text{A} \text{ et } z^3=\text{B},$$

A et B étant par conséquent des quantités connues. On déduira (nᵒˢ 62 et 54),

$$y=(\sqrt[3]{\text{A}})_{\frac{\sigma'}{3}},\quad z=(\sqrt[3]{\text{B}})_{\frac{\sigma''}{3}},$$

et les deux quantités σ', σ'' dépendront l'une de l'autre, à cause de l'équation (4), de laquelle il résulte

$$(\sqrt[3]{\text{A}})_{\frac{\sigma'}{3}}\times(\sqrt[3]{\text{B}})_{\frac{\sigma''}{3}}=-\frac{p}{3}=\frac{p_2}{3},$$

ou $$(\sqrt[3]{\text{A}}+\sqrt[3]{\text{B}})_{\frac{\sigma'+\sigma''}{3}}=\tfrac{1}{3}p_2\ldots \tag{5}$$

Il est facile de s'assurer que

$$\text{A}\times\text{B est}=\text{à}-\frac{p^3}{27}=\frac{1}{27}p_2^3;$$

d'où il résulte que le produit $\sqrt[3]{\text{A}}\times\sqrt[3]{\text{B}}$ est un chemin de même longueur que $\frac{1}{2}p$, ou que $-\frac{1}{3}p$ (comme on voudra). Mais il ne faut pas conclure de là que ce produit soit égal à $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3}$ (nᵒ 64); et encore moins qu'il soit égal à $-\frac{1}{3}p$ (nᵒ 58); tout ce qu'on peut conclure, c'est que ce produit est égal à

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3}\right)_{\frac{\sigma}{3}}=\frac{1}{3}p_{\frac{2+\sigma}{3}}.$$

Le moyen le plus simple, dans ces sortes de calculs, c'est de mettre en évidence les prime-directeurs des divers chemins. Soit donc

$$\text{A}=\text{A}_{+\alpha},\quad \text{B}=\text{B}_{+\beta}\ \text{ et }\ p=p_{+\pi}\ (\text{n}^\circ\ 61);$$

on a

$$y=(\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha+\sigma'}{3}},\qquad z=(\sqrt[3]{B_+})_{\frac{\beta+\sigma''}{3}}.$$

Il faut que le produit de ces deux quantités soit égal à $-\frac{1}{3}p$, ou $\frac{1}{3}p_{+\pi+2}$, ce qui exige deux choses :

1° $$\sqrt[3]{A_+}\times\sqrt[3]{B_+}=\frac{1}{3}p_+ :$$

2° $$\frac{\alpha+\sigma'}{3}+\frac{\beta+\sigma''}{3}\stackrel{\prime}{=}\pi+2$$

De ces deux conditions, nous savons que la première est satisfaite; il nous suffit donc de satisfaire à la seconde. Nous avons deux inconnues σ' et σ'', et une seule équation; il faut donc que l'une de ces deux inconnues reste arbitraire (nº 62).

Prenons σ' pour arbitraire, et nous satisferons à la condition en faisant

$$\frac{\beta+\sigma''}{3}=\pi+2-\frac{\alpha+\sigma'}{3}=\frac{3\pi-\alpha+6-\sigma'}{3}.$$

On aura donc

$$y=(\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha+\sigma'}{3}},\qquad z=(\sqrt[3]{B_+})_{\frac{3\pi-\alpha+6-\sigma'}{3}}.$$

d'où

$$x=(\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha+\sigma'}{3}}+(\sqrt[3]{B_+})_{\frac{3\pi-\alpha+6-\sigma'}{3}}.$$

On trouvera les diverses valeurs de x en faisant successivement $\sigma'=0$, $\sigma'=4$, $\sigma'=8$, $\sigma'=12$, etc.; mais de tout cela il ne résultera que trois valeurs différentes pour x; car il n'en résultera que trois pour le verseur $\frac{\sigma'}{3}$, lesquelles sont

$$0,\quad \frac{4}{3}\quad\text{et}\quad\frac{8}{3}.$$

En effet, $\frac{12}{3}$ se réduit à 4 qui est $\stackrel{\prime}{=}$ à 0,

$$\frac{16}{3}=4\,\frac{4}{3}\stackrel{\prime}{=}\frac{4}{3},\quad \frac{20}{3}=4+\frac{8}{3}\stackrel{\prime}{=}\frac{8}{3},\quad \text{etc., etc.}$$

Ainsi, x n'a que trois valeurs, qui sont

1° $$x=(\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha}{3}}+(\sqrt[3]{B_+})_{\frac{3\pi-\alpha+6}{3}},$$

2° $$x=(\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha+4}{3}}+(\sqrt[3]{B_+})_{\frac{3\pi-\alpha+2}{3}},$$

3° $$x=(\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha+8}{3}}+(\sqrt[3]{B_+})_{\frac{3\pi-\alpha-2}{3}}.$$

Telles sont les trois valeurs générales de x. (Nous les désignerons par P.)

Maintenant, descendons dans quelques cas particuliers.

Soit d'abord, $q=$*posit.* ou *nég.*, et $p=$*posit.* Alors

$$A=\textit{posit}=A_+;\quad \text{d'où } \alpha=0 :$$
$$B=\textit{nég}=B_{+2};\quad \text{d'où } \beta=2 :$$

puis, $$p=p_+;\quad \text{d'où } \pi=0.$$

Donc, dans ce cas,

$$x=\sqrt[3]{A_+}+(\sqrt[3]{B_+})_2,$$
$$x=(\sqrt[3]{A_+})_{\frac{4}{3}}+(\sqrt[3]{B_+})_{\frac{2}{3}},$$
$$x=(\sqrt[3]{A_+})_{\frac{8}{3}}+(\sqrt[3]{B_+})_{\frac{10}{3}}.$$

La première de ces trois valeurs est parallèle à l'unité. Les deux autres sont obliques; mais elles n'en sont pas moins réelles pour cela. On peut calculer ces valeurs obliques par le procédé du n° 77.

Soit, en second lieu,

$$q = posit., \quad p = négat., \quad \text{et} \quad \frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{4}.$$

On aura

$$A = négat. = A_{+2}; \quad \alpha = 2:$$
$$p = p_{+2}; \quad \pi = 2;$$

d'où l'on peut déduire les valeurs de x.

Soit, en troisième lieu,

$$q = négat., \quad p = négat.$$

et

$$\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{4}.$$

On aura

$$A = posit. = A_{+0}; \quad \alpha = 0:$$
$$p = p_{+2}; \quad \pi = 2;$$

d'ou l'on déduira facilement les valeurs de x.

Arrivons au cas dit irréductible. Soit donc,

$$q = posit. \text{ ou } négat., \quad p = négat.,$$

et

$$\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{4}.$$

Faisons, pour simplifier,

$$-\frac{q}{2} = \pm m, \quad \text{et} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -n = n_2,$$

m et n étant des chemins positifs; nous aurons

$$A_{+\alpha} = \pm m + (\sqrt{n})_1, \quad B_{+\beta} = \pm m - (\sqrt{n})_1.$$

Si l'on fait $\pm m = AG$ ou $= AG'$ (*fig.* 9),

et $(\sqrt{n})_1 = GL$ ou $= G'L'$;

d'où $A_{+\alpha} = AL$ ou $= AL'$;

et $\alpha = ABC$ ou $= ABCC'$,

il résultera

$$-(\sqrt{n})_1 = GL''' \quad \text{ou} \quad = G'L'';$$
$$B_{+\beta} = AL''' \quad \text{ou} \quad = AL'';$$
$$\beta = ABCC'C''C''' \quad \text{ou} \quad = ABCC'C'';$$

donc, $B_+ = A_+$, et $\beta = 4 - \alpha$.

