NOUVEAUX ELEMENS
DE
GEOMETRIE;
CONTENANT,

Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonſtrations des propoſitions les plus communes,

De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes ſont incommenſurables,

De nouvelles meſures des angles, dont on ne s'eſtoit point encore aviſé,

Et de nouvelles manieres de trouver & de demontrer la proportion des Lignes.

Antoine Arnauld

A PARIS,
Chez Charles Savreux, Libraire Juré, au pied de la Tour de Noſtre-Dame, à l'Enſeigne des trois Vertus.

M. DC. LXVII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Du livre IX au livre XV

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE NEUVIEME.

DES ANGLES QUI ONT LEUR SOMMET HORS LE CENTRE DU CERCLE, DONT LES ARCS NE LAISSENT PAS DE LES MESURER.

IL est bien aisé de reconnoistre que les angles ne peuvent avoir pour veritable mesure que les arcs d'un cercle, & que toutes les autres mesures, comme les cordes, les sinus, & les bases, ne peuvent estre que subsidiaires de celle là, & que même elles ne les mesurent qu'imparfaitement. I.

Mais on a creu jusques icy qu'on ne pouvoit employer pour mesurer un angle que les arcs du cercle au centre duquel est le sommet de cet angle. Et ainsy arrivant rarement que deux angles que l'on compare ayent leur sommet au centre du même cercle, on ne pouvoit presque jamais employer la mesure des arcs dans la comparaison de plusieurs angles, & on estoit obligé d'avoir recours à de longs circuits par la conference de plusieurs triangles, ce qui obligeoit à considerer tant de lignes, qu'il estoit impossible que l'imagination n'en fust extremement fatiguée, qui est une des choses qu'on doit éviter autant que l'on peut dans l'estude de la Geometrie.

Cependant il est vray qu'il n'y a point d'angle qu'on ne II.

puiſſe meſurer par les arcs d'un cercle, en quelque endroit qu'en ſoit le ſommet au regard du cercle : C'eſtadire,

1. Soit qu'il ſoit dans la circonference du cercle.

2. Soit qu'il ſoit au dedans, quoy qu'ailleurs qu'au centre.

3. Soit même qu'il ſoit au dehors, pourveu que ſes coſtez coupent ou touchent le cercle.

C'eſt ce que l'on verra par ce Livre, qui ne ſervira pas ſeulement à meſurer avec une merveilleuſe facilité toutes ſortes d'angles, mais donnera auſſy par là de grandes ouvertures pour trouver beaucoup de nouvelles choſes touchant la proportion des lignes.

Mais pour rendre les preuves plus courtes, il eſt bon de ſuppoſer quelques Lemmes, ou clairs d'eux mêmes, ou demonſtrez dans le Livre precedent, afin d'y renvoyer quand on en aura beſoin.

PREMIER LEMME. DEFINITION.

III. LORSQUE dans toutes ces ſortes d'angles on dit qu'un tel arc du cercle auquel ils ont rapport leur ſert de meſure, cela veut dire, que ſi ce même angle eſtoit au centre du cercle, il auroit cet arc, ou un autre qui luy ſeroit égal, pour ſa meſure. Ou bien cela veut dire, qu'un angle qui ſeroit au centre de ce cercle, qui auroit cet arc pour meſure, ſeroit égal à l'angle hors le centre qu'on dit avoir cet arc pour ſa meſure.

Et de là il s'enſuit, que dans ces ſortes d'angles, auſſy bien que dans ceux qui ſont au centre du cercle, deux angles ſont égaux quand ils ont pour meſure des arcs égaux, ou abſolument quand ce ſont des arcs du même cercle, ou de cercles égaux ; ou proportionellement quand ce ſont des arcs de cercles inégaux : l'arc du petit ayant la même raiſon à ſa circonference, que l'arc du grand à la ſienne : comme ſi l'un & l'autre eſtoit la dixiême partie de ſa circonference, c'eſtadire de 36. degrez.

SECOND LEMME.

IV. TOUT angle qui a pour meſure la MOITIÉ	de la demycirconference eſt	*Droit.*
	d'un arc moindre que la demyc.	*Aigu.*
	d'un arc plus grand que la demyc.	*Obtus*

Et

Et de là il s'enſuit, que quand on dit que deux angles, ou trois angles ſont égaux à deux droits, cela veut dire que ces deux angles, ou ces trois angles pris enſemble ont pour meſure la demycirconference, c'eſt à dire 180. degrez.

Et quand on dit que deux angles ſont égaux à un droit, cela veut dire que ces deux angles pris enſemble ont pour meſure la moitié de la demycirconference, c'eſtadire 90. degrez.

TROISIEME LEMME. V.

QUAND un tout eſt partagé en pluſieurs portions, comme *A* en *b*, *c*, *d*; comme ces trois portions enſemble font le tout, les trois moitiez de ces portions, c'eſtadire une moitié de chacune, font toutes enſemble la moitié du tout, de ſorte que ces trois expreſſions ſont la même choſe.

La moitié du tout.

La moitié des trois portions que comprend le tout.

Les trois moitiez de ces portions, c'eſtadire une de chacune, ce qui s'entend toûjours, quoyqu'on ne le marque pas.

Et ainſy ſuppoſant qu'*A* ſoit une circonference, & que *b*, *c*, *d*, ſoient trois arcs qui la comprennent toute,

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\text{ de l'arc } b\\ \frac{1}{2}\text{ de l'arc } c\\ \frac{1}{2}\text{ de l'arc } d\end{array}\right\}$ ſont égales priſes enſemble à la $\frac{1}{2}$ de la circonference, c'eſt à dire à la demycirconference, ou à 180. degrez.

Et ſuppoſant qu'*A* ſoit une demycirconference, & que *b* & *c* ſoient deux arcs qui la comprennent, deux moitiez de ces arcs, une de chacun, valent la moitié de la demycirconference. C'eſtadire 90. degrez.

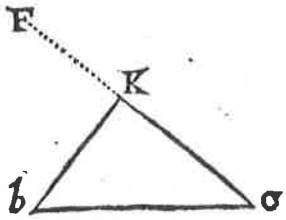
Et alors on peut exprimer la moitié de l'un de ces arcs en deux manieres, ou par ſon propre nom, comme la $\frac{1}{2}$ d'un tel arc, ou par la moitié du tout dont il eſt portion moins la moitié de l'autre arc.

Ainſy eſtant donné une demycirconference qui comprend les arcs *b* & *c*, la $\frac{1}{2}$ de l'arc *b* eſt la même choſe que la moitié de la demycirconference moins la $\frac{1}{2}$ de l'arc *c*.

Enfin ſi un tout a deux portions, la moitié de la plus grande moins la moitié de la plus petite eſt la même chose que la moitié du tout moins la petite entiere. Car si le tout a pour portions *b* & *c*, la moitié du tout est égale à la moitié de *b* plus la moitié de *c*. Il faut donc oster deux fois la moitié de *c* de la moitié du tout, pour rendre la moitié du tout égale à la moitié de *b*, dont on auroit osté la moitié de *c*.

QUATRIEME LEMME.

VI. ENFIN il se faut souvenir,



1. Que tout angle plus les deux que font ses costez sur sa base sont égaux à deux droits.

2. Que les deux angles sur la base d'un angle droit sont égaux à un droit.

3. Que si on prolonge un costé de l'angle vers le sommet, le nouvel angle que fait ce costé prolongé sur l'autre costé est égal aux deux angles qui sont sur la base du premier angle. Ainsy l'angle *f k b* est égal aux angles vers *b* & vers *c*.

LA PREMIERE SORTE D'ANGLES DONT LE SOMMET EST EN LA CIRCONFERENCE D'UN CERCLE DONNÉ.

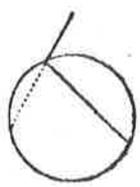
DIVISION.

VII. LE sommet d'un angle ne se peut terminer en la circonference d'un cercle qu'en 3 manieres.

1. Quand l'un des costez est au dedans du cercle & l'autre au dehors.

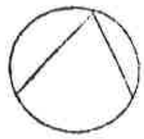
2. Quand tous les deux sont au dedans.

3. Quand ils sont tous deux au dehors du cercle. Mais parceque la premiere se subdivise en deux, on peut conter 4. genres de cette sorte d'angles.



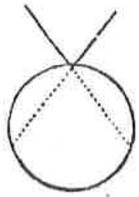
Le 1. Quand l'un des costez est au dedans du cercle, & en est une corde, & que l'autre costé qui est au dehors touche le cercle.

Le 2. Quand l'un des costez estant aussy au dedans du



cercle celuy qui eſt au dehors coupe le cercle, & entre dedans le cercle lorſqu'on le prolonge de ce coſté là : ou que ce n'eſt même qu'une corde prolongée hors le cercle.

Le 3. Quand tous les deux coſtez ſont au dedans du cercle, & en ſont deux cordes.



Le 4. Quand ils ſont tous deux au dehors.

Mais parce qu'alors cette ſorte d'angle ne peut avoir de rapport au cercle, que parcequ'il ſeroit égal à un angle qu'on luy oppoſeroit au ſommet, qui ſeroit neceſſairement ou du 1^{er} ou du 3^{e} genre, il ne ſera point neceſſaire de rien dire de ce 4^{e} genre, puiſqu'on en pourra juger par les autres.

Et ainſy il ne reſtera qu'à donner la meſure des trois premiers ; ce que nous ferons par trois Theoremes tres clairs & tres faciles, & dont même les deux derniers ne feront qu'une ſuite du premier : & en même temps ſi feconds pour parler ainſy, qu'un tres grand nombre de propoſitions qui ne ſe prouvent dans la Geometrie ordinaire que par des voyes tres obſcures & tres embaraſſées s'en deduiront ſans peine, comme n'en eſtant que de ſimples Corollaires.

Mais pour cela il eſt neceſſaire de marquer la maniere dont on exprime les angles du 1^{er} & du 3^{e} genre dans la geometrie ordinaire. Car pour celuy du 2^{e}, perſonne ne les a encore conſiderez.

PREMIER AVERTISSEMENT.

DEFINITIONS.

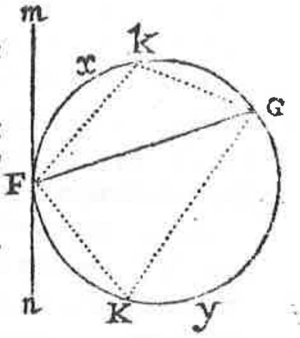
L'ANGLE du 1^{er} genre, qui eſt celuy qui eſt compris entre une corde & une tangente, eſt appellé ordinairement *angle du ſegment*, *angulus ſegmenti*. VIII.

Et l'angle du 3^{e} genre, qui eſt compris entre deux cordes qui ſe terminent d'une part à un même point de la circonference, *l'angle dans le ſegment*, *angulus in ſegmento*. Ce que pour mieux entendre, il faut remarquer, que toute corde partage le cercle en deux portions, qui ſont appellées *ſegmens*, & que ces portions ou ſegmens ſont égaux quand cette corde eſt un diametre, & alors on les appelle des demycercles, & l'arc de chacun eſt une demycirconference.

Mais qu'ils ſont inégaux, quand c'eſt une autre corde que le diametre, l'un eſtant plus petit que le demycercle, & l'autre plus grand. De ſorte que pour abreger nous appellerons l'un le petit ſegment, & l'autre le grand ſegment.

Et de là il eſt clair que l'arc du petit ſegment eſt plus petit que la demycirconference, & que l'arc du grand ſegment eſt plus grand que la demycirconference.

Cela ſuppoſé, ſi on tire la corde *F G*, & au point *F* la tangente *m n*; *F x G* eſt le petit ſegment, & *F y G* le grand ſegment.



Et l'angle *G F m*, l'angle du petit ſegment; parceque la tangente *m F* eſt du coſté de ce ſegment là.

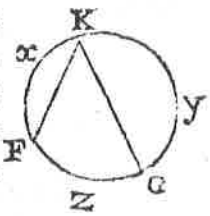
Et l'angle *G F n*, l'angle du grand ſegment.

Mais l'angle *F k G* eſt l'angle dans le petit ſegment.

Et l'angle *F K G*, l'angle dans le grand ſegment.

SECOND AVERTISSEMENT.

IX. ON peut encore remarquer qu'au regard de l'angle du ſegment, il faut que la corde qui diviſe les deux ſegmens ſoit décrite, parce qu'elle fait l'un des coſtez de l'angle. Mais que cela n'eſt pas neceſſaire au regard de l'angle dans le ſegment, parce que la corde n'eſt que la baſe de cet angle, & qu'elle eſt ſuffiſamment marquée par les deux points de la circonference auſquels aboutiſſent les deux coſtez de l'angle, comme l'angle *F k G*, eſt ſuffiſamment marqué, quoyque la ligne *FG* ne ſoit que ſouſ-entenduë & non tracée.



TROISIEME AVERTISSEMENT.

X. L'ANGLE dans le ſegment ſe peut exprimer en deux manieres ; ou par rapport au ſegment dans lequel il eſt inſcrit, ſon ſommet ſe trouvant dans l'arc de ce ſegment ; ou par rapport à l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Et c'eſt en cette maniere qu'il vaut mieux l'exprimer, quand la corde qui joindroit les extremitez de ſes coſtez n'eſt pas marquée ; comme dans l'angle *FkG*, qui eſt appuyé ſur l'arc *FzG* ; & alors on dit ſimplement que c'eſt un angle inſcrit dans le cercle, ſans parler de ſegment.

QUATRIEME AVERTISSEMENT.

IL eſt aiſé de voir que l'angle inſcrit dans un ſegment XI.
eſt toûjours appuyé ſur l'arc du ſegment oppoſé. Et qu'ainſy l'angle dans le grand ſegment eſt appuyé ſur l'arc du petit ſegment : & au contraire l'angle dans le petit ſegment eſt appuyé ſur l'arc du grand.

CINQUIEME AVERTISSEMENT.

ENFIN il faut remarquer, que quand on parle des arcs XII.
que ſoutiennent les coſtez d'un angle inſcrit dans le cercle, on doit entendre les deux qui ſont à coſté l'un de l'autre, & tout à fait ſeparez l'un de l'autre, & qui avec celuy ſur lequel l'arc inſcrit eſt appuyé comprennent toute la circonference.

PREMIER THEOREME,

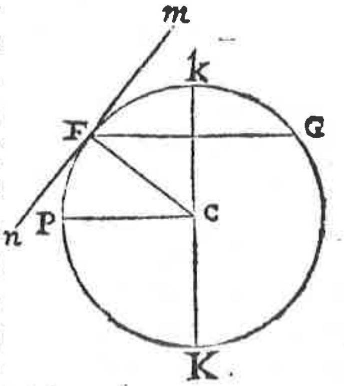
FONDAMENTAL DE TOUS LES AUTRES.

TOUT angle compris entre une tangente & une corde, XIII.
a pour meſure la moitié de l'arc ſoûtenu par cette corde du coſté de la tangente.

Et parceque cet angle eſt auſſy appellé l'angle du ſegment vers lequel eſt cette tangente, ſelon cela on doit dire, qu'il a pour meſure la moitié de l'arc de ce ſegment là. De ſorte que ſi c'eſt l'angle du petit ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment ; & ſi c'eſt l'angle du grand ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

Ce Theoreme eſt le fondement de la meſure des angles par des arcs de cercles hors le centre deſquels eſt leur ſommet ; & la preuve en eſt tres facile.

Soit la corde *FG* & la ligne *mn* qui touche le cercle, dont le centre est au point *c*, l'angle *m F G* est l'angle du petit segment, & *n F G* l'angle du grand.



Soit tiré le diametre *k K* perpendiculaire à *F G*; & le rayon *c F*; & *P c* perpendiculaire au diametre *K k*, & par consequent parallele à *F G*, le diametre *k K* coupera par la moitié les arcs du grand & du petit segment. D'où il s'ensuit que l'angle au centre *F c k* a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment. Et que l'angle au contraire *F c K* a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

De sorte que le Theoreme sera demonstré (par le 1er Lemme) si on peut faire voir, que l'angle du petit segment *m F G* est égal à l'angle au centre *F c K*. Or cela est facile. Car *c P* & *F G* estant paralleles, les angles alternes que fait sur l'une & sur l'autre le rayon de l'atouchement (c'estadire les angles *P c F*, & *c F G*) sont égaux.

Or l'angle *m F c* (qui comprend l'angle du segment & l'angle *c F G*) est droit : & par consequent égal à l'angle *P c k*, qui est droit aussy, & qui comprend les deux angles *F c k* & *P c F*. Donc ostant de part & d'autre les angles *c F G* & *P c F*(que l'on vient de faire voir estre égaux) l'angle du segment demeurèra égal à l'angle *F c k*, qui a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment.

Donc l'angle du petit segment *m F G*, a aussy pour mesure la moitié de cet arc du petit segment. Ce qu'il falloit demonstrer.