De plus, $p = p_{+2}$; d'où $\pi = 2$;

$$\text{d'où} \quad \frac{3\pi - \alpha + 6}{3} = \frac{12 - \alpha}{3} = 4 - \frac{\alpha}{3} \doteq -\frac{\alpha}{3},$$

$$\frac{3\pi - \alpha + 2}{3} = \frac{8 - \alpha}{3} = \frac{12 - 4 - \alpha}{3} \doteq -\frac{\alpha + 4}{3},$$

$$\frac{3\pi - \alpha - 2}{3} = \frac{4 - \alpha}{3} = \frac{12 - 8 - \alpha}{3} \doteq -\frac{8 + \alpha}{3};$$

donc, les trois valeurs de x sont (à cause de $B_+ = A_+$)

$$x = (\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha}{3}} + (\sqrt[3]{A_+})_{-\frac{\alpha}{3}},$$

$$x = (\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha+4}{3}} + (\sqrt[3]{A_+})_{-\frac{\alpha+4}{3}},$$

$$x = (\sqrt[3]{A_+})_{\frac{\alpha+8}{3}} + (\sqrt[3]{A_+})_{-\frac{\alpha+8}{3}}.$$

Mais en général,

$$a_r + a_{-r} = a.\cos r + a.\sin r + a\cos(-r) + a\sin(-r):$$

et, $\cos(-r) = \cos r$, $\sin(-r) = -\sin r$;

d'où, $a_r + a_{-r} = a.\cos r + a.\cos r = 2a\cos r$;

donc dans le cas qui nous occupe,

$$x = 2\sqrt[3]{A_+}\ \text{cosin}\frac{\alpha}{3},$$

$$x = 2\sqrt[3]{A_+}.\text{cosin}\frac{\alpha+4}{3},$$

$$x = 2\sqrt[3]{A_+}.\text{cosin}\frac{\alpha+8}{3}.$$

Ces formules font voir bien clairement que les trois valeurs de x sont parallèles à l'unité (réelles). Pour trouver ces racines, toute la difficulté se réduit à calculer les deux quantités A_+ et α; or on les déduira de l'équation

$$A_{+\alpha} = \pm m + (\sqrt{n})_1,$$

qui donne (n° 76)

$$\text{tang}.a = \frac{\sqrt{n}}{\pm m} = \frac{\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}{-\frac{q}{2}}:$$

$$A_+ = \frac{\pm m}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{q}{2}}{\cos\alpha}.$$

Ou bien on fera

$$A^2_+ = m^2 + n^2 = +\frac{q^2}{4} + \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right) = \frac{-p^3}{27};$$

d'où,

$$A_+ = \sqrt{\frac{-p^3}{27}} = \sqrt{\frac{p^3_+}{27}};\quad \sqrt[3]{A_+} = \sqrt{\frac{p_+}{3}}.$$

Si l'on commence par trouver A_+ de cette manière (ou plutôt $\sqrt[3]{A_+}$), on trouvera ensuite α par l'équation suivante :

$$\text{cosin}\,\alpha = -\frac{\frac{q}{2}}{A_+}.$$

On voit que, par cette méthode, le cas *irréductible* est le plus facile à résoudre.

Les limites de cet aperçu ne me permettent pas d'entrer dans de plus grands détails; j'observerai seulement que la solution générale, telle que je viens de la donner (par les formules P) n'est pas seulement applicable aux coefficients parallèles à l'unité (réels); elle est également applicable aux coefficients obliques ou perpendiculaires (imaginaires), Ainsi l'on peut résoudre l'équation

$$x^3 + (a + b\sqrt{-1})x + c + d\sqrt{-1} = 0;$$

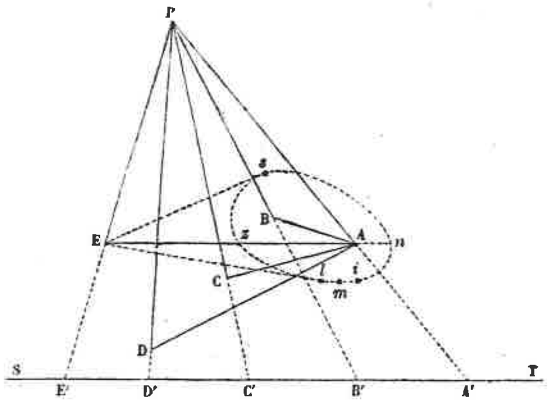
ou, $$x^3 + p_{+r}x + q_{+s} = 0.$$

Le lecteur verra facilement comment on doit traiter la résolution de l'équation du 4^e degré.

Des racines des équations.

79. *Problème.* Étant donnés de position plusieurs points A, B, C, D, E (*fig.* 10), en nombre quel-

Fig. 10.



conque n, et la direction positive ST étant déterminée, trouver un point P tel que, si l'on tire les chemins AP, BP, CP, DP, EP, leur produit soit égal à un chemin donné g.

Explication. Soient

$$AP = x_{+u},\ BP = x'_{+u'},\ CP = x''_{+u''},\ \text{etc., et}\ g = g_{+r};$$

pour satisfaire au problème, il faut deux conditions :

$$1^{\circ} \qquad x_{+} \times x'_{+} \times x''_{+} \times \ldots\ldots = g_{+},$$

$$2^{\circ} \qquad u + u' + u'' + \ldots \doteq r.$$

Les quantités x_{+}, x'_{+}, x''_{+}, etc., sont les longueurs des chemins AP, BP, CP, etc. Si ST est la direction

positive, et si l'on prolonge les chemins ci-dessus jusqu'à leurs rencontres A', B', C', etc., avec ST, les angles directifs A'TP, B'TP, C'TP, etc., seront les prime-directeurs u, u', u'', etc.

Solution. On a

$$BP = BA + AP,$$
$$CP = CA + AP,$$
$$DP = DA + AP,$$
etc.

Les chemins BA, CA, DA, etc., sont connus de longueurs et de directions, puisque les points A, B, C, etc., sont donnés. Soit donc, pour abréger,

$$BA = b,\quad CA = c,\quad DA = d,\ \text{etc., et}\quad AP = x;$$

on aura, d'après l'énoncé,

$$x \times (b + x) \times (c + x) \times (d + x) \times \ldots\ldots = g.$$

En développant,

$$\begin{array}{l|l|l} x^n + b & x^{n-1} + bc & x^{n-2} + \ldots + (bcd\ldots.)\,x - g = 0. \\ \quad + c & \quad + cd & \\ \quad + d & \quad + bd & \\ \quad + \ldots & \quad + \ldots & \end{array}$$

(Nous appellerons cette équation A.)

Ainsi, la solution du problème dépend de la résolution d'une équation d'un degré égal au nombre des points donnés A, B, C....

Si tout problème de cette nature peut être résolu, au moins d'une manière, et si toute équation à une seule inconnue est la traduction d'un problème de cette nature, il s'ensuivra que *toute équation a au moins une racine*, et que cette racine est un chemin de la nature de a_{+u}. Tâchons de démontrer affirmativement les deux prémisses de ce syllogisme.

Commençons par la première : *Tout problème de cette nature peut être résolu, au moins d'une manière.* Il s'agit de démontrer qu'il sera toujours possible de satisfaire aux deux conditions :

$$x_+ \times x'_+ \times x''_+ \times \ \ldots = g_+,$$
$$u + u' + u'' + \ldots \ \stackrel{\prime}{=} r.$$

Si l'on voulait se borner à la première condition, l'on pourrait y satisfaire en donnant à x, c'est-à-dire à AP, telle direction que l'on voudrait, et choisissant convenablement la distance de A à P. Je le prouve.

Appelons AN la direction sur laquelle vous prendrez AP. Si vous placez d'abord P au point A, la distance $AP = x_+$ sera nulle, et par conséquent le produit $x_+ \times x'_+ \times \ldots$ sera nul. Si, au contraire, vous placez P indéfiniment loin de A, et par conséquent indéfiniment loin de tous les autres points donnés B, C, D, etc., le produit $x_+ \times x'_+ \times x''_+ \times \ldots$ sera indéfiniment grand. Donc, si vous placez d'abord P en A et que vous le fassiez mouvoir selon la direction choisie AN, le produit $x_+ \times x'_+ \times x''_+ \times \ldots$ passera de la valeur zéro à une valeur indéfiniment grande. Mais, le mouvement de P étant continu, les accroissements ou décroissements des quantités AP_+, BP_+, CP_+, etc., sont des mouvements continus; donc le produit de toutes ces quantités varie lui-même par un mouvement continu ; donc, il ne peut pas passer d'une valeur à une autre, sans passer par toute valeur intermédiaire : or, la quantité donnée g_+ est comprise entre zéro et l'indéfiniment grand; donc, lorsque le produit dont il

s'agit passe de la valeur zéro à la valeur indéfiniment grande, il passe par la valeur g_+ : mais, au moment où ce produit est égal à g_+, le point P est sur quelque point de la direction AN; donc, il y a sur cette direction un point tel qu'en y plaçant P, on satisfera à la première condition

$$x_+ \times x'_+ \times x''_+ \times \ldots = g_+.$$

Puisque la direction de AN est quelconque, il s'ensuit que si du point A on tire des rayons en tous sens (sur le plan), sur chaque rayon il se trouvera un point qui satisfera à la condition ci-dessus : or, la réunion de tous ces points est visiblement une courbe enveloppant le point A de toutes parts; donc il existe une courbe, enveloppant le point A, dont chaque point satisfait à la première condition

$$x_+ \times x'_+ \times x''_+ \times \ldots = g_+.$$

Il reste donc à démontrer que, parmi tous les points de cette courbe, il y en a un qui satisfait à la seconde condition

$$u + u' + u'' + \ldots \stackrel{\prime}{=} r.$$

Faisons mouvoir le point P sur la courbe que nous venons de découvrir (et que nous appellerons δ) et tâchons de démontrer que, par ce mouvement, la somme de $u + u' + u'' + \ldots$ passera d'une valeur $< r$, à une valeur $> r$, et cela par un mouvement continu; d'où nous conclurons qu'elle aura passé par la valeur r.

Représentons la courbe δ (dont la forme nous est très-inconnue) par *nszmn*.

Posons d'abord P en un point quelconque de δ, en m, par exemple.

Si nous mesurions les angles u, u', u'',... de droite à gauche, leur somme, qui serait positive, pourrait se trouver d'abord plus grande que r; mesurons tous ces angles, dans le principe, de gauche à droite; ils seront tous négatifs; leur somme sera négative; et comme r est positif, nous aurons

$$r = u + u' + u'' + \ldots + positif.$$

Faisons mouvoir le point P, de manière qu'il parcoure la courbe δ de droite à gauche pour le spectateur qui serait dans l'espace enveloppé, ce point allant successivement de m en n, de n en s, de s en z et de z en m.

Le point A étant enveloppé par la courbe, le chemin AP, qui sera d'abord Am, tournera en An, puis en As, en Az, et reviendra en Am; ainsi, il parcourra 4 angles droits positifs. Cela s'applique à tout chemin dont l'origine sera enveloppée par la courbe.

Il n'en est pas de même d'un chemin tel que EP, dont l'origine E est hors de la courbe. Ce chemin, qui sera d'abord Em, commencera par tourner en En, puis en Es, et par là, il décrira un angle positif Ems; mais ensuite il tournera de Es en Ez, et en Em, et par là il décrira un angle négatif de même grandeur que Ems; de sorte que la somme de ces deux angles sera précisément zéro.

Si nous supposions que quelqu'un des points A, B, C, .. se trouvât précisément sur la ligne courbe δ, en m, par exemple, le chemin mP suivrait encore une marche différente des deux précédentes. Prenons mi et ml indéfiniment petits. Le chemin mP sera successivement zéro, mi, mn, ms, mz, ml, et zéro. Il a tourné dans le sens positif, de mi en ml; il a décrit 2 angles droits. Supposé que le prime-directeur de mi soit v, celui de ml sera $v+2$. Mais si P continue de tourner, et passe subitement de la gauche de m à la droite, de l en i, le chemin mP passera subitement de la direction

ml à la direction mi; le prime-directeur passera subitement de la valeur $v+2$ à la valeur v, ou $v+4$. Il serait difficile de décider si cette dernière valeur sera v ou $v+4$; mais, dans l'une et l'autre hypothèse, il se présente une grande difficulté; c'est que le prime-directeur franchira subitement une distance de 2^q; d'où il résulte que la somme $u + u' + u'' + \ldots$. fera pareillement un saut : or, si un pareil événement était possible, nous ne pourrions pas établir notre démonstration. Heureusement cela ne peut pas arriver; aucun des points A, B, C,... ne peut se trouver situé sur la ligne courbe δ. Si l'on supposait que cela arrivât, le problème qui nous occupe n'aurait plus lieu. Supposons que C se trouve sur cette courbe δ; lorsqu'on placera P en ce point de la courbe, on aura

$$\text{CP} = 0; \quad \text{d'où} \quad x_+ \times x'_+ \times x''_+ \times \ldots = 0;$$

$$\text{d'où} \qquad g_+ = 0.$$

Ainsi, l'événement dont il s'agit ne peut avoir lieu que dans le cas de $g=0$. Mais, dans ce cas, la condition $x_+ \times x'_+ \times x''_+ \times \ldots = g_+$ sera satisfaite, pourvu qu'on place P dans l'un quelconque des points A, B, C, etc., et ne pourra être satisfaite d'aucune autre manière; il ne sera donc pas difficile de satisfaire à cette première condition du problème. Quant à la seconde condition, $u + u' + u'' + \ldots = r$, elle n'aura plus lieu; car, le chemin CP étant zéro, n'aura point de direction déterminée; l'angle directeur C'TP sera tout ce qu'on voudra; donc la somme $u + u' + u'' + \ldots$ sera elle-même indéterminée; il n'y aura donc pas lieu de la rendre égale à une quantité déterminée r. Donc, dans ce cas, le problème qui nous occupe n'a plus lieu, puisqu'on connaît d'avance la manière de satisfaire à la première condition, et que la seconde n'a plus lieu.