On fera voir de même que l'angle du grand segment *n F G* est égal à l'angle au centre *F c K*, qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

Car l'angle du grand segment comprend l'angle droit *n F c* & l'angle *c F G*. Or l'angle au centre *F c K* comcomprend aussy l'angle droit *P c K* & l'angle *P c F*.

Or les angles *c F G* & *P c F* sont égaux, comme il vient d'estre dit. Donc estant ajoûtez chacun à un droit, ils rendent égaux l'angle du segment & l'angle au centre, qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

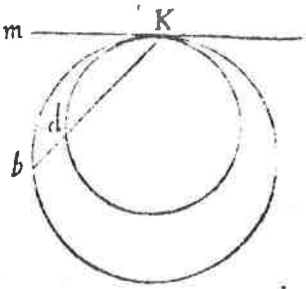
Donc (par le 1er Lemme) l'angle du grand segment a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

PREMIER COROLLAIRE.

L'ANGLE du demycercle est droit. XIV.
Celuy du petit segment est aigu.
Celuy du grand, obtus.
Cela est clair par le 2e Lemme.

SECOND COROLLAIRE.

LORSQUE deux cercles dont l'un est dans l'autre se touchent, toutes les cordes menées du point de l'attouchement à la circonference du plus grand cercle soûtiennent des arcs proportionellement égaux dans les deux cercles: c'estadire que la ligne entiere (*kb*) soûtient dans le grand cercle un arc égal à celuy que soûtient dans le petit (*kd*) partie de cette même ligne. XV.

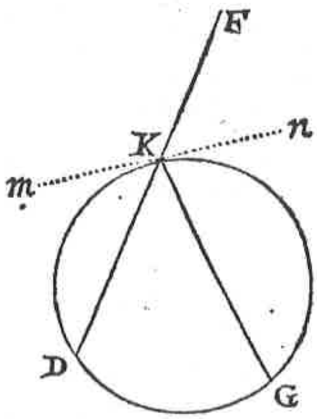


Car les angles *mkb* & *mkd* sont le même angle. Or l'un a pour mesure la moitié de l'arc *kb*, & l'autre la moitié de l'arc *kd*. Donc ces deux arcs sont proportionellement égaux.

SECOND THEOREME.

TOUT angle dont le sommet est en la circonference, & qui est compris entre une corde & la partie d'une autre corde prolongée hors le cercle du costé qu'elle est hors le cercle, a pour mesure la moitié des deux arcs qui sont à costé du sommet de cet angle, & qui sont soûtenus par les deux cordes, dont l'une est le costé de l'angle, & l'autre en fait l'autre costé par sa partie prolongée hors le cercle. XVI.

Soient les deux cordes *KD* & *KG*, dont *KG* soit prolongée en *F* hors le cercle; je dis que l'angle *FKG* a pour mesure la moitié des deux arcs *K D* & *K G*.



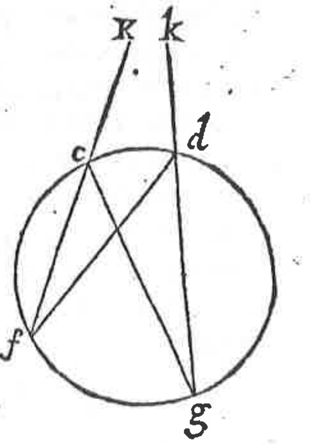
Car soit tirée par le point *K* la tangente *m n*, l'angle *F K G* comprend les deux angles *F K n* & *n K G*. Or l'angle *F K n* est égal à l'angle *m K D*, parcequ'il luy est opposé au sommet. Donc l'angle *F K G* est égal aux deux angles *n K G* & *m K D*.

Or par le 1er Theoreme *n K G* a pour mesure la moitié de l'arc *K G*, & *m K D* a pour mesure la moitié de l'arc *K D*.

Donc l'angle *F K G*, qui est égal à tous les deux, a pour mesure l'une & l'autre moitié de ces deux arcs. C'estadire la moitié de ces deux arcs, par le 3e Lemme.

COROLLAIRE.

XVII. SI l'on joint les extremitez de deux cordes par deux autres cordes qui se croisent, & que l'on prolonge hors le cercle les deux premieres cordes, les angles que le prolongement de chacune fera sur les cordes qui se croisent, seront égaux.



Soient les deux premieres cordes *c f* & *d g*.

Les deux qui se croisent, *f d* & *g c*.

Les prolongemens *K c* & *k d*.

Je dis que les angles *K c g* & *k d f* sont égaux.

Car par le precedent Theoreme l'un & l'autre a pour mesure la moitié des arcs *f c*, *c d*, *d g*.

TROISIEME THEOREME.

XVIII. TOUT angle inscrit au cercle, c'estadire compris entre deux cordes qui ne se joignent qu'en la circonference, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

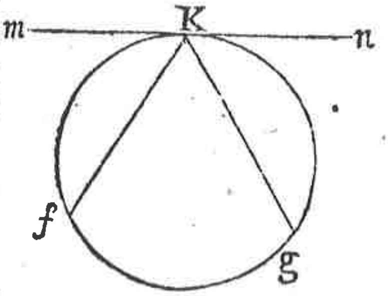
Et

Et parce qu'on appelle aussy ces angles (angles dans le segment) selon cela

Tout angle dans un segment a pour mesure la moitié de l'arc du segment opposé. Voyez le 4^e^ Avertissement.

La preuve en est tres facile par le 1^er^ Theoreme.

Soit l'angle *fkg*. Je dis qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *fg*.

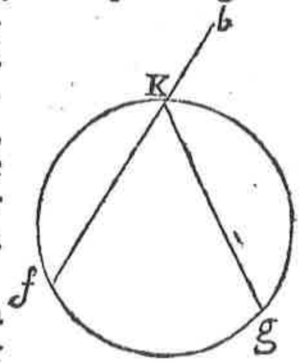


Soit menée par le sommet *k* la tangente *mn*, l'angle inscrit *fkg*, plus les deux qui sont à costé *fkm*, & *gkn*, valent deux droits.

Donc ils ont pour mesure la demycirconference, par le 2^e^ Lemme.

Donc ils ont pour mesure les trois moitiez des arcs *fg*, *kf*, *kg* (par le 3^e^ Lemme) parce que ces trois arcs comprennent toute la circonference.

Or l'un de ces trois angles, sçavoir *fkm*, a pour mesure la moitié de l'arc *kf*; & l'autre, sçavoir *gkn*, a pour mesure la moitié de l'arc *kg*. Donc il reste pour la mesure du 3^e^, qui est l'angle inscrit la moitié du 3^e^ arc, qui est *fg*.



On peut encore prouver la mesme chose par le 2^e^ Theoreme. Car si on prolonge *fk* jusques à *b*, les angles *fkg* & *gkb* valent deux droits, & par consequent ont pour mesure la moitié de la circonference, & par consequent aussy les trois moitiez des trois arcs *kf*, *kg*, *fg*.

Or l'angle *bkg* a pour sa mesure la moitié des deux arcs *kf* & *kg*, par le 2^e^ Theoreme.

Reste donc pour la mesure de l'angle inscrit la moitié du troisiême arc, qui est *fg*.

PREMIER COROLLAIRE.

IL paroist par là, que si on oste de la circonference en- XIX.

tiere, c'estadire de 360. degrez, les deux arcs que soutiennent les costez de l'angle inscrit, la moitié de ce qui restera sera la mesure de l'angle inscrit, comme si l'un de ces arcs est de 100 degrez, & l'autre de 44, ostant 144 de 360, restera 216, dont la moitié est 108 pour la mesure de l'angle inscrit.

SECOND COROLLAIRE.

XX. IL paroist aussy qu'on peut dire encore: Que tout angle inscrit a pour mesure la demycirconference moins la moitié des deux arcs qui sont soutenus par ces costez: ou moins l'arc qui est soutenu par l'un de ses costez quand il est Isoscele.

Cela est clair par la demonstration precedente, & par le 3e Lemme.

Et cette mesure est souvent plus commode que l'autre, comme si l'on sçait que des arcs que soutiennent les costez de l'angle inscrit l'un est de 100 degrez & l'autre de 44, en ostant 50 & 22, qui font 72, de 180, ce qui restera qui est 108 est la mesure de cet angle inscrit.

Et cela est encore plus facile, quand l'angle inscrit est Isoscele, comme si l'un & l'autre de ses costez soutient un arc de 36 degrez: car ostant 36 de 180, ce qui reste, qui est 144, est la mesure de cet angle inscrit.

TROISIEME COROLLAIRE.

XXI. Tous les angles inscrits dans le même segment, ou appuyez sur le même arc, ou sur des arcs égaux, sont égaux. Car ils ont la moitié du même arc ou de deux arcs égaux pour mesure. Donc ils sont égaux par le 1er Lemme.

Et il est clair aussy (par le 1er & le 2e Corollaire) que des angles inscrits sont égaux quand les arcs que soutiennent les deux costez de l'un pris ensemble sont égaux aux arcs que soutiennent les deux costez de l'autre, & qu'ils ne peuvent estre égaux que cela ne soit.

Que si au contraire des angles inscrits sont supposez égaux, il faut qu'ils soient appuyez sur des arcs égaux, ou absolument, si c'est dans le même cercle ou en des cercles égaux que ces angles soient inscrits; ou proportionellement, si c'est dans des cercles inégaux. Ce qu'il faut aussy supposer dans la 1re partie de ce Corollaire. Car les arcs proportionellement égaux font autant pour l'égalité des angles, que s'ils l'estoient.

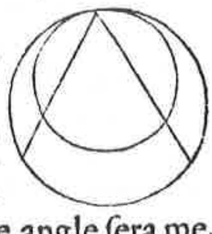
QUATRIEME COROLLAIRE.

SI deux angles inscrits en divers cercles sont égaux, & qu'ils soient soutenus par des cordes égales, les cercles dans lesquels ils sont inscrits sont égaux. XXII.

Car les angles inscrits en divers cercles ne sçauroient estre égaux, qu'ils ne soient appuyez sur des arcs proportionellement égaux, & des arcs de divers cercles proportionellement égaux ne sçauroient estre soutenus par des cordes égales que les cercles ne soient égaux. Donc, &c.

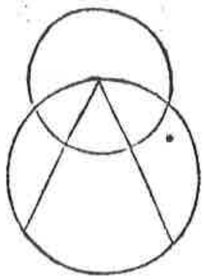
CINQUIEME COROLLAIRE.

LORSQUE deux cercles dont l'un est au dedans de l'autre se touchent, si du point de l'attouchement on mene deux lignes jusques à la circonference du plus grand, les arcs de l'une & de l'autre circonference compris entre ces deux lignes seront proportionellement égaux. Car le même angle sera mesuré par la moitié de l'un & de l'autre de ces arcs. XXIII.



SIXIEME COROLLAIRE.

SI un cercle a pour centre un point de la circonference d'un autre cercle, & que de ce point on tire deux lignes qui coupent l'une & l'autre circonference, l'arc de celle qui a ce point pour centre compris entre ces deux lignes est proportionellement égal à la moitié de l'arc de celle dans laquelle est ce point. Car le même angle a pour mesure le premier arc entier & la moitié de l'autre. XXIV.



SEPTIEME COROLLAIRE.

SI l'angle inscrit & l'angle au centre sont appuyez sur le même arc, l'angle au centre est double de l'angle inscrit. Car l'inscrit a pour mesure la moitié de l'arc, qui entier XXV.

est la mesure de l'angle au centre.

HUITIEME COROLLAIRE.

XXVI. Tous les angles dans un segment sont égaux à l'angle du segment opposé. Et ainsy l'angle dans le grand segment est égal à l'angle du petit segment ; & l'angle dans le petit segment égal à l'angle du grand.

Car l'angle du grand segment est appuyé sur l'arc du petit. Donc il a pour mesure la moitié de l'arc du petit, qui est aussy la mesure de l'angle du petit segment.

NEUVIEME COROLLAIRE.

XXVII. L'ANGLE dans le demycercle est droit.

Dans le grand segment, aigu.

Dans le petit, obtus.

Cela est clair par le 2^e^ Lemme.

DIXIEME COROLLAIRE.

XXVIII. LES angles inscrits en deux segmens opposez sont égaux à deux droits. Car les arcs des deux segmens comprennent toute la circonference. Donc la moitié de l'un qui est la mesure de l'un de ces angles plus la moitié de l'autre qui est la mesure de l'autre angle, valent la demycirconference (par le 3^e^ Lemme). Donc pris ensemble ils ont pour mesure la demycirconference. Donc ils valent deux droits.

ONZIEME COROLLAIRE.

XXIX. SI quatre cordes ne se joignent qu'aux extremitez, ils font quatre angles inscrits dont les opposez sont égaux à deux droits. C'est la même chose que le precedent.

DOUZIEME COROLLAIRE.

XXX. L'ANGLE aigu qui est dans le grand segment est le complement de l'obtus qui est dans le petit. Cela est clair, puisque les deux ensemble valent deux droits.

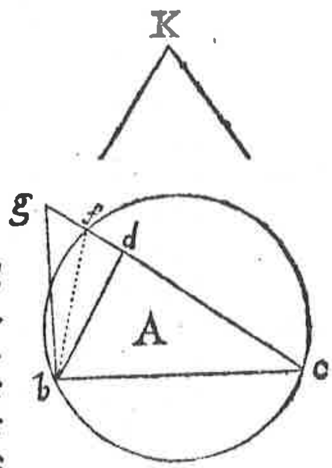
TREIZIEME COROLLAIRE.

XXXI. LA moitié de la base d'un angle inscrit est son sinus, s'il est capable d'en avoir, c'estadire s'il est aigu : ou de son complement, s'il est obtus. Car le sinus est la moitié de la corde du double de l'arc. Or la base d'un angle inscrit est la corde d'un arc qui est double de celuy qui mesure l'angle inſcrit. Donc la moitié de cette corde eſt ſon ſinus; s'il eſt aigu: ou s'il eſt obtus, le ſinus de ſon complement, c'eſtadire de l'angle aigu qui eſtant inſcrit dans le ſegment oppoſé a auſſy cette corde pour ſa baſe.

QUATORZIEME COROLLAIRE.

ON dit qu'un ſegment eſt capable d'un tel angle quand tous les angles dans ce ſegment ſont égaux à cet angle. XXXII.

Et quand cela eſt, il eſt impoſſible qu'un angle de cette grandeur ait pour baſe la corde de ce ſegment que ſon ſommet ne ſe trouve dans un des points de l'arc du ſegment.



Suppoſons par exemple que le ſegment A ſoit capable de l'angle *k*; je dis que tout angle égal à l'angle *k*, qui aura *b c* pour baſe, aura ſon ſommet dans un des points de l'arc du ſegment A.

Car s'il l'avoit au dedans du cercle comme en *d*, prolongeant *c d* juſques en *f*, point de la circonference, & tirant la ligne *bf*, l'angle *b f c* ſera égal à l'angle *k* par l'hypoteſe. Or l'angle *b d c*, par le 4ᵉ Lemme, eſt égal à l'angle *b f c* plus l'angle *f b d*. Donc il eſt plus grand que le ſeul angle *b f c*. Donc il eſt plus grand que l'angle *k*.

Et ſi le ſommet eſtoit hors du ſegment comme en *g*, tirant une ligne de *b* au point où *c g* coupe le cercle comme à *f*, on prouvera que l'angle *b f c*, égal à *k*, ſera plus grand que l'angle *b g c*, parce qu'il ſera égal à *b g c* plus *g b f*, par le 4ᵉ Lemme.

Donc l'angle qui a *b c* pour baſe ne peut eſtre égal à *k* qui eſt l'angle dont le ſegment *A* eſt capable, qu'il n'ait ſon ſommet dans la circonference, puiſque s'il l'avoit au dedans il ſeroit plus grand, & s'il l'avoit au dehors il ſeroit plus petit.

QUINZIEME COROLLAIRE.

XXXIII. SI on fait le diametre d'un cercle de l'hypothenuse d'un angle droit, le sommet de cet angle droit se trouvera dans la circonference du cercle.

Car chaque demycercle est capable de cet angle droit. Donc par le Corollaire precedent nul angle droit ne peut avoir pour l'hypothenuse la corde du demycercle qui est le diametre, que son sommet ne se trouve en un des points de la demycirconference.

SEIZIEME COROLLAIRE.

XXXIV. SI du sommet d'un angle on tire une ligne au milieu de la base, & que cette ligne soit égale à la moitié de cette base, l'angle est droit : mais si elle est plus longue, il est aigu ; & si elle est plus courte, il est obtus.

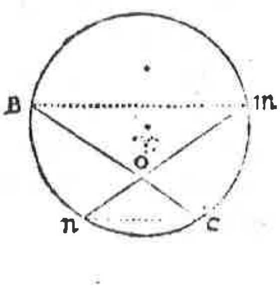
Car faisant un demycercle qui ait pour centre le point du milieu de la base, & pour intervale la moitié de la base, le sommet de l'angle se trouvera dans un des points de la demycirconference si la ligne tirée du sommet au milieu de la base est égale à la moitié de la base. Donc l'angle sera droit.