Donc, lorsque le problème a réellement lieu, aucun des points A, B, C,... ne peut se trouver sur la courbe δ.

Donc, lorsque P parcourra la courbe δ, chacun des angles directeurs u, u', u'', etc., variera par un mouvement continu, comme nous l'avons vu pour A'TP, et pour E'TP. Donc, la somme de tous ces prime-directeurs variera elle-même par un mouvement continu. Donc, si cette somme passe d'une valeur négative à une valeur positive indéfiniment grande, elle passera par la valeur donnée r, que je suppose positive (si elle était négative, on la rendrait positive, en y ajoutant 4^q, ou 8^q, etc.).

Le cas le plus défavorable est celui où le point A est seul dans l'espace enveloppé; c'est ce cas que je choisis. Tous les angles u, u', u'', etc., étant, dans le principe, mesurés de gauche à droite, comme je l'ai dit, sont négatifs, et leur somme est négative; soit $-s$ cette somme. Je suppose que P parcourt la courbe δ exactement; le chemin AP, qui a son origine dans l'espace enveloppé, décrira 4 angles droits, et chacun des autres chemins, ayant son origine hors de l'espace enveloppé (comme EP), décrira un angle égal à zéro (nous l'avons démontré tout à l'heure); donc la somme $u+u'+u''+\ldots$ deviendra égale à $-s+4$. Si P parcourt une seconde fois la courbe δ, la somme $u+u'+\ldots$ deviendra donc $=$ à $-s+4\times 2$. En continuant ce raisonnement, on verra que si P parcourt n fois la courbe δ (n étant un nombre entier), la somme $u+u'+\ldots$ deviendra égale à $-s+4\times n$. Concevons que n soit successivement 0, 1, 2, 3, 4,... à l'infini; la somme $u+u'+\ldots$ montera, par un mouvement continu, de la valeur $-s$, qui est négative, à une valeur positive indéfiniment grande; donc, elle passera par la valeur donnée r.

Il est vrai que, pour arriver à ce but, nous n'avons pas mesuré les angles u, u', etc., comme nous sommes convenus de mesurer ordinairement les angles directeurs, c'est-à-dire, de droite à gauche, et en les prenant plus petits que 4^q; mais réduisons chacun de ces angles à son expression ordinaire; à celui qui est négatif, ajoutons 4^q, ou 8^q, etc.; de celui qui est plus grand que 4^q, retranchons 4^q, ou 8^q, etc.; après tout cela, la somme $u+u'+u''+\ldots$ ne sera peut-être plus $=$ à r; mais elle sera $=$ à $r\pm 4$, ou à $r\pm 8$, ou, en un mot, $=$ à $r\pm\sigma$: or, toutes ces quantités $r\pm 4$, $r\pm 8$,... $r\pm\sigma$ sont $\stackrel{\prime}{=}$ à r (égales à r en tant qu'angles directeurs); donc, même après les réductions ou transformations que nous venons de faire, nous aurons encore

$$u+u'+u''+\ldots\stackrel{\prime}{=}r:$$

or, c'est tout ce qu'il faut pour satisfaire au problème.

Donc, sur la courbe δ, il y a un point Q tel que, si l'on y place P, on aura

$$u+u'+u''+\ldots=r.$$

Mais en quelque point de δ qu'on place P, on a

$$x_{+}\times x'_{+}\times x''_{+}\times\cdots g_{+};$$

donc, si l'on place P en Q, on aura

$$x_{+u}\times x'_{+u'}\times x''_{+u''}\times\ldots=g_{+r}.$$

Donc le problème peut être résolu au moins d'une manière.

Au lieu de tracer la courbe δ autour de A, nous pourrions également la tracer autour de B, et nous verrions que sur celle-ci il y aurait encore un point Q′ dont la position convient à P. Nous pourrions faire la même chose par rapport à chacun des points A, B, C, D, etc.; donc, non-seulement le problème peut être résolu, mais il peut être résolu d'autant de manières qu'il y a de points A, B, C, etc. Ces points étant en nombre n, le problème peut être résolu de n manières.

Donc l'inconnue x, ou AP, est susceptible de n valeurs.

Donc l'équation (A) (qui est du degré n) a un nombre n de racines.

Notre première prémisse est démontrée; tâchons d'établir la seconde : *Toute équation à une seule inconnue est la traduction d'un problème de cette nature.*

Cela revient à dire que toute équation du degré n peut être convertie dans la forme de l'équation (A), dans laquelle les quantités $b, c, d, \ldots$ sont en nombre $n-1$. Soit donnée l'équation

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + sx + t = 0$$

(nous la désignerons par B).

Pour la transformer dans l'équation (A), il s'agit de trouver des inconnues $b, c, d, \ldots$ en nombre $n-1$, qui satisfassent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} b + c + d + \ldots &= p, \\ bc + bd + cd \quad &= q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \\ bcd \ldots &= s : \end{aligned}$$

et faire $\qquad g = -t.$

Or, si l'on pose l'équation

$$(z-b)\times(z-c)\times(z-d)\times\ldots = 0,$$

dont les racines sont évidemment $b, c, d, \ldots$, en nombre $n-1$, en développant, on trouve

$$\begin{array}{r|r|l} z^{n-1} - b & z^{n-2} + bc & z^{n-3} - \ldots \pm (bcd\ldots) = 0; \\ -c & +bd & \\ -d & +cd & \\ -\,. & +\,.. & \end{array}$$

d'où, $\qquad z^{n-1} - pz^{n-2} + qz^{n-3} - \ldots \pm s = 0$

(équation C). Donc si cette équation (C) a réellement $n-1$ racines, ces racines seront les quantités cherchées $b, c, d, \ldots$; l'équation (B) pourra être transformée dans (A), et aura réellement n racines. Donc, si toute équation du degré $n-1$ a $n-1$ racines, toute équation du degré n a n racines. Or, nous savons que toute équation du 1^er^ degré a 1 racine; donc toute équation du 2^e^ degré en a 2; donc toute équation du 3^e^ degré en a 3; donc,... donc en général, toute équation a autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré.

Donc, à plus forte raison, toute équation a au moins une racine.

Donc encore, toutes les racines d'une équation quelconque, sont des chemins situés sur un même plan.

Remarquez que ces raisonnements ne sont pas seulement applicables au cas où les coefficients $p, q, r, s, \ldots$ sont parallèles à l'unité (réels), ils sont également applicables au cas où ces coefficients sont obliques ou perpendiculaires (imaginaires).