Et le sommet se trouvera au dehors du demycercle si elle est plus longue. Donc l'angle sera plus petit qu'un droit par le 9^e Corollaire, & par consequent aigu.

Et il se trouvera au dedans du demycercle si elle est plus courte. Donc l'angle sera plus grand qu'un droit par le 9^e Corollaire. Donc obtus.

DIX-SEPTIEME COROLLAIRE.

XXXV. QUAND deux cordes égales se coupent, chaque partie de l'une est égale à chaque partie de l'autre.



Soient les cordes égales *Bc* & *mn*, qui se coupent en *o*, les arcs *bnc* & *mcn* sont égaux, parce qu'ils sont soutenus par des cordes égales. Donc ostant de ces deux arcs l'arc *nc*, qui leur est commun ; les arcs *Bn* & *mc* demeurent égaux. Donc tirant la ligne *nc*, les angles inscrits *ncB* & *cnm* sont égaux, parce qu'ils sont appuyez sur des arcs égaux. Donc les deux lignes *on* & *oc* sont égales, parce qu'estant menées d'un même point elles font des angles égaux sur la même base. Et on prouvera de même en tirant la ligne *Bm* que *om* & *oB* sont égales. Donc chaque partie de l'une de ces cordes est égale à chaque partie de l'autre.

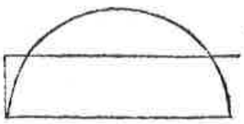
PROBLEMES.

I.

TROUVER l'angle droit dont on a l'hypothenuse & la distance du sommet à l'hypothenuse. XXXVI.

Elever de l'extremité de l'hypothenuse une perpendiculaire égale à cette distance, & tirer par l'autre extremité de cette perpendiculaire une parallele à l'hypothenuse.

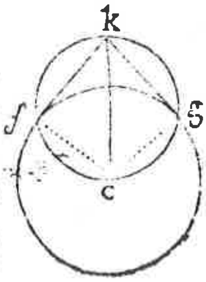
L'un des deux points où cette parallele coupera le cercle qui aura l'hypothenuse pour diametre, ou le point de l'attouchement, si elle le touche, sera le sommet de cet angle droit qui en determinera les costez.



Car la distance estant donnée de ce sommet à l'hypothenuse, il ne se peut trouver ailleurs (d'un costé) qu'en quelqu'un des points de cette parallele; & parceque cet angle est supposé droit, il faut par le II. Corollaire qu'il se trouve aussy en quelqu'un des points de la demycirconference. Donc en un des points où elle la coupe, ou en celuy auquel elle le touche.

SECOND PROBLEME.

D'UN point hors le cercle tirer les tangentes au cercle & montrer qu'on n'en peut tirer que deux, & qu'elles sont égales. XXXVII.



Soit *k* le point hors le cercle, & *c* le centre du cercle, joindre ces points par une ligne. Décrire le cercle qui aura cette ligne pour diametre & qui coupera le premier en deux points comme *f* & *g*; *kf*, & *kg*, seront les deux tangentes tirées du point *k* au premier cercle.

Car l'angle que l'une & l'autre fait avec le rayon du 1er cercle eſt droit, parce qu'il eſt dans un demycercle.

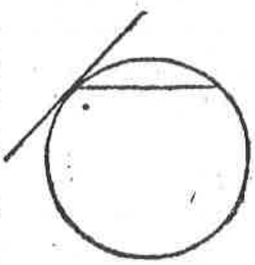
Et il ne peut y avoir que ces deux lignes tirées du point *k* qui touchent le cercle, parce que le ſommet de l'angle droit, qui doit avoir pour coſtez la tangente tirée de *k* & un rayon du 1er cercle doit eſtre en un point commun aux circonferences des deux cercles, puiſqu'il doit eſtre dans la circonference du premier, à cauſe qu'un rayon du premier en eſt un des coſtez; & dans celle du ſecond, à cauſe que tous les angles droits qui ont le diametre du ſecond cercle pour hypothenuſe doivent avoir leur ſommet dans la circonference de ce ſecond cercle (par le 13e Corollaire.)

Or il n'y a que les points *f* & *g* qui ſoient communs aux deux cercles. Donc on ne peut tirer de *k* que les deux tangentes *kf* & *kg*.

Et il eſt clair qu'elles ſont égales, puiſque chacune ſoûtient des arcs égaux dans la circonference du nouveau cercle.

TROISIEME PROBLEME.

XXXVIII. COUPER un ſegment dans un cercle donné qui ſoit capable d'un angle donné.



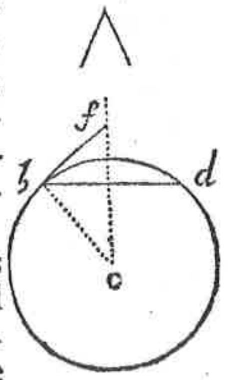
Ayant tiré une tangente au cercle, la corde qui fera avec cette tangente au point de l'atouchement un angle égal à l'angle donné, ſatisfera au Probleme. Car le ſegment du coſté opposé à celuy de l'angle égal au donné qui fait cette corde avec la tangente, ſera capable de l'angle donné, par le 5. & 10e Corollaire.

QUATRIEME PROBLEME.

XXXIX. TROUVER le cercle dont le ſegment terminé par une ligne donnée ſoit capable d'un angle donné.

Soit la ligne donnée *bd*, & l'angle donné *k*; ſoit tirée *bf* qui faſſe ſur *bd* un angle égal à l'angle *k*.

Soit

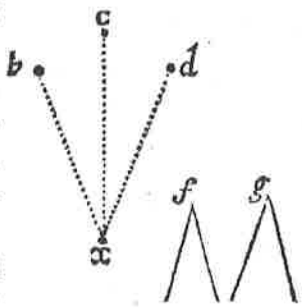


Soit élevé du point b une perpendiculaire à bf, & qu'il y ait une autre perpendiculaire à bd qui coupe bd par la moitié ; le point c, où je ſuppoſe que ces deux perpendiculaires ſe rencontreront ſera le centre du cercle, qui aura cb ou cd pour intervale, & pour tangente fb.

Donc le ſegment oppoſé à celuy vers lequel eſt fb ſera capable d'un angle égal à l'angle fbd, par le 5ᵉ Corollaire, parceque l'un ſera l'angle du ſegment, & l'autre l'angle dans le ſegment oppoſé.

CINQUIEME PROBLEME.

CONNOISSANT quelle eſt la diſtance de trois points l'un de l'autre, comme de b, c, d, & ne ſçachant d'un 4ᵉ comme x, ſinon de quel coſté il eſt, à l'égard de ces trois-là, & quelle eſt la grandeur de l'angle compris entre ces lignes xb & xc, & de celuy qui eſt compris entre ces lignes xc & xd trouver ce 4ᵉ point. XL.



Les lignes bc & cd ſont données par l'hypotheſe.

Et les angles donnez ſoient f & g.

Trouver par le Probleme precedent le cercle dont le ſegment terminé par bc, tourné vers x, ſoit capable de l'angle f.

Et trouver de meſme un autre cercle dont le ſegment terminé par cd & tourné vers x, ſoit capable de l'angle g.

Ces deux cercles ſe couperont en deux points, dont l'un ſera c par la conſtruction, & l'autre x : ce qui ſe prouve ainſy.

Les deux angles bxc, & cxd, dont la grandeur eſt connüe, ont leur ſommet au même point.

Or par le 10ᵉ Corollaire l'angle égal à f ayant bc pour baſe ne peut avoir ſon ſommet ailleurs que dans un des points de l'arc du ſegment qu'on a trouvé eſtre capable de l'angle *f*. Et par la même raiſon l'angle égal à *g* ayant *cd* pour baſe ne peut auſſy avoir ſon ſommet que dans un des points de l'arc du ſegment qu'on a trouvé eſtre capable de l'angle *g*. Donc il faut que ce point qui eſt le ſommet de tous les deux angles ſoit commun à tous les deux cercles. Donc il faut que ce ſoit l'un des deux points où ils ſe coupent. Or il eſt bien viſible que ce n'eſt pas le point *c*. Donc l'autre point où ils ſe coupent eſt le point *x* que l'on cherchoit.

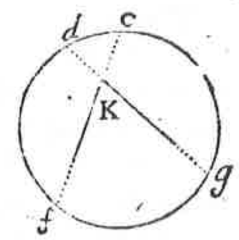
II.

DES ANGLES

DONT LE SOMMET EST AU DEDANS DU CERCLE ET AILLEURS QU'AU CENTRE.

XLI. QUAND le ſommet d'un angle eſt au dedans du cercle, mais ailleurs qu'au centre, comme peut eſtre l'angle *k*, ſes coſtez doivent toûjours eſtre conſiderez comme terminez par la circonference, comme au point *f* & *g*; & de plus il les faut auſſi prolonger au delà du ſommet juſques à la circonference de l'autre part, en prolongeant par exemple *fk* juſques en *c*, & *gk* juſques en *d*.

Et ainſy ces angles ſe reduiſent aux angles qui ſe font dans la ſection de deux cordes qui ſe coupent au dedans du cercle, où il ſe fait quatre angles dont les oppoſez ſont égaux, & qui ſont chacun appuyé ſur l'un des quatre arcs, auſquels cette circonference ſe trouve diviſée par ces deux cordes.

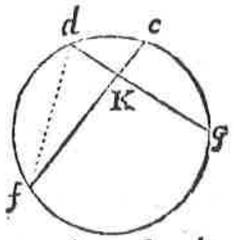


Voicy donc le Theoreme qui nous apprendra la meſure de ces angles.

QUATRIEME THEOREME.

XLII. TOUT angle fait par la ſection de deux cordes qui ſe coupent au dedans du cercle, a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé plus la moitié de l'arc oppoſé.

Soient les deux cordes *cf* & *dg* qui ſe coupent en *k*. Prenons lequel on voudra des quatre angles qu'elles font en se coupant, comme fkg; je dis qu'il aura pour sa mesure la moitié de l'arc fg plus la moitié de l'arc opposé dc.



Soient joints les points df, l'angle fkg est égal aux deux angles vers d & vers f (par le 4^e Lemme.)

Or l'angle vers d a pour mesure la moitié de l'arc fg sur lequel il est appuyé, & l'angle vers f la moitié de l'arc cd, par la même raison.

Donc l'angle fkg qui leur est égal, a pour sa mesure les moitiez de ces deux mêmes arcs : ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

QUAND deux cordes égales moindres que des diametres se coupent, elles divisent la circonference en quatre arcs, dont il y en a deux opposez qui sont égaux, & deux autres inégaux ; & alors les angles qui sont appuyez sur chacun de ces arcs égaux ont pour mesure cet arc entier. XLIII.

Car les opposez estant égaux, un entier est la même chose que la moitié de l'un plus la moitié de l'autre.

Je ne prouve point ce qui est supposé dans ce Corollaire, parce que c'est une suite visible de ce qui a esté demonstré, sup. 35.

III.
DES ANGLES
DONT LE SOMMET EST HORS LE CERCLE
QUE LEURS COSTEZ COUPENT OU TOUCHENT.

LES costez d'un angle dont le sommet est hors le cercle peuvent, XLIV.

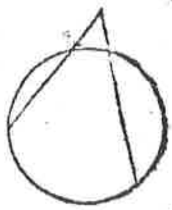
Ou le couper tous deux.

Ou le toucher tous deux.

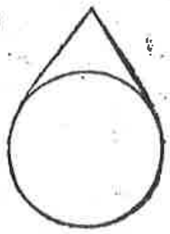
Ou l'un le couper & l'autre le toucher.

Mais quand ils le coupent, on les considere toûjours comme entrans dans le cercle selon sa convexité, & estant terminez par la circonference au dedans du cercle selon sa concavité.

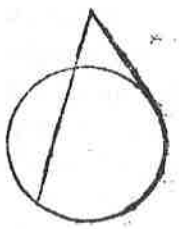
C'eſt pourquoy ces angles ſont toûjours conſiderez comme eſtant appuyez ſur deux arcs du cercle, l'un concave & l'autre convexe.



Quand les deux coſtez le coupent, l'arc concave eſt celuy qui eſt compris entre les deux points, où les deux coſtez ſont terminez au dedans du cercle. Et le convexe eſt celuy qui eſt compris entre les deux points par où il entre dans le cercle.



Quand tous les deux coſtez touchent le cercle, l'un & l'autre eſt compris entre les déux points de l'attouchement, mais l'un eſt concave au regard de langle, & l'autre convexe.



Et quand l'un touche & l'autre coupe le cercle, le concave eſt compris entre le point de l'attouchement & celuy où ſe termine l'autre coſté; & le convexe entre le point de l'attouchement & celuy où l'autre coſté entre dans le cercle.

Il eſtoit neceſſaire de bien expliquer ces deux ſortes d'arcs, parceque de là depend la meſure de ces angles ſelon ce Theoreme.

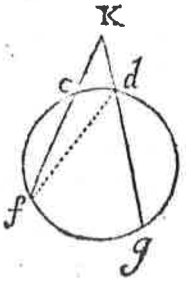
CINQUIEME THEOREME.

XLV. LORS que le ſommet d'un angle eſt hors le cercle, ſoit que ces deux coſtez coupent le cercle, ou que tous deux le touchent, ou que l'un le coupe & l'autre le touche; il a pour meſure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe.

PREUVE DANS LE PREMIER CAS.

Soit l'angle fkg, dont le coſté kf coupe le cercle en c, & kg en d; l'arc concave eſt fg, & le convexe cd. Il faut donc prouver que cet angle a pour meſure la moitié de l'arc fg moins la moitié de l'arc cd, & on le prouve ainſy.

Soit tirée la ligne fd. Par le 4[e] Lemme l'angle fdg eſt égal à l'angle fkg plus l'angle kfd.

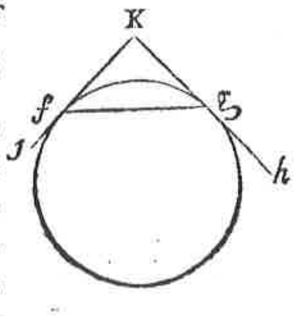


Donc l'angle k eſt égal à l'angle $f\,d\,g$ moins l'angle $k\,f\,d$. Donc il doit avoir pour meſure la meſure de l'angle $f\,d\,g$ moins la meſure de l'angle $k\,f\,d$.

Or la meſure de l'angle $f d g$ eſt la moitié de l'arc concave $f g$, ſur lequel il eſt appuyé; & la meſure de l'angle $k\,f\,d$ eſt la moitié de l'arc convexe $d\,c$.

Donc l'angle k a pour meſure la moitié de l'arc concave $f\,g$, moins la moitié de l'arc convexe $d\,c$.

PREUVE DU SECOND CAS.



Soit l'angle k, dont les coſtez $k\,f$ & $k\,g$ touchent le cercle, & ſoit $k\,g$ prolongée juſques en h.

L'angle $f\,g\,h$ eſt égal à l'angle k plus l'angle $k f g$. Donc l'angle k eſt égal à l'angle $f g h$, moins l'angle $k f g$.

Or l'angle $f g h$ a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment $f g$, & l'angle $k f g$ a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment $f g$. Donc l'angle k a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment, qui eſt l'arc concave moins l'arc du petit ſegment, qui eſt l'arc convexe.

La preuve du troiſiême Cas eſt ſemblable à ces deux là, tenant quelque choſe de l'un & de l'autre. Il vaut mieux la laiſſer trouver.

AVERTISSEMENT.

Outre cette meſure qui eſt generale à toutes ces ſortes d'angles, il y en a qui ſont particulieres à quelques uns qu'il eſt bon de marquer par des Theoremes particuliers.

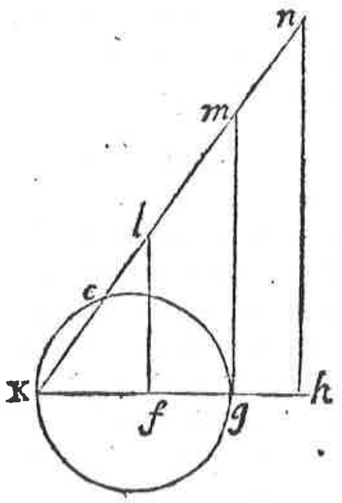
SIXIEME THEOREME.

UN angle ayant ſon ſommet hors le cercle, ſi l'un de ſes coſtez qui coupe le cercle ſe termine à l'extremité d'un diametre auquel l'autre coſté eſt perpendiculaire, ſoit en coupant le cercle, ſoit en le touchant, ſoit même eſtant hors le cercle ce diametre y eſtant prolongé, en tous ces XLVI.

cas cet angle a pour sa mesure la moitié de l'arc que soûtient la partie de son costé non perpendiculaire au diametre.