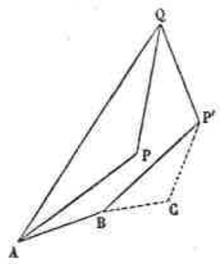
Je ne m'arrêterai pas à démontrer qu'une équation ne peut pas avoir plus de racines qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son degré; on le démontre dans les traités ordinaires d'Algèbre. Ce qui manquait à ce sujet, dans nos éléments, c'est la démonstration de cette proposition, *toute équation a au moins une racine.* Cette démonstration m'a paru si importante, que j'ai cru qu'on me saurait gré de la développer, comme je viens de le faire.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE A L'ANALYSE DES COURBES PLANES.

Coordonnées polaires.

80. D'un point constant A (*fig.* 11), choisi arbitrairement sur le plan, à un point quelconque Q de la courbe, soit tiré un chemin $AQ = q_{+r}$. Si vous faites

Fig. 11.



tourner ce chemin sur son origine A, en exigeant que le terme Q suive exactement la courbe, il faudra que la longueur q_+ varie avec l'angle r; à moins que la

courbe ne soit un cercle dont le centre soit en A. Si la courbe est régulière, comme il faut toujours le supposer en Géométrie, les variations de q_+ dépendront de celles de r; en d'autres termes, q_+ sera une fonction de r. On aura donc l'expression de la courbe, lorsque l'on aura l'expression de q_+ en r, c'est-à-dire, en *sin* r, *cosin* r, etc. On peut aussi exprimer q_+ par la longueur de l'arc qui mesure r, le rayon étant rendu invariable.

On peut faire

$$AQ = AP + PQ,$$

ou,

$$q_{+r} = x_{+s} + y_{+t}.$$

On peut prendre l'angle s pour première variable et unique arbitraire, établir une loi arbitraire, mais constante, qui détermine x_+ par s, et une autre qui détermine t par s; alors il ne restera à chercher que l'expression de y_+ en s, ou, ce qui revient au même, en s, x_+, t.

On peut faire

$$q_{+r} = x_{+s} + y_{+t} + z_{+u} + \ldots;$$

on établira ainsi des chemins de suite en tel nombre que l'on voudra, conduisant de A en Q.

Au lieu de chercher l'équation qui est propre à exprimer une courbe donnée, on peut chercher quelle est la courbe qui est exprimée par une équation donnée.

Soient $a, b, c, \ldots \beta, \gamma, \delta, \ldots$ des quantités constantes, je proposerai au lecteur de décrire et d'analyser les courbes exprimées par les équations suivantes :

$$AQ = a_r$$

(on voit assez que celle-là est le cercle),

$$AQ = a_r + b_{\beta r},$$
$$AQ = a_r + b_{\beta r}, + c_{\gamma r},$$
etc.

Ces équations, quoique très-simples, expriment une infinité de courbes fort intéressantes.

Coordonnées rectilignes.

Reprenons l'équation

$$AQ = AP + PQ,$$

ou $$q = x + y.$$

On peut déterminer et rendre invariable la ligne sur laquelle doit se prendre $x = AP$, en laissant seulement la liberté de prendre ce chemin x, dans les deux sens opposés que présente cette ligne. Si le prime-directeur de l'une de ces deux directions est α, celui de l'autre sera $\alpha + 2$; de sorte que x sera égal à $x_{+\alpha}$, ou à $x_{+\alpha+2}$, et dans tous les cas, $x = x_{=\alpha}$.

Au lieu de déterminer séparément la longueur et la direction de $y = PQ$, on peut les déterminer ensemble, en exprimant y par une formule en x.

81. Mais pour cela, il ne faut pas exiger que les y

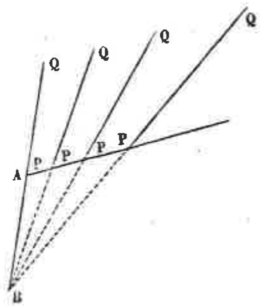
soient parallèles entre elles. Quand on n'aurait que l'équation très-simple (*fig.* 12),

$$PQ = BP = BA + AP,$$

ou $$y = a + x,$$

si le chemin $a = BA$ n'est pas sur la ligne de $x = AP$,

Fig. 12.



le chemin $y = BP = PQ$ changera de direction chaque fois que $x = AP$ changera de longueur.

Courbes du 2ᵉ *degré.*

82. Supposons que y dépende de x par l'équation complète du 2ᵉ degré à 2 inconnues

$$y^2 + Ay + Bxy + Cx^2 + Dx + E = 0$$

(équation 1).

Tâchons de simplifier cette équation en changeant de coordonnées. Soit (*fig.* 11),

$$AQ = AB + BP' + P'Q,$$

où $$x + y = f + x' + y' \ldots \text{ (équation 2)},$$

le chemin $f = AB$ étant une quantité constante dont nous nous réservons le droit de disposer à volonté.

Établissons maintenant une loi qui détermine x' par x. Pour cela examinons si nous pourrions faire

$$x' = h + x \times g,$$

ou $$BP' = BC + CP',$$

en faisant $BC = h =$ quantité constante,

$$CP' = AP \times g, \; g \text{ étant constant},$$

et nous réservant le droit de disposer arbitrairement des deux quantités g et h.

Nous ne pouvons pas faire cela dans le cas général, et sans restriction; car, si nous disposions de g et de h de manière que $h = BC$ ne se trouvât pas sur la ligne de $x \times g = CP'$, la quantité $x' = BP'$ changerait de direction chaque fois que $CP' = x \times g$ changerait de longueur (n° 81); et par conséquent chaque fois que $x = AP$ changerait de longueur; or, cela ne répondrait aucunement à notre but; nous voulons que la ligne des x' soit constante, comme celle des x.

Il faut donc nous borner à poser

$$x' = x \times g,$$

ou $$BP' = AP \times g,$$

en nous réservant le droit de disposer du nombre g (lequel peut être oblique par rapport à l'unité).

Quant à ce nombre g, il est facile de voir que, de quelque manière que nous en disposions, les x' seront sur une même ligne, comme les x.

Nous aurons donc $x = x' \times \frac{1}{g}$; mais pour simplifier,

nous ferons

$$x = x' \times l, \ldots \text{ (équation 3).}$$

De l'équation (2), et de cette équation (3), il résulte

$$y = y' + (1 - l)\, x' + f.$$

Si nous substituons ces valeurs de x et de y, dans l'équation (1), nous obtiendrons une équation dans laquelle nous pourrons faire disparaître tous les termes qui renfermeront y' à la première puissance. Pour cela, il suffira de faire

$$2(1 - l) + Bl = 0; \text{ d'où, } l = \frac{2}{2 - B}:$$

et $$2f + A = 0; \text{ d'où, } f = -\frac{A}{2}.$$

(Cela ne peut se trouver impossible que dans le cas de $B = 2$, qui donne $l = \frac{2}{0}$. Je ne m'arrêterai pas à ce cas particulier.)

En déterminant f et l de cette manière, on arrivera donc à une équation de la nature de celle-ci

$$y'^2 + A'x'^2 + B'x' + C' = 0.$$

Mettons-la sous la forme suivante

$$y^2 = a^2x^2 + b^2x + c^2 \ldots \; (5).$$

Il serait beaucoup trop long de discuter cette équation dans toute son étendue; je me bornerai à quelques cas particuliers (ceux qui appartiennent aux sections coniques).