Il ne sera pas inutile de donner ce Theoreme pour exemple des diverses voyes que les principes qu'on a établis peuvent fournir pour demonstrer une même chose.

PREMIERE DEMONSTRATION.



CLVII. Soit le diametre *kg* prolongé jusques à *h*. Soit de *k* tirée une ligne indefinie qui coupe le cercle en *c*.

Soit de divers points de cette ligne hors le cercle comme de *l*, *m*, *n*, tirées sur le diametre les perpendiculaires *lf*, *mg*, *nh*. J'ay à prouver que chacun de ces angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'arc *kc*. Ce qu'on peut faire en cette maniere.

Chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, plus l'angle vers *k*, valent un angle droit par le 4[e] Lemme, parce que ce sont les angles sur la base d'un angle droit. Donc chacun de ces angles plus l'angle vers *k* ont pour mesure la demycirconference. Donc ils ont aussy pour mesure, par le 3[e] Lemme, les deux moitiez des deux arcs *kc* & *cg*, qui comprennent la demycirconference.

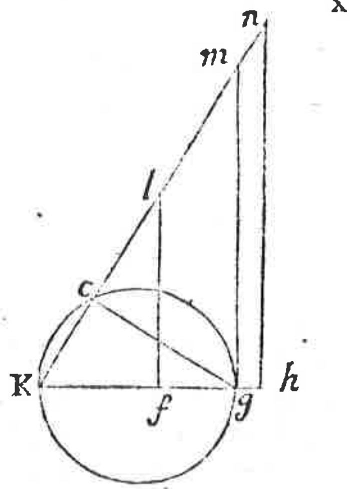
Or l'angle vers *k* a pour sa mesure la moitié de l'arc *cg* sur lequel il est appuyé.

Reste donc pour la mesure de chacun des autres la moitié de l'arc *k c*. Ce qu'il faloit demonstrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

XLVIII.

SOIT encore tirée la ligne *cg*, l'angle *k c g* est droit, parce qu'il est dans le demycercle. Donc l'angle *c g k* est égal à chacun des angles vers *l m n*, puisque chacun de ces angles plus l'angle vers *k* sont aussy égaux à un droit.



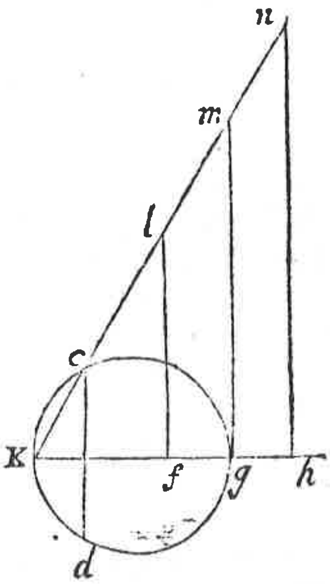
Or l'angle *c g k* a pour mesure la moitié de l'arc *k c* sur lequel il est appuyé.

Donc la moitié de cet arc *k c* est aussy la mesure de chacun des angles vers *l*, *m*, *n*.

TROISIEME DEMONSTRATION.

XLIX.

SOIT tirée la ligne *c d* qui coupe perpendiculairement le diametre, ce qui fera que les arcs *k c* & *k d* seront égaux. Et la ligne *c d* estant parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, les angles que font ces paralleles sur la même ligne aux points *c*, *l*, *m*, *n*, sont égaux.

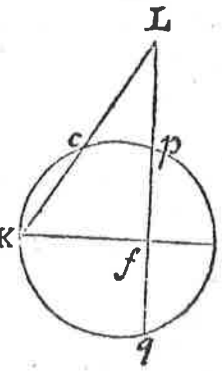


Or l'angle *k c d* a pour sa mesure la moitié de l'arc *k d* égal à l'arc *k c*. Donc chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'un ou l'autre de ces deux arcs qui sont égaux, *k d* & *k c*. Donc on peut dire qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc *k c*. Ce qu'il faloit demonstrer.

QUATRIEME DEMONSTRATION.

L. C'EST l'application de la demonstration du Theoreme general à ce cas particulier.

Je suppose que la perpendiculaire *Lf* coupe le cercle en *p* & en *q*. Par la demonstration du Theoreme general, l'angle *KLq* a pour mesure la moitié de son arc concave *Kq*, moins la moitié de son arc convexe *cp*.



Or l'arc concave *Kq* est égal aux deux arcs *Kc*, & *cp*.

Donc la moitié de l'arc *Kq* est la même chose que la moitié de l'arc *Kc*, plus la moitié de l'arc *cp*, par le 3e Lemme.

Donc la moitié de l'arc *Kq*, moins la moitié de l'arc *cp*, est la même chose que la moitié de l'arc *kc*.

Donc la moitié de l'arc *kc* est la mesure de l'angle *kLq*. Ce qu'il faloit demonstrer.

DES ANGLES DONT LES DEUX COSTEZ TOUCHENT LE CERCLE.

LI. IL est bon d'en dire quelque chose en particulier outre ce qu'on en a dit en general.

On les peut appeller des angles circonscripts.

Et voicy une nouvelle maniere de les mesurer.

SEPTIEME THEOREME.

LII. L'ANGLE circonscript au cercle, c'estadire dont les deux costez touchent le cercle, a pour mesure la demycirconference moins l'arc convexe sur lequel il est appuyé.

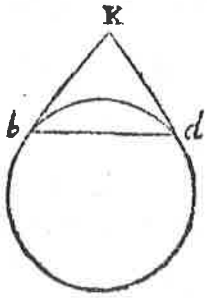
PREMIERE DEMONSTRATION.

Soit l'angle *bkd*, à qui soit donné pour base la ligne qui joint les deux points d'attouchement *bd*; l'angle *k* plus les deux angles sur sa base sont égaux à deux droits, c'estadire ont pour mesure pris ensemble la demycirconference.

Or les deux angles sur la base ont chacun pour mesure

la

la moitié de l'arc convexe *b d*, par le 2^e^ Theoreme.



Donc la mesure des deux est cet arc convexe.

Donc ostant cet arc convexe de la demycirconference, ce qui restera sera la mesure de l'angle *k* circonscrit au cercle: ce qu'il falloit demonstrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

Par la demonstration generale l'angle *k* a pour mesure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe. Or ces deux arcs comprennent toute la circonference. Donc par le 3^e^ Lemme la moitié de toute la circonference moins l'arc convexe entier, est la mesme chose que la moitié de l'arc concave moins la moitié du convexe.

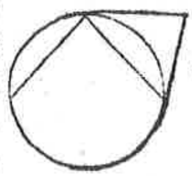
PREMIER COROLLAIRE.

DEUX angles circonscripts sont égaux quand ils sont appuyez sur des arcs convexes d'autant de degrez, & le plus grand est celuy qui est appuyé sur un arc de moins de degrez. LIII.

Car de 180 degrez qui en oste un nombre égal, ce qui reste est égal, & plus le nombre qu'on en oste est petit, plus ce qui reste est grand. Donc, &c.

SECOND COROLLAIRE.

SI un angle circonscript est appuyé sur un arc convexe qui soit soûtenu par le costé d'un angle inscrit isoscele, l'angle inscript & le circonscript sont égaux. LIV.



Car ostant cet arc de la demycirconference, ce qui restera sera la mesure du circonscript par 52. §. & de l'inscript par 20. §.

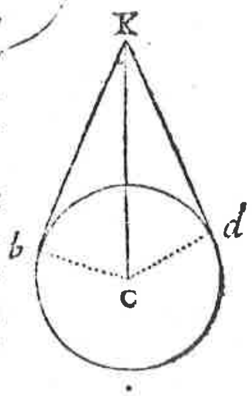
TROISIEME COROLLAIRE.

IL est bon de considerer toûjours les costez de l'angle circonscript comme terminez au point de l'attouchemẽt. Et selon cela il faut dire que tout angle circonscript est isoscelle : car les deux tangentes au cercle menées du mes- LV.

me point sont toûjours égales, par le 2[e] Probleme.

QUATRIEME COROLLAIRE.

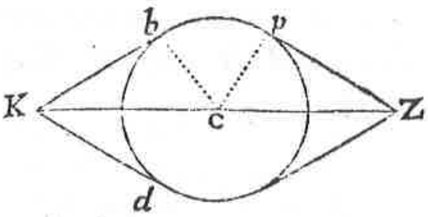
LVI. LA ligne menée du sommet de l'angle circonscript au centre le divise toûjours par la moitié. Et l'on peut appeller ces deux moitiez de l'angle circonscript des demyangles circonscripts.



Car si on tire deux rayons au point de l'attouchement, on ne pourra considerer ces deux demyangles qu'on ne voye sans peine que les costez de l'un sont égaux aux costez de l'autre, & que les rayons du même cercle, & par consequent égaux, en sont les sinus. Donc ils sont égaux.

CINQUIEME COROLLAIRE.

LVII. LES angles circonscripts au même cercle sont égaux quand les tangentes de l'un sont égales aux tangentes de l'autre.



Soient *k b* tangente de l'angle *k* égale à *z p*, tangente de l'angle *z*. Je dis que les angles *k* & *z* sont égaux. Car tirant les lignes du centre *k c* & *z c*, & les rayons *c b* & *c p*, les angles *k b c* & *z p c* sont égaux, parce qu'ils sont tous deux droits.

Et les costez de l'un sont égaux aux costez de l'autre, puisque par l'hypothese *k b* est égale à *z p*, & que *c b* & *c p* sont les rayons du même cercle.

Donc les bases de ces angles *k c* & *z c* sont égales.

Donc les angles *b k c* & *p z c* sont égaux, les costez de l'un estant égaux aux costez de l'autre, & ayant les deux rayons pour leurs sinus.

Or ces deux angles *b k c* & *p z c* sont chacun la moitié de chaque angle circonscript, par le Corollaire precedent.

Donc les angles circonscripts sont égaux: ce qu'il falloit demonstrer.

SIXIEME COROLLAIRE.

LES angles circonſcripts au même cercle ſont égaux quand leur ſommet eſt également éloigné du centre, & les plus petits ſont ceux dõt le ſommet en eſt plus éloigné. LVIII.

Cela eſt facile à prouver par les demyangles circonſcripts, & je le laiſſe à trouver à ceux qui commencent pour faire eſſay de leurs forces.

RECAPITULATION DE LA MESURE DES ANGLES.

LE ſommet de l'angle eſt LIX.

- Dans le cercle
  - au centre. 1.
  - hors le centre. 2.
- Dans la circonf.
  - l'un des coſtez au dedans, & l'autre au dehors,
    - le touchant. 3.
    - le coupant. 4.
  - tous deux au dedans du cercle. 5.
- Hors le cercle.
  - Les deux coſtez le coupant. 6.
  - Les deux le touchant. 7.
  - L'un le touchant & l'autre le coupant. 8.
- Et parmy ces angles, l'un des coſtez coupant le cercle & eſtant terminé à l'extremité du diametre auquel l'autre coſté eſt perpendiculaire. 9.

ONT POUR MESURE

1. L'arc ſur lequel il eſt appuyé. VIII. 10.

2. La moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé plus la moitié de l'arc oppoſé. IX. 38.

3. La moitié de l'arc que ſoutient le coſté qui eſt au dedans du cercle. IX. 13.

4. La moitié de l'arc que ſoutient le coſté qui eſt au dedans du cercle, plus la moitié de celuy que ſoutient le prolongement du coſté qui eſt hors le cercle. IX. 15.

5. La moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé. IX. 18.

6. 7. 8. La moitié de l'arc concave ſur lequel il eſt appuyé moins la moitié de l'arc convexe. IX. 41.

7. La demycirconference moins l'arc convexe ſur lequel il eſt appuyé. IX. 41.

9. La moitié de l'arc ſoutenüe par la partie du coſté non perpendiculaire au diametre. IX. 43.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DIXIEME.

DES LIGNES PROPORTIONELLES.

I. *LA proportion des lignes dépend de deux choses, des paralleles & des angles, & ainsy elle n'a pas pû se bien traitter qu'aprés l'explication de l'une & l'autre. Et mesme pour en bien comprendre tout le mystere, il faut reprendre beaucoup de choses des paralleles que nous proposerons en forme de Lemmes.*

PREMIER LEMME. DEFINITION.

II. UN espace compris d'une part entre deux paralleles & indefiny de l'autre, soit appellé espace parallele.

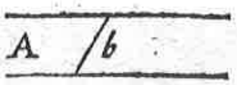
SECOND LEMME. DEFINITION.

III. COMME on ne considere dans ces espaces que la distance entre les paralleles, leur grandeur dépend de cette distance qui est mesurée par les perpendiculaires comprises entre ces paralleles, que nous appellerons pour cette raison les perpendiculaires des espaces.

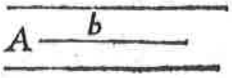
Et delà il s'ensuit que ces espaces sont égaux quand les perpendiculaires de l'un sont égales aux perpendiculaires de l'autre.

TROISIEME LEMME. DEFINITION.

IV. ON dit qu'une ligne est dans un espace parallele quand elle eſt terminée par les paralleles qui le terminent, comme la ligne *b* eſt dans l'eſpace *A*.



On dit qu'une ligne eſt parallele à un eſpace quand elle l'eſt aux lignes qui le terminent, comme la ligne *b* eſt parallele à l'eſpace *A*.



QUATRIEME LEMME.

L'INCLINATION d'une ligne dans un eſpace ſe conſidere par l'angle aigu qu'elle fait ſur l'une & l'autre parallele le faiſant toûjours égal. V.

D'où il s'enſuit que deux lignes ſont également inclinées dans le même eſpace, ou dans deux eſpaces differens quand les angles aigus que fait l'une ſont égaux aux angles aigus que fait l'autre.

Et que la moins inclinée eſt celle qui fait ſon angle aigu moins aigu & plus approchant du droit.

CINQUIEME LEMME IMPORTANT.

LORSQUE deux ou pluſieurs lignes ſont menées d'un même point ſur la même ligne, elles ſont cenſées eſtre dans un même eſpace parallele. Car il ne faut alors que concevoir une ligne menée par ce point commun, qui ſoit parallele à celle qui les termine. D'où il s'enſuit que les coſtez d'un angle terminez par une baſe ſont toûjours cenſez eſtre dans le même eſpace parallele. VI.

SIXIEME LEMME.

DEUX angles ſoient appellez ſemblables lors qu'eſtans égaux les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun. VII.

Et on eſt aſſeuré que cela eſt; 1. quand on ſçait qu'ils ſont égaux, & qu'un des angles ſur la baſe de l'un eſt égal à l'un des angles ſur la baſe de l'autre: car de là il s'enſuit que l'autre eſt égal auſſy.

2. Lors qu'eſtant égaux ils ſont de plus Iſoſceles. VIII. 59.

SEPTIEME LEMME.

QUAND les ſommets de deux angles ſont également diſtans chacun de ſa baſe (prolongée s'il eſt beſoin) ces VIII.

deux angles peuvent estre compris dans le même espace parallele. Car mettant ces deux bases sur une même ligne, la ligne qui passera par les deux sommets sera parallele à celle qui comprendra les deux bases.

HUITIEME LEMME.

IX. DANS le même espace parallele, ou dans les espaces paralleles égaux, toutes les également inclinées sont égales, & toutes les égales sont également inclinées. VIII. 54.

Et au contraire les espaces paralleles sont égaux quand les également inclinées y sont égales. Car de là il est certain que les perpendiculaires le sont aussy. VIII. 56.

NEUVIEME LEMME.

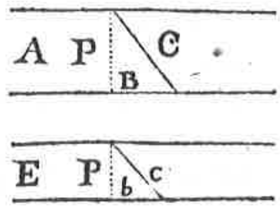
X. LORS qu'une même ligne est coupée par plusieurs lignes toutes paralleles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les paralleles qui les renferment. VIII. 57.

DIXIEME LEMME.

XI. LORS qu'il y a proportion entre quatre lignes, on dit que deux de ces lignes sont proportionelles aux deux autres lignes quand les deux antecedens de la proportion se trouvent dans les deux premieres, & les deux consequens dans les deux dernieres. D'où il s'ensuit aussy qu'*Alternando*, on peut prendre aussy les deux premieres pour les deux termes d'une raison, & les deux dernieres pour les deux termes de l'autre.

PROPOSITION FONDAMENTALE DES LIGNES PROPORTIONELLES.

XII. LORS que deux lignes sont également inclinées en deux differens espaces paralleles, elles sont entr'elles comme les perpendiculaires de ces espaces, & leurs éloignemens du perpendicule sont aussy en même raison.



Soient deux espaces A & E.
Soient appellées dans l'espace *A*.
La perpendiculaire, *P*.
L'oblique, *C*.
L'éloignemēt du perpendicule *B*.
Et soient de même appellées dans

l'eſpace, E.

La perpendiculaire p.

L'oblique c.

L'éloignement du perpendicule b. Je dis que

$Pp :: Cc :: Bb$.