1^er^ *cas.* $b = 0$.

Soit fait $\frac{c^2}{a^2} = d$; il vient

$$y = \pm a\sqrt{d + x^2}.$$

Les y ne seront parallèles entre elles que dans le cas où d sera sur la même ligne que x^2 (n° 81). Descendons encore à ce cas particulier.

Il se sous-divise en 2 cas : d concurrent avec x^2, et d opposé à x^2.

Soit d'abord d concurrent avec x^2; et soit, dans cette hypothèse,

$$x = x_{=\alpha}, \text{ et } d = d_{+2\alpha};$$

il vient, $$y = \pm a_\alpha \sqrt{d_+ + x^2_+}.$$

Les y seront parallèles entre elles, depuis $x = 0$, qui donne $y = \pm a_\alpha \sqrt{d_+}$, jusqu'à $x = \pm\infty$, qui donne $y = \pm a_\alpha \times \infty_+$. La courbe est une hyperbole, composée, comme à l'ordinaire, de deux branches. Les x prennent leur origine au centre, et sont situées sur un diamètre qui ne coupe pas la courbe.

Soit en second lieu, d opposé à x^2; et soit, dans cette hypothèse,

$$x = x_{=\alpha} \text{ et } d = -d_{+2\alpha};$$

il vient, $$y = \pm a_\alpha \sqrt{-d_+ + x^2_+}.$$

Si l'on fait croître x depuis zéro jusqu'à $\pm\sqrt{d_+}$, y décroîtra depuis $\pm a_\alpha \sqrt{-d_+}$, jusqu'à zéro, et restera constamment parallèle à une même ligne. La courbe décrite sera une ellipse.

Si l'on fait croître ensuite x, depuis $\pm\sqrt{d_+}$, jusqu'à

$\pm\infty$, y croîtra depuis zéro jusqu'à $\pm a_\alpha \times \infty_+$. Ces y seront parallèles entre elles, mais perpendiculaires aux précédentes. La courbe décrite sera une hyperbole, composée de ses deux branches.

2^e^ *cas.* Dans l'équation (5), $c = 0$.

Soit fait $\frac{b^2}{a^2} = e$; il vient

$$y = \pm a\sqrt{ex + x^2}.$$

Les y ne seront parallèles entre elles que dans le cas où e sera sur la ligne de x.

Mais dans ce cas particulier, si l'on fait $\frac{1}{2}e + x = x'$, les x' seront situées sur une même ligne, et l'on aura

$$ex + x^2 = -\frac{e^2}{4} + x'^2;$$

d'où, $$y = \pm a\sqrt{-\frac{e^2}{4} + x'^2},$$

équation qui est de même nature que celle du cas précédent.

3^e^ *cas.* Dans l'équation (5), $a = 0$.

Soit fait $\frac{c^2}{b^2} = f$; il vient

$$y = \pm b\sqrt{f + x}.$$

Les y ne seront parallèles entre elles que dans le cas où f sera sur la ligne de x.

Arrêtons-nous à ce cas particulier.

Faisons $$f + x = x',$$

ce qui s'accorde, dans le cas dont il s'agit, avec la condition que les x' soient sur une même ligne; nous aurons

$$y = \pm b \sqrt{x'}.$$

A cette équation l'on reconnaît la parabole. Si l'on fait croître x' dans les deux sens opposés, on aura deux paraboles, de formes différentes, qui s'étendront en sens opposés. Les y de l'une de ces paraboles seront perpendiculaires à celles de l'autre; mais les y de chacune de ces paraboles, seront parallèles entre elles.

On voit que, tant que les y seront parallèles entre elles, l'équation du 2ᵉ degré exprimera une section conique. Mais lorsque les y ne seront pas parallèles, la même équation exprimera une infinité de courbes différentes des sections coniques.

Observez que toute courbe dégénère en ligne droite, lorsque les y se trouvent parallèles aux x. Ainsi, par exemple, l'équation

$$y = \pm b_{+} \sqrt{x'_{=}}$$

exprimera une droite tant que x' sera positive.

Conclusion de cet ouvrage.

83. 1° Les limites dans lesquelles je me suis restreint m'ont forcé à passer sous silence plusieurs espèces de formules, telles sont celles-ci

$$a^{\sqrt{-1}},\ a_{\sqrt{-1}},\ \sin(\sqrt{-1}),\ \text{etc., etc., etc.}$$

Je les discute amplement dans mon grand ouvrage,

et je démontre que toutes expriment des lignes directives situées sur le même plan que 1 et $1_{/}$.

2° On peut considérer les chemins de trois manières: sur une même droite, sur un même plan, et enfin dans l'espace à trois dimensions. Dans le premier cas, la science n'embrassera que deux directions opposées, comme la positive et la négative; ce sera l'Algèbre ordinaire. Dans le second cas, la science embrassera tous les rayons du cercle; ce sera l'Algèbre dont j'ai tâché de donner une idée dans cet opuscule. Dans le troisième cas, la science embrassera tous les rayons de la sphère; ce sera un troisième degré d'Algèbre, qui surpassera celui que je viens d'esquisser, autant que ce lui-ci surpasse l'Algèbre ordinaire.

SUPPLÉMENT.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE A QUELQUES PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES.

84. Ce que j'ai dit dans le n° 20, sur l'art d'appliquer la théorie des chemins aux quantités de toutes espèces, peut avoir besoin d'être rendu sensible par quelques applications; mais ces sortes d'applications exigent toujours de longs développements : placées dans le corps de l'ouvrage, elles auraient trop interrompu le système général, et auraient peut-être empêché le lecteur d'en bien saisir l'ensemble ; c'est par cette considération que je me suis décidé à les renvoyer ici, sous la forme de supplément.

Problème. Pierre est âgé d'un nombre a d'années, et Jean d'un nombre a'; on demande à quelle époque l'âge de Jean sera égal au produit de l'âge de Pierre, multiplié par un nombre donné r.

Explication. Il se peut que l'âge de Jean ne doive jamais se trouver égal au produit de celui de Pierre par r, et que cela soit arrivé antérieurement : or, dans ce cas, il faut trouver à quelle époque cela est arrivé. Ainsi, l'époque demandée peut être indifféremment passée ou future.

Solution. Le temps étant représenté par une ligne, soit A le point qui représente le moment actuel (sans figure), E celui qui représente l'époque demandée,

P celui qui représente la naissance de Pierre, J celui qui représente la naissance de Jean, et représentons une année par une unité de chemin. Il est entendu que cette unité conduira du commencement de l'année à la fin, et non de la fin au commencement; d'où il suit que, sur la ligne qui représente le temps, tout chemin positif conduira du présent au futur, et en général, de l'antérieur au postérieur; et que tout chemin négatif conduira du postérieur à l'antérieur.

Le chemin PA conduisant de la naissance de Pierre au moment actuel, représente l'âge actuel de Pierre : mais chaque unité de PA représente une année; donc PA est égal au nombre des années de Pierre; c'est-à-dire que $PA = a$. On verra de même que $JA = a'$. Le chemin PE est le nombre des années qu'aura ou qu'a eues Pierre à l'époque E; et JE est le nombre des années qu'aura Jean à la même époque; donc, d'après l'énoncé,

$$JE = PE \times r.$$

Le chemin AE conduit de l'époque actuelle à l'époque demandée E; c'est le nombre des années comprises entre ces deux époques. Si AE est positif, E sera future : et si AE est négatif, E sera passée. Ce chemin, ou ce nombre AE est donc notre inconnue ; représentons-le par t.

D'après tout cela, notre problème relatif à des âges se trouve remplacé par un problème relatif à des chemins. Ce second problème peut s'énoncer comme il suit:

Sur une ligne infinie se trouvent trois points A, P, J: on connaît les deux chemins $PA = a$ et $JA = a'$; on demande, sur la même ligne, un quatrième point E, tel que le chemin JE soit égal au produit de PE, multiplié par un nombre donné r. En demandant le point E, c'est le chemin $AE = t$ qu'on veut demander.

Par l'énoncé de ce problème on a

$$JE = PE \times r.$$

Mais, d'après le principe fondamental de l'addition des chemins (nº 5),

$$JE = JA + AE, \quad \text{et} \quad PE = PA + AE;$$

d'où, $\quad JE = a' + t, \quad$ et $\quad PE = a + t;$

donc, $\quad a' + t = (a + t) \times r.$

En résolvant cette équation par rapport à l'inconnue t, on trouve

$$t = \frac{a \times r - a'}{1 - r}.$$

Je suppose que Pierre ait 30 ans, que Jean en ait 40, et qu'on veuille savoir à quelle époque l'âge de Jean sera ou a été triple de celui de Pierre. On aura :

$$t = \frac{30 \times 3 - 40}{1 - 3} = \frac{50}{-2} = -25;$$

d'où il faut conclure que l'époque demandée a eu lieu il y a 25 ans. En effet, il y a 25 ans que Pierre avait 5 ans, et Jean 15 : or, $15 = 5 \times 3$.

Si t se trouvait négatif et plus grand que a ou que a', ce serait une preuve que le problème relatif aux âges serait absurde. Mais le problème relatif aux chemins resterait réel.

En général, pour résoudre un problème relatif à des quantités non directives, il faut le remplacer par un problème semblable, relatif aux nombres directifs qui expriment ces quantités, et transporter à celui-là la solution de celui-ci. Il peut arriver que la solution du second ne convienne pas au premier, et dans ce cas le premier est absurde, quoique le second soit réel.

85. ***Problème.*** Connaissant la fortune actuelle de Pierre et celle de Jean, sachant de combien chacun de ces deux individus augmente sa fortune chaque jour (on suppose que ces augmentations soient régulières), trouver dans combien de temps la fortune de Jean sera égale au produit de celle de Pierre, multipliée par un nombre donné r.

Explication. L'énoncé de ce problème ne doit pas se prendre à la lettre (il en est de même de tous les problèmes, à peu près). 1º La fortune actuelle de Pierre peut être indifféremment de l'actif, c'est-à-dire, un objet possédé, ou du passif, c'est-à-dire une dette. Il en est de même de la fortune de Jean. 2º Au lieu d'augmenter chaque jour sa fortune, il se peut que Pierre la diminue ; et, dans ce cas, on est censé savoir de combien il la diminue chaque jour. Il faut en dire autant de Jean. 3º Il se peut que la fortune de Jean ne doive jamais se trouver égale au produit de celle de Pierre, multipliée par le nombre donné, et qu'elle ait été autrefois égale à ce produit ; or, dans ce cas, il faudrait trouver combien il y a de temps que cette circonstance a eu lieu.

Solution. Soient P le mobile qui représente le terme de la fortune de Pierre, J celui qui représente le terme de la fortune de Jean, et représentons un franc d'actif, ou de gain, par une unité (positive, bien entendu). Dans cette hypothèse, P a déjà parcouru, dans le sens positif, autant d'unités que Pierre possède de francs ; ou bien, P a parcouru, dans le sens négatif, autant d'inverses d'unités que Pierre doit de francs ; dans l'un et l'autre cas, appelons a le chemin qui est déjà parcouru par le mobile P, et qui représente la fortune actuelle de Pierre. Soit faite la même explication par rapport à J, et appelons a' le chemin qui est déjà parcouru par ce mobile, et qui représente la fortune actuelle de Jean.

Si Pierre augmente chaque jour sa fortune, ou s'il diminue chaque jour sa dette (en cas que sa fortune soit une dette), le mobile P parcourt chaque jour un chemin positif; et si Pierre diminue chaque jour son actif, ou s'il augmente son passif, le mobile P parcourt chaque jour un chemin négatif; dans l'un et l'autre cas, appelons b le chemin que P parcourt chaque jour. Soit faite une explication semblable par rapport à Jean et à J, et appelons b' le chemin que J parcourt chaque jour.

Le temps infini étant représenté par une ligne, prenons pour unité le chemin qui représente un jour (en conduisant du commencement à la fin, bien entendu), et appelons t le chemin, ou le nombre qui conduit du moment actuel à l'époque demandée. Il est clair que si t est positif, l'époque demandée sera future; et que si t est négatif, l'époque demandée sera passée. Discutons séparément ces deux cas, t positif et t négatif.

1° Supposons que t soit positif, ou, ce qui revient au même, que l'époque demandée soit future. Le mobile P parcourant b chaque jour, parcourra $b \times t_+$ dans t_+ de jours; c'est-à-dire, d'ici à l'époque demandée : mais P a déjà parcouru a; donc, à l'époque demandée, il aura parcouru en tout $a + b \times t_+$: mais $t = t_+$; donc, à l'époque demandée, P aura parcouru $a + b \times t$. On démontrera de la même manière, qu'à la même époque, J aura parcouru $a' + b' \times t$. Mais, à cette époque, la fortune de Jean sera égale à celle de Pierre multipliée par un nombre donné r; donc, à la même époque, le chemin parcouru par J sera égal au produit du chemin parcouru par P, multiplié par le même

nombre donné r; donc on a l'équation

$$a' + b' \times t = (a + b \times t) \times r.$$

2° Supposons que t soit négatif, ou, ce qui revient au même, que l'époque demandée soit passée. Depuis cette époque, il s'est écoulé t_+ de jours; donc, depuis cette époque, P a parcouru $b \times t_+$. Si nous appelons h le chemin que P avait déjà parcouru à l'époque demandée, nous verrons que ce qu'il a parcouru actuellement (depuis le moment où la fortune de Pierre était zéro) devra être exprimé par $h + b \times t_+$. Mais a désigne le chemin total que P a parcouru actuellement; donc,

$$h + b \times t_+ = a;$$

d'où, $$h = a - b \times t_+ = a + b \times - t_+.$$

Or, dans l'hypothèse actuelle,

$$- t_+ \text{ est} = \text{à } t; \quad \text{donc,} \quad h = a + b \times t;$$

c'est-à-dire qu'à l'époque demandée, P avait parcouru $a + b \times t$. On démontrera de la même manière, qu'à l'époque demandée, J avait parcouru $a' + b' \times t$. Maintenant, par un raisonnement semblable à celui du premier, on trouvera encore l'équation

$$a' + b' \times t = (a + b \times t) \times r.$$

Cette équation est donc, dans tous les cas, la traduction du problème. En la résolvant par rapport à l'inconnue t, on trouve

$$t = \frac{a \times r - a'}{b' - b \times r} \ldots\ldots \text{(équat. A).}$$

Appliquons cette solution à un cas particulier.