Et en voila la preuve tres naturelle, dont je ne croy pas que jamais perſonne ſe ſoit aviſé.

Soit p diviſée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. & ces aliquotes quelconques de p ſoient appellées x.

Si on tire par tout les points de cette diviſion telle qu'elle ſoit des paralleles à l'eſpace A, cet eſpace ſera diviſé en autant de petits eſpaces paralleles qu'x ſera dans p, & ces petits eſpaces ſeront égaux par le 2e Lemme, parce qu'ils auront tous x pour perpendiculaire.

Et de là il s'enſuit que C ſera auſſy diviſé en aliquotes pareilles à celles de P, parce que les portions de C, qui ſe trouvent entre chacun de ces petits eſpaces égaux y eſtant également inclinées par le 9. Lemme, y ſont égales par le 8.

Soient donc les aliquotes de C pareilles à celles de P appellées y.

Que ſi de tous les points de diviſion de C on tire des paralleles à P (qui ſeront par conſequent perpendiculaires à l'eſpace) elles couperont encore B en aliquotes pareilles, parce que chaque y ſe trouvant également inclinée en chacun de ces nouveaux petits eſpaces, ils ſeront égaux par le 9e Lemme. Et par conſequent les portions de B qui ſeront toutes perpendiculaires dans ces eſpaces égaux, ſeront égales. (Et cela même ſeroit vray quand elles n'y ſeroient pas perpendiculaires, pourveu qu'elles y fuſſent également inclinées. Ce qu'il faut remarquer pour une autre occaſion.)

Cela eſtant fait, prenant x pour meſurer p de l'eſpace E, où elle s'y trouvera preciſement tant de fois, ou tant de fois plus quelque reſte, c'eſtadire plus une portion moindre qu'x. Et ainſy tirant des lignes paralleles à l'eſpace E par tous les points de la diviſion de p meſurée par x, l'eſpace *E* ſe trouvera diviſé en autant de petits eſpaces égaux entr'eux, & égaux à ceux qui ont eu la même *x* pour perpendiculaire dans l'eſpace *A*, qu'*x* ſe ſera trouvé dans *p*, ſi ce n'eſt qu'il y en aura un plus petit, ſi *x* ne s'y eſt trouvée que tant de fois plus quelque reſte. Car le petit eſpace où ſera compris ce reſte ſera plus petit que les autres.

Et de là il s'enſuit que *c* eſtant auſſy inclinée dans *E* que *C* dans *A*, les portions de *c* compriſes dans ces eſpaces égaux à ceux d'*A* ſeront égales aux portions de *C*, & ainſy ſe pourront auſſy appeller *y*; & s'il y avoit eu en *p* un reſte moindre qu'*x*, il y auroit auſſy eu en *c* un reſte moindre qu'*y*.

Donc par la definition des grandeurs proportionelles,

$$Pp :: Cc.$$

puiſque *x* & *y*, aliquotes quelconques pareilles des deux antecedens *P* & *C*, ſont également contenües dans les deux conſequens *p* & *c*, ſi dans l'un ſans reſte, dans l'autre ſans reſte: ſi dans l'un avec reſte, dans l'autre avec reſte.

On prouvera la même choſe de *B* & de *b*. Car ſi *c* eſtant meſurée & diviſée par *y*, on tire des paralleles à *p* (qui ſeront perpendiculaires à l'eſpace) par tous les points de la diviſion, *b* ſera diviſée en autant de parties que *c*, & ces parties ſeront égales aux parties de *B*, que nous avons nommées *z*: ſi ce n'eſt qu'il y en aura une moindre que *z*, s'il y a eu un reſte dans *c* moindre qu'*y*.

Donc les aliquotes pareilles de *C* & de *B* ſeront également contenües dans *c* & *b*.

Donc $Cc :: Bb$.

Donc $Pp :: Cc :: Bb$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREMIER THEOREME.

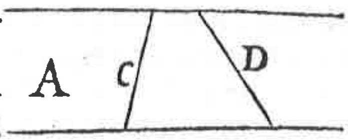
XIII. SI deux lignes inégalement inclinées dans le même eſpace le ſont autant chacune, que chacune de deux autres le ſont dans un autre eſpace, les également inclinées ſont en même raiſon.

Soient

Soient les eſpaces *A* & *E*.

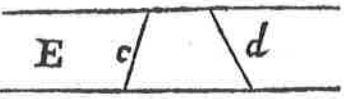
Soit *C* autant inclinée dans l'eſpace *A* que *c* dans l'eſpace *E*.

Et *D* autant inclinée dans l'eſpace *A*, que *d* dans l'eſpace *E*.



Je dis que *C c* :: *D d*.

Car par la propoſition precedente



C eſt à *c*, comme la perpendiculaire d'*A* à la perpendiculaire d'*E*.

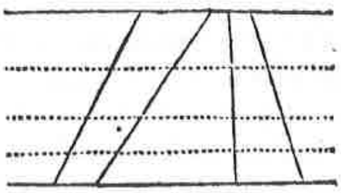
Or *D* eſt auſſy à *d*, comme ces deux mêmes perpendiculaires.

Donc *C c* :: *D d*.

On le peut auſſy prouver immédiatement & par ſoy même ſans avoir recours aux perpendiculaires par la même voye dont on s'eſt ſervi dans la Propoſition precedente, & que je ne repete point, parce qu'il eſt tres facile de la trouver.

PREMIER COROLLAIRE.

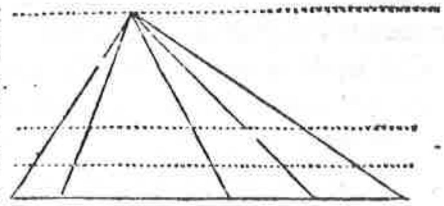
PLUSIEURS lignes eſtant diverſement inclinées dans le même eſpace parallele, ſi elles ſont toutes coupées par des paralleles à cet eſpace, elles le ſont proportionellement, c'eſtadire que chaque toute eſt à chacune de ſes parties, telle qu'eſt la 1^{re}, ou la 2^{e}, ou la 3^{e} &c. comme chaque autre toute a la même partie 1^{re}, ou 2^{e}, ou 3^{e} &c. XIV.



C'eſt une ſuitte manifeſte du precedent Theoreme, puiſque d'une part toutes les toutes ſont dans le même eſpace, qui eſt l'eſpace total. Toutes les premieres parties dans le 1^{er} eſpace partial, les 2^{des} dans le 2^{e}, & ainſy des autres. Et que de l'autre chaque toute & chacune de ſes parties ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace par le 9^{e} Lemme. Donc la 1^{re} toute eſt à ſa 1^{re} partie comme la ſeconde toute à ſa 1^{re} partie.

SECOND COROLLAIRE.

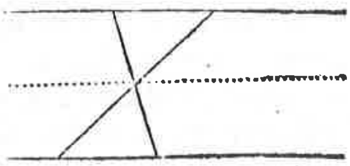
XV. Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionellement par toutes les lignes paralleles à celle qui les termine.



C'est la même chose que le precedent Corollaire, puisque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles se trouveront toutes dans le même espace parallele, & par consequent les paralleles à cet espace les doivent toutes couper proportionellement.

TROISIEME COROLLAIRE.

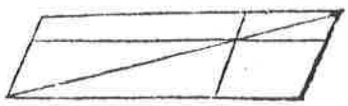
XVI. Si deux lignes comprises dans un même espace se coupent, elles sont coupées proportionellement. C'estadire que les parties de l'une sont proportionelles aux parties de l'autre, outre que la toute est à la toute comme chaque partie à la même partie.



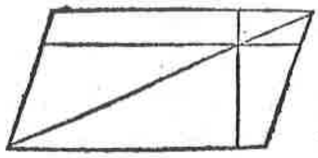
C'est encore la même chose que le 1er Corollaire, puisque menant une parallele à l'espace par le point de la section, ce seront deux lignes dans le même espace total qui sont coupées par une parallele à cet espace, & qui par consequent le doivent estre proportionellement.

QUATRIEME COROLLAIRE.

XVII. Si quatre lignes dont les opposées sont paralleles se joignent aux extremitez, elles font deux espaces paralleles, l'un d'un sens & l'autre de l'autre sens, & la ligne tirée de coin en coin s'appelle diagonale.



Que si d'un point quelconque de cette diagonale on tire deux lignes comprises chacune dans chacun de ces deux espaces, les parties de l'une de ces lignes seront proportionelles aux parties de l'autre.



Car les deux parties de chacune sont proportionelles aux deux parties de la diagonale, par le Corollaire precedent, parceque chacune de ces lignes & la diagonale sont comprises dans le même espace parallele & s'y coupent. Donc les parties de chacune estant en même raison que celles de la diagonale, les parties de l'une doivent aussy estre en même raison que les parties de l'autre, puisque deux raisons égales à une 3[e] sont égales entr'elles.

SECOND THEOREME.

LORSQUE deux angles sont semblables (c'estadire
selon le sixième Lemme, lorsqu'estant égaux les angles XVIII.
sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun) ces costez sont proportionels aux costez, & la base à la base, & la hauteur à la hauteur. C'estadire que les costez de ces deux angles également inclinez chacun sur sa base seront en même raison que les deux autres costez & que les deux bases, & que les distances de chaque sommet à chaque base : ce que j'appelle la hauteur de chaque angle.

Soient les deux angles nommez *A* & *E*.
Soit le grand costé d'*A* nommé *C*.
Le petit *D*.
La base *B*.
La hauteur *H*.
Et dans l'angle *E*.
Le grand costé *c*.
Le petit *d*.
La base *b*.
La hauteur *h*.

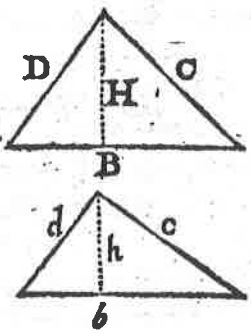
Je dis que *Cc* :: *Dd* :: *Bb* :: *Hh*.

On le peut prouver facilement de la même sorte qu'on a prouvé la Proposition fondamentale, c'estpourquoy je ne le repete point.

Mais on le peut encore de cette autre ſorte.

Par le 5ᵉ Lemme.

1°. C & D ſont cenſées eſtre dans le même eſpace parallele, & de même c & d.



Et de plus par l'hypotheſe C & c ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace, & de même D & d.

Donc par la Propoſition fondamentale, & par le 1ᵉʳ Theoreme,

$$Cc :: Hb.$$
$$Dd :: Hb.$$
$$Cc :: Dd. \text{ \& } alternando\ CD :: cd.$$

2°. Par le 5ᵉ Lemme, C & B ſont dans le même eſpace parallele & de même c & b, & de plus C & c ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace & de même B & b.

Donc par le 1ᵉʳ Theoreme,

$$Cc :: Bb. \text{ \& } alternando\ CB :: cb.$$

3°. Par le même 5ᵉ Lemme, D & B ſont dans le même eſpace parallele, & de même d & b.

Et de plus, D & B ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace, & de même d & b.

Donc par le 1ᵉʳ Theoreme,

$$Dd :: Bb. \text{ \& } alternando\ DB :: db.$$

Donc $\left.\begin{matrix} Cc \\ Dd \end{matrix}\right\} :: Bb.$ Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREMIER COROLLAIRE.

XIX. DEUX angles Iſoſceles eſtant égaux, ils ſont ſemblables, & par conſequent les coſtez ſont aux coſtez comme la baſe à la baſe, & la hauteur à la hauteur. Car deux angles eſtant Iſoſceles, ils ne peuvent eſtre égaux que les angles ſur la baſe de l'un ne ſoient égaux aux angles ſur la baſe de l'autre. VIII. 60.

SECOND COROLLAIRE.

XX. SI un angle a deux baſes paralleles, il s'y trouvera diverſes ſortes de proportions de grand uſage.

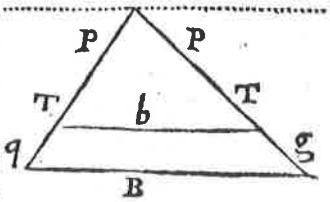
Mais pour le mieux faire entendre, il faut conſiderer que les costez de cet angle selon la derniere base comprennent ses costez selon la premiere, & c'est pourquoy nous appellerons les uns *toutes*, & les autres les premieres ou dernieres parties de chacune de ces toutes. Soient donc nommées

Les deux toutes T. & *T*.

Les deux premieres parties p. & *p*.

Les deux dernieres q. & *g*.

La derniere base & la 1re B. & *b*.



De plus tirant par le sommet une parallele aux deux bases, il se trouvera trois espaces paralleles.

Le total entre le sommet & B, que j'appelleray *ω*.

Le premier partial entre le sommet & *b*, A.

Le second partial entre *b* & B, *E*.

Cela estant par le 9e Lemme,

T est autant inclinée dans *ω*, que p dans A, & q dans *E*.

Et de même *T* autant inclinée dans *ω*, que *p* dans A, & *g* dans *E*.

Donc par le 1er Theoreme,

1. T p :: *T p* & *alternando*. T *T* :: p *p*.
2. T q :: *T g*. T *T* :: q *g*.
3. p q :: *p g*. p *p* :: q *g*.
4. Par le 2e Theoreme chaque toute & sa premiere partie sont en même raison que la derniere base & la premiere.

T p :: B *b*. T B :: p *b*.

T p :: B *b*. *T* B :: *p b*.

Car cet angle qui a deux bases paralleles doit estre consideré comme si c'estoient deux angles égaux, dont l'un eust pour costez & pour bases T. *T*. B. & l'autre p. *p*. *b*. & ainsy les deux angles sur la base de l'un estant égaux aux deux angles sur la base de l'autre chacun à chacun, les costez de l'un sont proportionels aux costez de l'autre, & les bases aussy. Et par consequent T p :: *T p* :: B *b*.

TROISIEME COROLLAIRE.

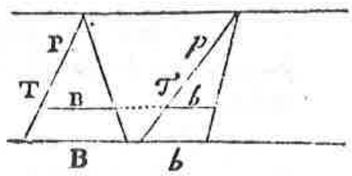
LORSQUE deux angles ont leur sommet également distant de leur base, & que par consequent ils peuvent estre compris dans le même espace parallele (selon le 7e Lemme) XXI.

si l'on donne à ces deux angles de nouvelles bases paralleles aux anciennes, & dont chacune en soit également distante, ces deux nouvelles bases seront proportionelles aux deux anciennes.

Supposons que les deux bases de ces deux angles, lesquelles j'appelleray B & *B*, soient sur la même ligne, la ligne qui joindra les sommets sera parallele à cette ligne. D'où il s'ensuit,

1°. Que considerant dans chacun de ces angles un seul costé, dont j'appelleray l'un T & l'autre *T*, ce seront deux lignes dans le même espace parallele.

2°. Que les deux nouvelles bases, que j'appelleray b & *b*, estant paralleles aux anciennes, & en devant estre chacune également distantes, se trouveront necessairement dans la même ligne parallele à l'espace.



Donc par le 1er Corollaire du 1er Theoreme : cette ligne parallele à l'espace coupe proportionellement T & *T*, & ainsy appellant p la premiere partie de T & *p* la premiere partie de *T*, T p :: *T p*.

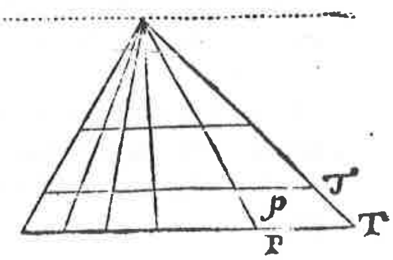
Or par le Corollaire precedent chacun de ces angles ayant deux bases paralleles { T p :: B b. / *T p* :: *B b*.

Donc les deux raisons de B b & de *B b* sont égales, puisque chacune est égale à chacune des deux raisons T p & *T p* qui sont égales entr'elles. Donc

B b :: *B b*. Donc *alternando* B *B* :: b *b*.

QUATRIEME COROLLAIRE.

XXII. Si d'un même point on tire plusieurs lignes à la même ligne comprises entre la premiere & la derniere, & qu'on tire des paralleles à celle-là qui soient aussy comprises entre la premiere



& la derniere de ces lignes tirées du même point, toutes ces paralleles seront coupées proportionellement, c'esta-dire que chaque toute & sa premiere partie seront en même raison que chaque autre toute & sa 1^re^ partie, & ainsy du reste.

Il suffit d'examiner deux de ces paralleles comme est la derniere d'en bas, que j'appelleray T, & sa premiere partie p, & une autre que j'appelleray *T*, & sa premiere partie *p*, & ainsy il faut prouver que

T. p :: *T*. *p*.

Et pour cela il ne faut que considerer, 1°. Que ces lignes tirées d'un même point font divers angles, que la premiere & la derniere font l'angle total, qui a toutes les paralleles entieres pour ses diverses bases. Que la premiere & la 2^e^ font le premier angle partial, qui a toutes les premieres parties de ces paralleles pour ses diverses bases, & ainsy du reste.