86. Pierre a 2500 fr., et il ajoute chaque jour 10 fr. à sa fortune: Jean n'a rien, il doit 1000 fr., et il ajoute chaque jour 10 fr. à sa dette; on demande à quelle époque la fortune de Jean sera ou a été double de celle de Pierre.

Dans cette hypothèse,

$$a = 2500,\quad b = 10,\quad a' = -1000,\quad b' = -10$$

et

$$r = 2;\quad \text{donc},$$

$$t = \frac{2500 \times 2 - -1000}{-10 - 10 \times 2} = \frac{6000}{-30} = -200.$$

L'époque demandée a donc eu lieu il y a 200 jours. Voyons : depuis cette époque, Pierre a gagné 10 fr. $\times$ 200 = 2000 fr.; il avait donc à cette époque, 2500 fr. — 2000 fr. = 500 fr. Pour Jean, depuis la même époque, il s'est endetté de 10 fr. $\times$ 200 = 2000 fr. : or, il n'est endetté maintenant que de 1000 fr.; donc à l'époque trouvée, il avait en actif, 2000 fr. — 1000 fr. = 1000 fr. Ainsi, à l'époque trouvée. Jean avait 1000 fr., et Pierre 500 fr.; or, la première de ces deux sommes est bien le double de la seconde, comme le veut le problème.

87. Ce n'est qu'indirectement que nous venons de résoudre le problème proposé, relatif aux fortunes et aux dettes; le problème que nous avons résolu directement n'est relatif qu'aux chemins. On peut l'énoncer comme il suit :

Problème. Deux mobiles P et J se meuvent uniformément sur une même droite, soit dans le même sens, soit en sens opposés, peu importe. P parcourt chaque jour un chemin b, et J un chemin b'. On appelle A un point fixe, pris sur la ligne de ces chemins (c'est celui

qui représente l'origine commune des fortunes de Pierre et de Jean). Au moment actuel, le chemin de A à P est a, et celui de A à J est a'; on demande à quelle époque le chemin de A à J sera ou a été égal au produit de AP multiplié par un nombre donné r.

Les autres conditions restant les mêmes, si l'on voulait savoir à quelle époque les deux mobiles P et J se rencontreront, ou se sont rencontrés, il suffirait de faire $r = 1$; ce qui donnerait

$$t = \frac{a - a'}{b' - b} \ldots \quad \text{(équat. B).}$$

Car, si $r = 1$, il résulte $AJ = AP \times 1 = AP$; donc à l'époque demandée, les deux mobiles P et J se trouveront en un même point.

Pour trouver t, dans cette hypothèse, il n'est pas nécessaire de connaître les deux quantités a et a'; il suffit de connaître la différence (ou plus exactement la somme) $a - a'$. Cette quantité est le chemin qui conduit, en ce moment, de J en P; donc, si l'on appelle d le chemin qui conduit actuellement de J en P, on aura

$$t = \frac{d}{b' - b}.$$

De même, pour trouver t, il n'est pas nécessaire de connaître les deux quantités b' et b; il suffit de connaître la différence (ou si l'on veut, la somme) $b' - b$. Soit $b' - b = e$; on aura

$$t = \frac{d}{e}.$$

Exemple. Le chemin de J en P est actuellement 40 *lieues sud:* le chemin que J parcourt en un jour est égal à celui que parcourt P plus 5 *lieues nord;* on demande..... On trouvera

$$t = \frac{40 \text{ li. sud}}{5 \text{ li. nord}} = \frac{40}{-5} = -8.$$

Ce résultat fait voir qu'il y a 8 jours que les deux mobiles se sont rencontrés. En effet, chaque jour J avance sur P de 5 lieues nord; donc, s'ils sont partis d'un même point, au bout de 8 jours J doit se trouver au nord de P, à une distance égale à 5 li. $\times 8 = 40$ *lieues;* donc actuellement (c'est-à-dire, à la fin des 8 jours), le chemin de J en P doit être 40 *lieues sud*, comme le veut le problème.

Par la même hypothèse, $r = 1$, on trouvera à quelle époque Pierre et Jean seront ou ont été également riches, ou également endettés.

---

88. Pour abréger les explications qu'exige cette méthode, il faut admettre les locutions de la nature des suivantes (en énonçant le signe — par *inverse*).

— 4 *fr. de gain*	signifiera	4 *fr. de perte.*
— 4 *fr. de perte*........		4 *fr. de gain.*
— 4 *fr. d'augmentation*..		4 *fr. de diminution.*
— 4 *fr. de diminution*...		4 *fr. d'augmentation.*
— 4 *fr. d'actif*.........		4 *fr. de passif.*
— 4 *fr. de passif*.......		4 *fr. d'actif.*
— 4 *années futures*.....		4 *années passées.*
— 4 *années passées*.....		4 *années futures.*

et en conséquence

gagner — 4 *fr.*	signifiera	*perdre* 4 *fr.*
perdre — 4 *fr.*.........		*gagner* 4 *fr.*
ajouter — 4 *fr.*...		*retrancher* 4 *fr.*
retrancher — 4 *fr.*.........		*ajouter* 4 *fr.*
dans — 4 *ans*.........		*il y a* 4 *ans.*
il y a — 4 *ans*........		*dans* 4 *ans.*

etc., etc., etc.

D'après cela, le problème du n° 85 pourra s'énoncer comme il suit :

Pierre possède *a francs*, et ajoute chaque jour *b fr.* à sa fortune : Jean possède *a' francs*, et ajoute chaque jour *b' francs* à sa fortune ; on demande dans combien de temps la fortune de Jean sera égale au produit de celle de Pierre, multipliée par un nombre donné *r*. (*a*, *b*, *a'*, *b'* et *r* sont ici des nombres, qui peuvent être indifféremment positifs ou négatifs.)

Pour appliquer la solution générale au problème particulier du n° 86, on pourrait commencer par le traduire comme il suit :

Pierre a 2500 fr., et il ajoute chaque jour 10 fr. à sa fortune : Jean a — 1000 fr., et il ajoute chaque jour — 10 fr. à sa fortune; à quelle époque la fortune de Jean sera-t-elle double de celle de Pierre?

En comparant ce problème à l'énoncé général qui précède, on trouve de suite

$$a = 2500, \quad b = 10, \quad a' = -1000, \quad b' = -10,$$

et $$r = 2.$$

On trouvera donc, comme dans le n° 86, $t = -200$. Or, pour interpréter ce résultat, on dira tout simplement que l'époque demandée ***aura lieu dans*** 200 *jours;* et l'on saura que cela signifie que l'époque *est arrivée il y a* 200 *jours.*

Au moyen de ce langage, et de quelques principes généraux que je ne puis développer ici, on rendra cette méthode aussi expéditive que la méthode ordinaire. C'est au lecteur attentif à juger si elle n'est pas beaucoup plus satisfaisante pour l'esprit.

FIN.