2°. Que tous ces angles sont dans le même espace parallele, parcequ'on peut tirer une ligne par leur sommet commun qui sera parallele à la derniere base de l'angle total.

Donc T estant la derniere base de l'angle, & p la derniere base du 1^er^ angle partial, laquelle est partie de la ligne T : T qui est une autre base de l'angle total, & *p* une autre base du 1^er^ angle partial, seront aussy sur une même ligne parallele à l'espace, puisque *p* est partie de *T*.

Donc par le Corollaire precedent les deux dernieres bases de ces deux angles T & p seront en même raison que leurs deux autres bases *T* & *p*. Donc

T. p :: *T*. *p*.

Donc par la même raison chaque parallele & sa 1^re^ partie seront en même raison que chaque autre parallele & sa 1^re^ partie.

Et on prouvera la même chose avec la même facilité de chacune des autres parties, en comparant toûjours ensemble celles qui sont renfermées entre les deux mêmes lignes.

CINQUIEME COROLLAIRE.

XXIII. Si l'une de ces paralleles renfermées entre la 1re & la derniere de plusieurs lignes tirées du même point, & divisée par ces lignes en parties aliquotes, c'estadire en un certain nombre de parties égales, toutes les autres sont divisées par les mêmes lignes en aliquotes pareilles.

C'est une suitte manifeste du precedent Corollaire. Car si chaque partie de l'une de ces paralleles en est par exemple la dixiême partie, il faut que chaque partie de chaque autre parallele en soit aussy la dixiême partie, puisque chaque parallele & chacune de ses parties sont en même raison que chaque autre parallele, & chacune de ses parties semblables.

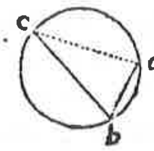
SIXIEME COROLLAIRE.

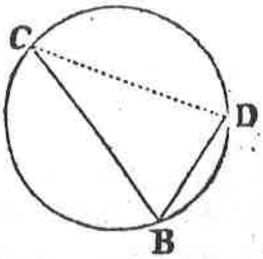
XXIV. Si un angle a plusieurs bases paralleles, toutes les lignes tirées du sommet qui couperont ces bases, les couperont proportionellement. D'où il s'ensuit qu'en quelques aliquotes que l'une de ces bases paralleles soit divisée, toutes les autres le seront en aliquotes pareilles.

Ce n'est que les deux precedens Corollaires un peu autrement énoncez.

SEPTIÈME COROLLAIRE.

XXV. Les deux cordes d'un cercle sont proportionelles aux deux cordes d'un autre cercle, si les arcs que soutiennent les unes sont proportionellement égaux aux arcs que soutiennent les autres, chacun à chacun.





Soient considerées les deux cordes d'un cercle, comme jointes & faisant un angle inscript: telles que sont *bc* & *bd* d'une part; & *BC* & *BD* de l'autre. (Car si elles ne faisoient pas d'angle inscript dans chaque cercle, il ne faudroit qu'en prendre d'égales à celles-là qui en fissent, puisque soutenant des arcs égaux dans

chaque

chaque cercle, par V. 26. ce sera la même chose pour juger de la proportion.) Cela supposé,

L'angle *c b d* inscrit dans le premier cercle est égal à l'angle *C B D* inscrit dans le second cercle, par IX. 21.

Et les angles que font les costez *b c* & *b d* sur la base *d c*, sont égaux aux angles que font les costez *B C* & *B D* sur la base *D C*, chacun à chacun, par IX. 21.

Donc par le 2ᵉ Theoreme,

bc. BC :: bd. BD :: dc. DC.

HUITIEME COROLLAIRE.

SI deux cordes de divers cercles soutiennent des arcs proportionellement égaux, (c'estadire d'autant de degrez) elles sont proportionelles aux diametres de ces cercles. XXVI.

C'est une suitte du precedent. Car les diametres soutiennent des arcs proportionellement égaux dans chaque cercle, puisqu'ils en soutiennent la demycirconference. C'est donc la même preuve & encore plus facile.

NEUVIEME COROLLAIRE.

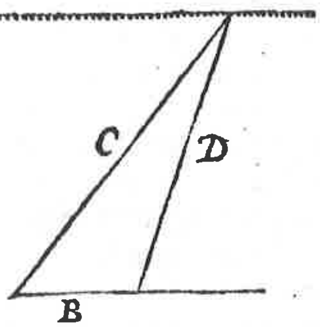
SI deux cordes égales de divers cercles soutiennent chacune autant de degrez, les cercles sont égaux. Car par le precedent Corollaire elles sont en même raison que les diametres des cercles. Donc si elles sont égales, les diametres sont éganx. Donc les cercles sont égaux. XXVII.

TROISIEME THEOREME.

DEUX Angles quoyqu'inégaux ont neanmoins leurs costez proportionels, lorsque le costé de l'un sur sa base fait un angle égal à celuy que fait aussy sur sa base l'un des costez de l'autre, & que l'autre costé du premier angle faisant sur sa base un angle obtus, & l'autre costé du second angle faisant un angle aigu sur la sienne, l'aigu est le complement de l'obtus, en sorte que tous les deux ensemble valent deux angles droits. XXVIII.

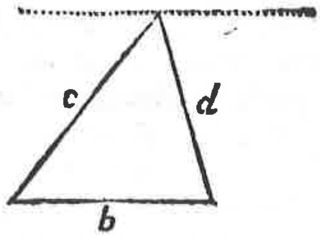
Cette derniere condition ſe peut encore exprimer en une autre maniere, qui eſt que ces deux coſtez, l'un d'un angle & l'autre de l'autre, faſſent chacun ſur ſa baſe le même angle aigu, mais que l'un le faſſe au dehors de la baſe & l'autre au dedans.

Cette derniere expreſſion fait entrer plus facilement dans la demonſtration de ce Theoreme.



Soient les deux angles, dont l'un ait pour coſtez *C* & *D*; & pour baſe *B*. Et l'autre pour coſtez *c* & *d*; & pour baſe *b*.

Je ſuppoſe, 1°. Que les angles que les coſtez *C* & *c* font chacun ſur leur baſe ſont égaux.



2°. Que le coſté *D* fait un angle obtus ſur la baſe *B*, & *d* un angle aigu ſur la baſe *b*, mais que cet aigu eſt égal au complement de cet obtus. D'où il s'enſuit,

Que l'angle aigu que *D* fait ſur la baſe en dehors en la concevant prolongée, eſt égal à l'angle aigu que *d* fait ſur la ſienne en dedans.

Cela eſtant, je dis que $C.c :: D.d.$

Car ſoient faits des deux angles deux eſpaces paralleles en prolongeant les baſes *B* & *b* autant qu'il eſt neceſſaire, & tirant par chacun des ſommets des paralleles à ces baſes. Et celuy de ces eſpaces dans lequel ſont *C* & *D* ſoit appellé *A*, & l'autre *E*.

Par l'hypotheſe l'angle aigu que fait *C* dans l'eſpace *A* eſt égal à l'angle aigu que fait *c* dans l'eſpace *E*.

Donc par le 4ᵉ Lemme *C* & *c* ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace.

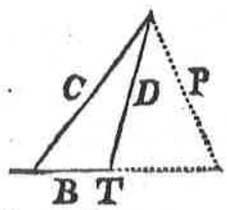
De même par l'hypotheſe l'angle aigu que fait *D* dans l'eſpace *A* (ſur la baſe *B* prolongée) eſt égal à l'angle aigu que fait *d* dans l'eſpace *E*.

Donc par le 4[e] Lemme *D* & *d* sont également inclinées chacune dans son espace, & il n'importe que *D* soit autrement tournée au regard de *c*, car cela ne change en rien l'inclination de chacune dans son espace. Donc par le 1[er] Theoreme,

C.c :: D.d. & alternando C.D :: c.d.

AUTRE DEMONSTRATION.

SI on tire une ligne du sommet sur la base *B* prolongée égale à *D*, l'angle aigu que fera cette ligne que j'appelleray *P* sur *B* prolongée sera égal au complement de l'obtus que fait *D* sur *B*, & par consequent à l'aigu que fait *d* sur *db* XXXI.



Donc les deux angles dont l'un a pour ses costez *C* & *P*, & l'autre *c* & *d*, sont semblables par le 6[e] Lemme.

Donc *C.c :: P.d.*

Or par la construction *P* est égale à *D*. Donc

C.c :: D.d.

AVERTISSEMENT.

Cette derniere demonstration, quoyque moins bonne que la premiere, a cela d'utile qu'elle fait voir plus clairement la difference qu'il y a entre ce 3[e] Theoreme & le 2[e], qui est que dans le 2[e] non seulement les costez d'un triangle sont proportionels à ceux de l'autre, mais aussy la base; au lieu que dans celuy-cy il n'y a que les costez de proportionels, estant bien clair que la base B*, sur laquelle est l'angle obtus, doit estre plus petite à proportion que la base* b. XXXII.

Car appellant T *la base* B*, prolongée jusques à* P*, il est clair que l'angle qui a pour costez* C*, &* P *&* T *pour base est semblable à l'angle qui a pour costez* c *&* d*, &* b *pour base.*

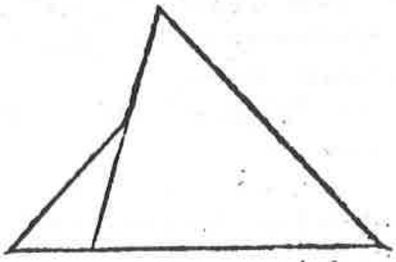
Donc par le 2[e] Theoreme $\left.\begin{matrix}C.c\\P.d\end{matrix}\right\}$ :: T.b.

Or B *n'est que partie de* P*, donc il n'y a pas la même raison de* B *à* b*, que de* C *à* c.

PREMIER COROLLAIRE.

UNE ligne que j'appelleray la coupante estant inclinée sur une autre que j'appelleray la coupée, si de l'extremité XXXIII.

& d'un autre point de cette coupante on tire deux lignes de part & d'autre qui fassent des angles égaux sur la coupée, la coupante entiere sera à sa partie vers la coupée comme la ligne tirée de son extremité à l'autre ligne tirée de son autre point.

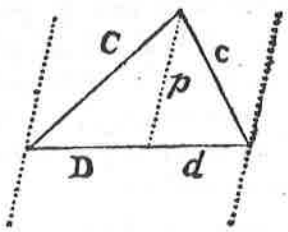


J'en laisse à trouver la demonstration, qui n'est qu'une application du precedent Theoreme.

SECOND COROLLAIRE.

XXXII. Si un angle a diverses bases diversement inclinées sur ses costez, la ligne qui divisera cet angle par la moitié fera que les deux parties de chaque base seront proportionelles aux deux costez de cet angle selon cette base. Il suffira de le demonstrer en une seule base.

Soit un angle divisé par la moitié par la ligne *p*. Soit l'un de ces costez appellé *C* & l'autre *c*, la partie de la base qui joint *C* appellée *D*, & l'autre *d*.



Si on tire par les extremitez de la base des paralleles à *p*, il y aura deux espaces paralleles.

Celuy dans lequel sont *C* & *D* soit appellé *A*, & l'autre *E*, par le 9 Lemme *D* & *d* sont également inclinées chacune dans son espace.

Et par l'hypothese *C* & *c* sont aussy également inclinées chacune dans le sien, puisque les angles aigus que chacune fait sur *p* sont égaux.

Donc par le premier Theoreme,

C. c :: D. d. & alternando C. D :: c. d.

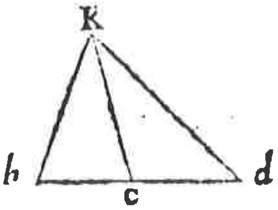
TROISIEME COROLLAIRE.

XXXIII. Si la ligne qui divise un angle en divise aussy la base proportionellement aux costez, c'estadire en sorte que les deux costez de l'angle soient en même raison que les deux parties de la baſe, l'angle eſt diviſé par la moitié.

C'eſt la converſe du precedent Corollaire qui ſe prouve en cette maniere.

Soit l'angle bkd diviſé par kc, en ſorte que

$$bc.\ cd :: kb.\ kd.$$



Si nous ſuppoſons que ce même angle eſt diviſé par la moitié par kx, il s'enſuit par le precedent Corollaire que

$$bx.\ xd :: kb.\ kd.$$

Donc $bx.\ xd :: bc.\ cd.$

Donc *componendo* $bd.\ xd :: bd.\ cd.$

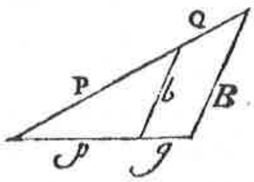
Donc les points x & c ne ſçauroient eſtre que le même point, & kx & kc la même ligne. Donc kc diviſe l'angle par la moitié. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREMIER PROBLEME.

TROUVER une 4ᵉ proportionelle. C'eſtadire ayant la XXXIV.
1ʳᵉ, la 2ᵉ & la 3ᵉ, de 4 lignes proportionelles trouver la 4ᵉ.

Ou ayant les deux premiers termes d'une raiſon, & l'antecedent de la 2ᵉ, en trouver le conſequent.

Le moyen le plus facile eſt de ſe ſervir pour cela du premier Corollaire du ſecond Theoreme. (13. ſ.) Et ainſy donnant les mêmes noms aux trois données & à la 4ᵉ, qui eſt à trouver, j'appelleray



La 1ʳᵉ	P.
La 2ᵉ	q.
La 3ᵉ	p.
Et la 4ᵉ à trouver	q.

Cela eſtant, il faut

1°. Mettre p & q ſur une même ligne.

2°. Faire un angle de p la 3ᵉ avec p la 1ʳᵉ.

3°. Joindre par b les extremitez de la 1ʳᵉ & de la 3ᵉ.

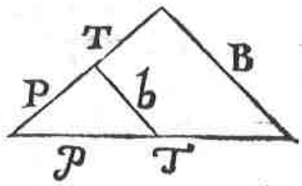
4°. Prolonger indefiniment p la 3ᵉ.

5°. De l'extremité de q la 2ᵉ tirer B parallele à b, juſqu'à la rencontre de p prolongée.

Le prolongement de *p* jusqu'à la rencontre de *B* sera la 4ᵉ que l'on cherche. Car il est clair par le Corollaire susdit (13. 5.) que p. q :: *p. q*.

XXXV. ON peut encore faire la même chose d'une autre maniere, qui est de renfermer la plus petite des deux premieres données dans la plus grande : & alors la plus grande s'appellera T, & la plus petite qui en est partie p.

Mais il faut prendre garde si la premiere des données est la plus petite ou la plus grande. Car si c'est la plus grande, il faudra commencer par T, & la 3ᵉ sera aussy *T*. Et alors pour trouver *p*, qui sera la 4ᵉ que l'on cherche, apres avoir joint par *B* les extremitez de T & de *T*. *b* parallele à *B* estant tirée de l'extremité de p sur *T* donnera *p*. Car il est encor clair par le même Corollaire que



T.p :: *T.p*.

Que si la 1ʳᵉ des deux données est la plus petite, la 3ᵉ sera *p*, & la 4ᵉ à trouver sera *T*. De sorte qu'apres avoir joint par *b* les extremitez de p & *p*, il faudra prolonger *p*, & tirant de l'extremité de T sur le prolongement de *p*, *B* parallele à *b*, on aura *T* pour la 4ᵉ à trouver. Car par le même Corollaire (13. 5.) *permutando*.

p.T :: *p. T*.

COROLLAIRE.

XXXVI. TROUVER une 3ᵉ proportionelle, c'estadire faire que l'une des deux données soit moyenne proportionelle entre l'autre donnée & la trouvée. C'est la même chose que le precedent, excepté qu'une seule des deux données tient lieu de la 2ᵉ & de la 3ᵉ.

SECOND PROBLEME.

XXXVII. TROUVER la ligne qui soit à une ligne donnée en raison donnée.

Soit la ligne donnée p, la raison donnée *m.n*, la ligne que l'on cherche *x*. Ainsy il faut trouver

x. p :: *m. n*.

Or pour cela il ne faut que transporter les termes en commençant par *n*, & les mettant ainsy,

$n . m :: p . x.$

& puis trouver *x* par le Probleme precedent. Ce qu'estant fait on aura ce que l'on cherche, parce que si

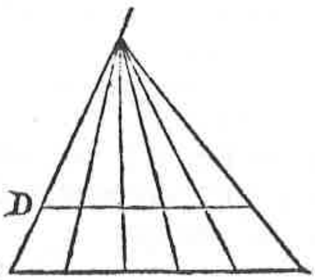
$n . m :: p . x.$

permutando

$x : p :: m . n.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

TROISIEME PROBLEME.

DIVISER une ligne donnée en quelques aliquotes que l'on voudra. XXXVIII.



Soit *D* la ligne à diviser, tirer au dessous ou au dessus une parallele indefinie que j'appelleray *P*. Prendre dans *P* autant de parties égales qu'on veut en avoir en la division de *D*, & prendre garde qu'elles soient notablement plus grandes ou plus petites que ne peuvent estre celles de *D*; puis des deux points entre lesquels sont comprises toutes les parties égales qu'on a prises dans *P*, tirer deux lignes par les extremitez de *D*, jusques à ce qu'elles se joignent: toutes les lignes tirées de ce point là à tous les points de la division de *P* qui couperont *D*, la diviseront en autant de parties égales qu'on en aura pris dans *P*.

La preuve en est cy-dessus dans le 5e Corollaire du 2e Theoreme. (22. 5.)

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE

LIVRE ONZIEME.

DES LIGNES RECIPROQUES.

Ce livre cy sera encore de la proportion des lignes, & contiendra plusieurs choses nouvelles que l'on jugera peutestre plus belles & plus generales, que tout ce qu'on a trouvé jusques icy sur cette matiere des proportions, en ne se servant que des lignes droittes & des cercles.

Pour les mieux faire entendre nous proposerons quelques Lemmes qui feront voir aussy en quoy est different ce que l'on traitte dans ce livre de ce qui vient d'estre traitté dans le livre precedent.

PREMIER LEMME.

1. QUAND il y a proportion entre 4 lignes, on y doit remarquer en les comparant deux à deux, deux rapports fort differens.

L'un est celuy qui fait dire que les unes sont proportionelles aux autres.

Et l'autre, que les unes sont reciproques aux autres.

Car si on compare ou la 1re & la 3e avec la 2e & la 4e: c'estadire c'estadire les deux antecedens avec les deux consequens;

Ou les deux premieres avec les deux dernieres, c'estadire le 1er antecedent & son consequent avec le 2e antecedent & son consequent; on dit alors que les unes sont *proportionelles* aux autres.

Mais si on compare la 1re & la 4e avec la 2e & la 3e, c'estadire les extrêmes avec les moyens, on dit alors que les unes sont *reciproques* aux autres.

Tout ce que nous avons dit dans le Livre precedent ne regarde que le premier rapport.

Et tout ce que nous dirons dans celuy-cy ne regarde presque que le second, & c'estpourquoy nous l'avons intitulé des lignes reciproques.

SECOND LEMME.

UNE seule ligne peut estre ditte reciproque à deux lignes, & deux lignes estre reciproques à une seule. Mais c'est lors seulement que cette ligne que l'on compare seule avec deux autres est moyenne proportionelle entre ces deux autres. Car alors elle en vaut deux, parcequ'elle fait deux termes de la proportion. Le premier & le dernier quand on commence par elle: comme si je dis, une ligne de 6 pieds est à une de 4 comme une de 9 à une de 6: ou le 2e & le 3e quand on la met au milieu, comme si je dis 4.6 :: 6.9. Et il faut remarquer que quoique cette derniere disposition soit la plus ordinaire, il y a neanmoins des rencontres où il est utile de se servir de la premiere, comme on pourra voir à la fin de ce Livre. II.

TROISIEME LEMME.

LORSQU'UN angle a deux bases, & que les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base chacun à chacun, cela peut arriver en deux manieres. III.

La premiere est quand l'angle que l'une des bases fait sur un costé est égal à l'angle que l'autre base fait sur le même costé. (J'appelle le même costé la même ligne droite tirée du sommet, quoique considerée selon les diverses bases elle tienne lieu de deux costez.)

Or il est visible que cela ne peut estre que quand les bases de cet angle sont paralleles, comme l'on a veu X. 13.

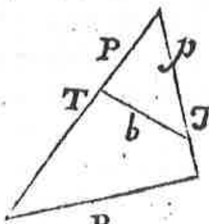
La seconde maniere est quand l'angle qu'une base fait sur un costé est égal à l'angle que l'autre base fait sur l'autre costé. Et alors on peut appeller ces bases *antiparalleles*, pour marquer leur effet opposé à celuy des bases paralleles. Ce sont ces sortes de bases qui feront presque toutes les preuves dans tout ce Livre.

QUATRIEME LEMME.

IV. LES bases paralleles d'un même angle ne peuvent estre disposées que d'une seule maniere, qui est d'estre toutes separées l'une de l'autre. Car c'est le propre des paralleles de ne se pouvoir jamais joindre. Mais les antiparalleles peuvent estre disposées en trois manieres differentes.

PREMIERE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

V. LA premiere ressemble à celle des paralleles, les deux antiparalleles estant aussy toutes separées, & alors il est visible que les costez de cet angle selon la derniere base que nous appellerons B, comprennent les costez de ce même angle selon la premiere base que nous appellerons b : & ainsy les unes sont *toutes*, & les autres leurs premieres parties, c'estadire leur partie la plus proche du sommet (& remarquez que dans tout ce Livre ce sera toûjours celle là que nous entendrons par le nom de partie, ou de 1re partie.)



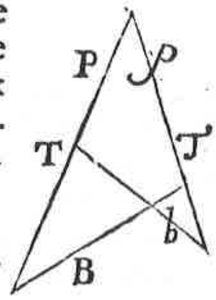
C'estpourquoy comme dans l'autre Livre nous appellerons toûjours les deux toutes T. *T*.
& leurs parties p. *p*.
de sorte que p de caractere romain sera toûjours la partie de T du même caractere romain: Et *p* de caractere italien sera toûjours la partie de *T* de caractere italien.

Or afin que les bases B & b soient antiparalleles, il est clair qu'il faut;

Que l'angle que T premiere toute fait sur B, soit égal à l'angle que *p* partie de la seconde toute fait sur b. Et que l'angle que *T* seconde toute fait sur B soit égal à l'angle que p partie de la premiere toute fait ſur b.

SECONDE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

LA ſeconde eſt quand elles ſe croiſent. Et alors ce ne VI.
ſont pas les deux toutes qui ſont les coſtez au regard d'une baſe, & les deux parties qui le ſont au regard de l'autre, comme dans la premiere diſpoſition.

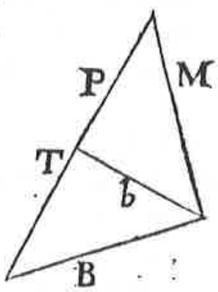


Mais les coſtez au regard de chaque baſe ſont une toute & la partie de l'autre toute Et ainſy pour diſtinguer les deux baſes nous appellerons B celle qui ſe trouve terminée par l'extremité de T, & l'autre b.

Or afin que les baſes ſoient antiparalleles dans cette diſpoſition, il eſt clair qu'il faut que les angles que les deux toutes font, l'une ſur B & l'autre ſur b, ſoient égaux; Et que ceux que les deux parties font l'une ſur B & l'autre ſur b ſoient égaux auſſy.

TROISIEME DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

LA troiſiême eſt quand les deux baſes ſe joignent en un VII.
même point de l'un des coſtez. Et alors comme ce coſté n'eſt point partagé, & que ſeul il tient lieu d'une toute & de ſa partie, nous l'appellerons *M*, appellant à l'ordinaire la derniere baſe *B*, la premiere *b*, le coſté partagé T, & ſa partie p.



Or afin que les baſes *B* & *b* ſoient antiparalleles, il faut que l'angle que T fait ſur *B* ſoit égal à l'angle que *M* fait ſur *b*, & que l'angle que *M* fait ſur *B* (qui comprend celuy qu'elle fait ſur *b*) ſoit égal à l'angle que p fait ſur *b*.

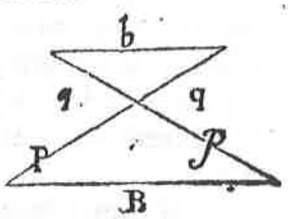
CINQUIEME LEMME.

LORSQUE deux lignes ſe coupant font 4 angles qui ſont VIII.
deux à deux oppoſez au ſommet, & par conſequent égaux, on peut donner des baſes à deux de ces angles oppoſez au ſommet qui ſoient telles que ces angles ſoient ſemblables,

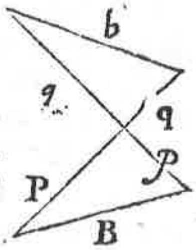
c'eſtadire, que les deux angles ſur la baſe de l'un ſoient égaux aux deux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun. Mais cela peut arriver en deux manieres que pour mieux faire entendre p & q de caractere romain marqueront les deux parties d'une même ligne, & *p* & *q* de caractere italien les deux parties de l'autre ligne. Et de plus, comme chaque angle doit avoir pour ſes coſtez la partie d'une ligne & la partie d'une autre ligne, p & *p* ſeront les coſtez d'un angle, & q & *q* les coſtez de l'autre.

Soit enfin appellée *B* la baſe de l'angle qui a p & *p* pour ſes coſtez, & *b* celle de l'angle qui a *q* & q pour ſes coſtez. Cela eſtant, voicy les deux manieres dont ces angles oppoſez au ſommet peuvent eſtre ſemblables.

La 1re eſt quand ce ſont les angles alternes qui ſont égaux ſur les deux baſes. C'eſtadire quand ce ſont les deux parties d'une même ligne, comme p & q, qui font des angles égaux p ſur *B*, & q ſur *b*, & ainſy des deux autres, & alors il eſt clair que ces deux baſes doivent eſtre paralleles.



IX. La 2e eſt quand ce ſont les angles de proche en proche qui ſont égaux ſur les deux baſes: de ſorte que ce ſont p & *q*, parties l'une d'une ligne & l'autre de l'autre, qui font les angles égaux p ſur *B*, & *q* ſur *b*, & *p* & q qui font auſſy les angles égaux *p* ſur *B*, & q ſur *b*.



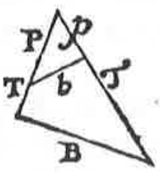
Ce ſont encore ces baſes que nous appellerons *antiparalleles*, pour marquer leur effet contraire à celuy des paralleles.

SIXIEME LEMME.

X. COMME lorſqu'un angle a deux baſes paralleles, on peut & on doit conſiderer ces coſtez ſelon une baſe dans un eſpace parallele, & ſes autres coſtez ſelon l'autre baſe dans un autre eſpace parallele. Il en eſt de même quand les baſes ſont antiparalleles, avec cette difference, Que quand les bases sont paralleles une seule ligne tirée par le sommet fait trois espaces paralleles. Le 1^{er} compris entre le sommet & la derniere base. Le 2^{e} entre le sommet & la 1^{re} base. Le 3^{e} entre les deux bases.

Mais quand elles sont antiparalleles, ce 3^{e} espace ne peut pas estre parallele. Et pour les deux autres on ne les peut concevoir qu'en s'imaginant deux lignes differentes tirées par le sommet, l'une parallele à *B*, & l'autre parallele à *b*. Car *B* & *b* n'estant pas paralleles entr'elles, il est visible qu'une seule ligne ne peut pas estre parallele à l'une & à l'autre; mais il suffit de s'imaginer ces lignes tirées par le sommet, sans qu'il soit necessaire de les décrire.

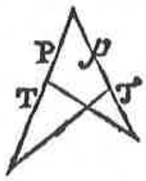
Et ainsy nous devons toûjours nous imaginer dans ces angles qui ont deux bases antiparalleles deux espaces paralleles. L'un que j'appelleray *A*, compris entre le sommet & *B*. Et l'autre que j'appelleray *E*, compris entre le sommet & *b*.



XI.

Et de plus il faut remarquer,

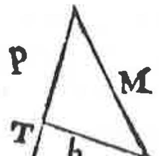
Que dans la 1^{re} disposition des bases antiparalleles les deux toutes T & *T* sont dans l'espace *A*, & les deux parties p & *p* dans l'espace *E*.



XII.

Que dans la seconde, qui est quand les bases se croisent, T & *p* sont dans l'espace *A*; & *T* & p dans l'espace *E*.

XIII.



Que dans la 3^{e}, qui est quand elles se joignent en un seul point d'un costé, *M* se trouve dans l'un & l'autre espace. Car l'espace *A* comprend T & *M*: Et l'espace *E*. *M* & p.

Septieme Lemme.

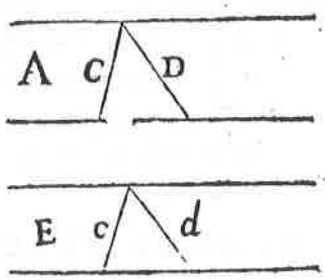
Il en est de même quand les angles opposez au sommet ont leurs bases antiparalleles. XIV.

Car il se faut imaginer deux lignes tirées par le sommet commun, dont l'une soit parallele à *B* & l'autre à *b*; &

ainſy l'on aura deux eſpaces paralleles, l'un compris entre le ſommet & *B* (dans lequel ſont p & *p*) que nous appellerons *A*. Et l'autre compris entre ce même ſommet & *b* (dans lequel ſont q & *q*) que nous appellerons *E*.

HUITIEME LEMME.

XV. TOUT ce qu'on aura à prouver dans ce Livre le ſera par le 1er Theoreme du Livre precedent, que je repeteray encore icy, afin qu'on l'ait plus preſent dans l'eſprit.



1 Si deux lignes (comme C & *D*) ſont dans un même eſpace parallele, comme eſt l'eſpace *A*.

Et que deux autres lignes comme (*c* & *d*) ſoient dans un autre eſpace parallele, comme eſt l'eſpace *E*.

Si *C* & *c* ſont également inclinées; *C* dans *A*, & *c* dans *E*, & que *D* & *d*, ſoient auſſy également inclinées *D* dans *A* & *d* dans *E*, les deux également inclinées entr'elles ſont proportionelles aux deux qui le ſont auſſy entr'elles.

C.c :: *D.d.* *& alternando* *C.D* :: *c.d.*

NEUVIEME LEMME.

XVI. POUR ne ſe point broüiller en diſpoſant les termes, il eſt bon de s'aſtraindre à donner toûjours pour 1er & 2e termes de la proportion les également inclinées dans les deux differens eſpaces paralleles, & de même au regard du 3e & du 4e. Et pour 1er & 3e termes, celles qui ſont dans le même eſpace parallele. Et de même au regard du 2e & du 4e. Sauf à les diſpoſer apres autrement, *Alternando*.

I. PROPOSITION FONDAMENTALE

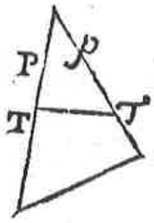
DES RECIPROQUES.

XVII. LORSQU'UN même angle a deux baſes antiparalleles, une toute & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie. C'eſtadire que

T.*p* :: *T*.p. ou T.*T* :: *p*.p.

PREMIERE PREUVE DANS LA PREMIERE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

DANS cette diſpoſition les deux toutes T & *T* ſont dans l'eſpace *A*, & les deux parties p & *p* ſont dans l'eſpace *E*. (par 11. §.) XVIII.



Or par 5. §. T & *p* ſont également inclinées, T dans *A*, & *p* dans *E*. & *T* & p également inclinées, *T* dans *A*, & p dans *E*.

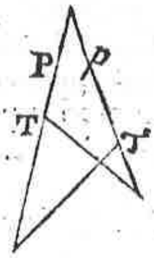
Donc (par 15. §.) T. *p* :: *T*. p.

Or T & ſa partie p ſont les extremes de la proportion, dont *T* & *p* ſa partie ſont les moyens.

Donc une toute & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie.

SECONDE PREUVE DANS LA SECONDE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

DANS cette 2ᵉ diſpoſition T & *p* (partie de l'autre toute) ſont dans l'eſpace *A*, & *T* & p dans l'eſpace *E*. (par 12. §.) XIX.



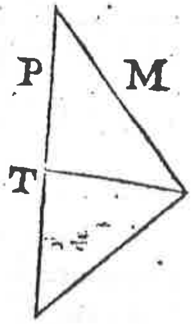
Or (par 5. §.) T & *T* ſont également inclinées, T dans *A*, & *T* dans *E*. Et de même p & *p* également inclinées, p dans *A* & *p* dans *E*.

Donc (par 15. §.) T. *T* :: *p*. p.

Je reſerve la 3ᵉ diſpoſition pour un Corollaire à part.

COROLLAIRE.

QUAND un angle a deux baſes antiparalleles dans la 3ᵉ diſpoſition, qui eſt quand elles ſe joignent à un ſeul point d'un coſté, ce coſté eſt moyenne proportionelle entre l'autre coſté entier & ſa partie : C'eſtadire que XX.



T. *M* :: *M*. *p*.

Car (par 13. §.) dans cette diſpoſition *M* eſt dans l'un & l'autre eſpace, parceque T & *M* ſont dans l'eſpace *A*, & *M* & p dans l'eſpace *E*.

Or (par 5. s.) T & *M* sont également inclinées, T dans l'espace *A*, & *M* dans l'espace *E*.

Et *M* & p sont également inclinées, *M* dans l'espace *A* & p dans l'espace *E*.

Donc (par 15. s.) *T*. *M* :: *M*. p.

II. PROPOSITION FONDAMENTALE DES RECIPROQUES.

XXI. QUAND deux lignes se coupant font deux angles opposez au sommet qui ont des bases *antiparalleles*, les parties de l'une de ces lignes qui se coupent en ce sommet sont reciproques aux parties de l'autre. (*Voyez la figure du n. 9.*)

Car (par 14. s.) p & *p* sont dans l'espace *A*, & q & *q* sont dans l'espace *E*.

Or (par 9. s.) p & *q* sont également inclinées, p dans *A*, & *q* dans *E*.

Et *p* & q également inclinées, *p* dans *A* & q dans *E*.

Donc (par 15. s.)

p. *q* :: *p*. q.

Or p & q sont les parties de la même ligne: & *p* & *q* sont les parties de l'autre ligne.

Donc les parties d'une ligne sont reciproques aux parties de l'autre.

COROLLAIRE.

XXII. SI une de ces lignes qui en se coupant font des angles opposez au sommet, qui ont des bases *antiparalleles*, est divisée par la moitié, une seule de ces moitiez est moyenne proportionelle entre les parties de l'autre ligne.

Cela est clair, puisque c'est la même chose de donner pour les moyens de cette proportion les deux moitiez de la même ligne, ou une seule moitié prise deux fois.

PLAN GENERAL DE CE QUE L'ON PRETEND MONTRER DANS LA SUITTE DE CE LIVRE.

XXIII. *Il s'ensuit de tout ce que nous venons de dire, que pour avoir des lignes qui soient reciproques à d'autres, entre lesquelles sont aussy les moyennes proportionnelles, il ne faut qu'avoir ou un angle qui ait deux bases antiparalleles, ou deux*

deux angles opposez au sommet qui ayent aussy deux bases antiparalleles.

L'un donnera des toutes & une de leurs parties qui sont reciproques à d'autres toutes & à une de leurs parties ; ou même à une seule ligne qui sera moyenne proportionelle entre ces toutes & une de leurs parties.

L'autre donnera des parties d'une ligne qui seront reciproques aux parties de l'autre, & même à une seule ligne qui sera leur moyenne proportionelle.

Mais tout cela est peu de chose si on n'a les voies generales pour trouver ces bases antiparalleles.

Or je pense avoir trouvé tout ce qui se peut trouver sur cela en n'employant que les lignes droittes & les cercles.

Car 1. I'ay reconnu qu'il n'y a point de voie generale pour XXIV.
couper tout d'un coup les costez d'un angle, ou les costez de deux angles opposez au sommet par des bases antiparalleles, qu'en y employant la circonference d'un cercle, & c'est pourquoy on ne peut trouver sans cela de moyenne proportionelle entre deux lignes données.

2. I'ay remarqué que les 4. lignes, dont deux par ce moyen XXV.
sont reciproques à deux autres, ont toûjours un point commun, qui est,

1. Ou le sommet de deux angles qui se touchent (ce qui n'est qu'un cas assez particulier, & qui n'est pas dans l'analogie des autres.)

2. Ou le sommet d'un angle qui a deux bases antiparalleles.

3. Ou le sommet de deux angles opposez à ce sommet, qui ont aussy deux bases antiparalleles.

Or c'est, si je ne me trompe, avoir tout trouvé que d'avoir XXVI.
consideré que ce point commun ne peut estre au regard du cercle dont on a besoin que,

1. Ou dans la circonference.

2. Ou hors le cercle.

3. Ou dans le cercle.

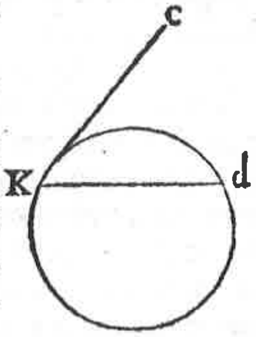
Et de pouvoir ensuite determiner tout ce que cela doit faire; c'estadire comment il se fait en tous ces cas là des bases antiparalleles. Car tout se reduit là.

AVERTISSEMENT.

XXVII. *Comme nous avons besoin pour prouver l'égalité des angles, qui fait que des bases sont antiparalleles de plusieurs nouvelles maximes touchant l'égalité des angles qui ont esté demonstrées dans le Livre IX. nous les proposerons encore icy en forme de Lemmes, afin qu'en y renvoyant, nous nous dispensions de dire souvent les mèmes choses.*

DIXIEME LEMME.

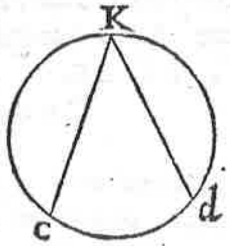
XXVIII. L'ANGLE du segment (qui est celuy qui est compris entre une tangente & une corde) a pour mesure la moitié de l'arc que soutient cette corde du costé de la tangente; ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié de l'arc *k d*. IX. 13.



ONZIEME LEMME.

XXIX. TOUT angle inscript au cercle a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. D'où il s'ensuit que deux angles inscripts au cercle sont égaux quand ils sont appuyez sur le même arc, ou sur des arcs égaux.

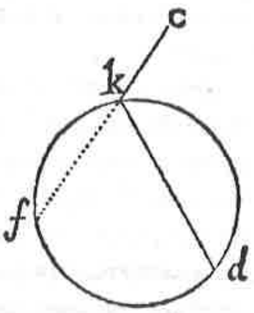
Ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié de l'arc *c d*. IX. 18.



DOUZIEME LEMME.

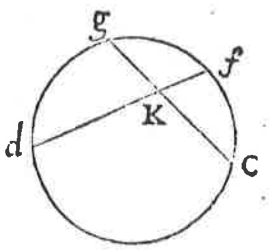
XXX. TOUT angle dont le sommet est dans la circonference, & qui a pour costez une corde, & une ligne hors le cercle qui le coupe, a pour mesure la moitié de l'arc qui soutient le costé qui est une corde, plus la moitié de celuy que soutient le prolongement de l'autre costé qui est au dehors du cercle.

Ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié des arcs *k d* & *k f*. IX. 16.



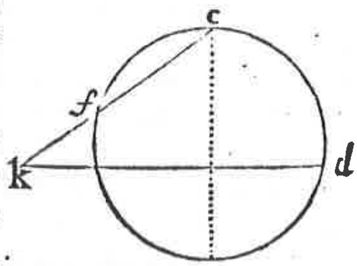
TREIZIEME LEMME.

TOUT angle qui se fait par la section de deux cordes qui se coupent au dedans du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc opposé. Ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié des arcs opposez *d c* & *g f*. IX. 42. XXXI.



QUATORZIEME LEMME.

TOUT angle dont le sommet est hors le cercle, & dont un costé coupant le cercle est terminé à l'extremité du diametre sur lequel l'autre costé est perpendiculaire, a pour mesure la moitié de l'arc que soutient la partie du costé non perpendiculaire au diametre laquelle est au dedans du cercle. Ainsy l'angle *c k d* a pour mesure la moitié de l'arc *f c*. IX. 46. XXXII.



DEUX AVIS DE LOGIQUE.

1.

Quand on a à prouver qu'un angle ayant deux bases, les angles sur une sont égaux aux angles sur l'autre chacun à chacun, on est asseuré que cela est, quand on a prouvé que l'un des angles sur une base est égal à l'un des angles sur l'autre, parce-qu'il s'ensuit de là necessairement que l'autre est égal aussy à l'autre. XXXIII.

Cette preuve est convaincante, & on s'en doit passer quand on ne peut mieux. Mais il faut avoüer qu'elle n'est pas si bonne & ne fait pas si bien entrer dans la nature des choses, que celle qui montre positivement que l'un & l'autre angle d'une base est égal à l'un & l'autre angle de l'autre. Et c'est pourquoy je ne me contenteray point de la premiere sorte de preuve, & me serviray toûjours de cette derniere.

2.

Quand on a à prouver de plusieurs binaires de lignes, qu'ils XXXIV.

sont reciproques les uns aux autres, on en est asseuré quand on peut montrer qu'ils sont tous reciproques à un même binaire, ou qu'ils ont tous la même moyenne proportionelle.

Mais quoique cela soit convaincant, l'esprit ne reçoit pas la même clarté & ne demeure pas si satisfait, que si on montroit immediatement de chaque binaire qu'il est reciproque à chaque autre.

Et ainsy, quoyqu'il me fust facile d'employer la premiere voie, je me suis resolu de n'employer que cette derniere comme plus parfaite & plus lumineuse pour parler ainsy, & peut estre qu'on trouvera que ces deux exemples sont remarquables pour faire voir la difference qu'il y a entre convaincre l'esprit en le mettant hors d'estat de pouvoir douter qu'une chose soit; & le satisfaire pleinement en luy donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement desirer.

Reprenons maintenant la division proposée, qui est que le point commun aux lignes reciproques par la section du cercle, est necessairement

1. Ou dans la circonference.
2. Ou hors le cercle.
3. Ou au dedans du cercle.

PREMIERE VOIE GENERALE DE TROUVER DES RECIPROQUES

QUAND LE POINT COMMUN EST DANS LA CIRCONFERENCE.

On en trouve par cette voie en deux manieres. L'une par deux angles proches l'un de l'autre, & compris dans un angle total; ce qui est une espece singuliere, & hors l'analogie des autres Theoremes de ce Livre, ce qui fait que nous l'appellerons, *le Theoreme anomal.*

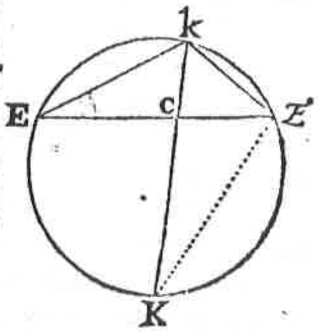
L'autre par un angle qui a deux bases antiparalleles.

PREMIERE MANIERE.

THEOREME ANOMAL.

XXXV. Les deux costez de tout angle inscript au cercle sont reciproques à la ligne entiere, qui le partageant par la moitié se termine à la circonference & à la partie de cette ligne compriſe entre le ſommet de l'angle coupé par la moitié & ſa baſe.

Soit l'angle inſcript E *k* *E*. Soit pris le point *K* dans le ſegment opposé également diſtant d'E & d'*E*. La ligne *k K* qui coupe la baſe en *c* partage cet angle inſcript par la moitié, puiſque les deux angles E *k K* & *E k K* eſtant appuyez ſur des arcs égaux ſont égaux (par 30. ſ.) qui eſt le même qu'E *k K*. *E k K*.



Or les angles E *k c* & *E k K* ne ſont pas ſeulement égaux, mais ils ſont auſſy ſemblables, c'eſtadire que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun.

Car les angles inſcripts vers E & vers *K* ſont égaux (par 30. ſ.) parcequ'ils ſont appuyez ſur le même arc *k E*.

2. (par 32. ſ.) L'angle *k c* E, a pour meſure la moitié de l'arc *k* E ſur lequel il eſt appuyé, plus la moitié de l'arc opposé *E K*. Et l'arc E *K* eſtant égal à l'arc *E K*, cette meſure eſt égale à la moitié des arcs *k* E & E *K*, qui eſt la meſure de l'angle inſcript *k E K*. (par 30. ſ.)

Donc les angles *k c* E & *k E K* ſont égaux.

Donc les angles E *k c* & *E k K* ſont ſemblables.

Donc (par XI. 17.)

k E. *k K* :: *k c*. *k E*.

Ce qu'il falloit demonſtrer, puiſque *k* E & *k E* ſont les deux coſtez de l'angle partagé par la moitié, & que *k K* eſt la ligne entiere qui le partage, & *k c* ſa partie.

COROLLAIRE.

SI l'angle inſcript eſtoit Iſoſcele, chaque coſté ſeroit XXXVI.
moyenne proportionelle entre la toute qui le diviſeroit par la moitié & ſa partie.

Car les coſtez de l'angle eſtant égaux, les prendre tous deux, ou en prendre un deux fois, c'eſt la même choſe.

Mais quand l'angle inſcript eſt Iſoſcele, la ligne qui le partage par la moitié est necessairement un diametre. Et de plus les deux points E *E* estant alors également distans de *k* aussy bien que de *K*, cela revient à ce qui sera demonstré plus bas par une autre voie.

SECONDE MANIERE DE LA MESME VOIE GENERALE.

XXXVII. L'AUTRE maniere de trouver des reciproques quand le point commun est dans la circonference, est de se servir pour cela d'un angle qui a deux bases antiparalleles. Surquoy il faut remarquer, que ce point estant dans la circonference, les costez de l'angle qu'il a pour sommet ne sçauroient estre coupez par la circonference que chacun en un endroit. Ce qui ne suffiroit pas pour determiner dans ces costez les points dont on puisse tirer des bases antiparalleles, puisque pour deux bases il faut avoir quatre points differens dans les deux costez d'un angle, ou au moins trois.

Il faut donc qu'il y ait une ligne droitte outre la circonference, afin que les costez de l'angle estant coupez par l'une & par l'autre, le puissent estre en 4. endroits, ou au moins en 3. quand un des costez sera terminé par un point commun à la ligne droitte & à la circonference.

Voicy donc la proposition generale sur ce sujet, qui est peut-estre la plus belle & la plus generale qu'on puisse trouver sur les proportions des lignes par la geometrie ordinaire.

PROPOSITION GENERALE.

XXXVIII. SI d'un point dans la circonference on tire une ligne indefiniment par le centre, & qu'on en tire une autre indefinie que j'appelleray *y*, qui coupe perpendiculairement celle qui passe par le centre, en quelque endroit qu'elle la coupe, soit en coupant aussy le cercle, soit en le touchant, soit tout à fait hors le cercle; toutes les lignes tirées du point dans la circonference qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference: ou coupées par la circonference & terminées par *y*; seront telles, que chaque toute & sa partie vers le point commun seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie: & chaque toute & sa partie auront pour moyenne proportionelle celle qui sera terminée à un point commun à *y*, & à la circonference.

CETTE proposition est si vaste & comprend tant de cas qu'on n'en sçauroit bien voir la verité, qu'en la considerant dans ces cas particuliers qui sont trois principaux. XXXIX.

Le 1er. Quand la ligne *y* coupe le cercle.

Le 2e. Quand elle le touche.

Le 3e. Quand elle est tout à fait hors le cercle.

C'est ce que nous traitterons par divers Theoremes.

PREMIER CAS.

LE 1er Cas est quand *y* coupe le cercle. Et alors il n'est point necessaire de dire que cette ligne doit estre perpendiculaire à celle qui estant tirée du point *K* passe par le centre : car il suffit de dire (ce qui est la même chose) qu'elle doit couper le cercle en deux points, que j'appelleray E & *E*, qui soient également distans de *K*. Cela estant vray, voicy le 1er Theoreme. XL.

PREMIER THEOREME.

SI la ligne *y* coupe le cercle en deux points également distans de *K*, toutes les lignes tirées du point *K* qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference, ou coupées par la circonference & terminées par *y*, seront telles que chaque toute & sa partie vers *K* seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie vers *K*. XLI.

On peut faire sur cela trois comparaisons.

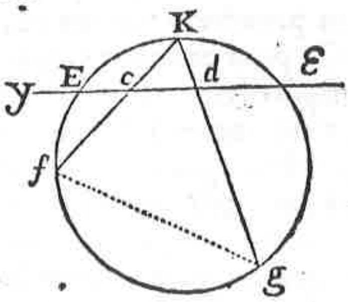
La 1re. De deux lignes qui sont toutes deux coupées par *y* & terminées par la circonference.

La 2e. De deux lignes qui sont toutes deux coupées par la circonference, & terminées par *y*.

La 3e. De deux lignes, dont l'une est coupée par *y*, & terminée par la circonference; & l'autre coupée par la circonference, & terminée par *y*.

PREMIERE COMPARAISON.

SOIENT tirées *K f*, qui coupe *y* en *c*; & *K g* qui le coupe en *d*: je dis que les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles. Donc tout le reste s'ensuit (par la 1re Proposition fondamentale, §. 17. XLII.



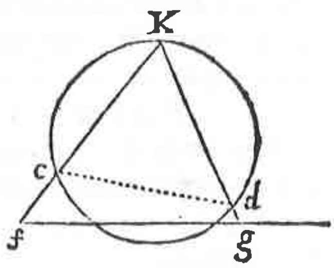
Car (par 32. s̃.) l'angle *KcE* a pour meſure la moitié de l'arc *KE* plus la moitié de l'arc E*f*, & l'arc *KE* eſtant égal à l'arc *KE*, cette meſure eſt égale à la moitié des deux arcs *K*E & E*f*. Or la moitié des deux arcs *K* E & E*f* eſt la meſure de l'angle inſcript *K g f*, parceque l'arc *K* E*f*, ſur lequel il eſt appuyé, comprend ces deux là.

Donc l'angle *KcE* (ou *Kcd*) eſt égal à l'angle *Kgf*. On prouvera la même choſe des angles *Kdc* & *Kfg*. Donc ces deux baſes ſont antiparalleles.

Donc (par la 1re Prop. fond. s̃. 17.) la toute d'une part & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Kf. *Kd* :: *Kg*. *Kc*.
T. *p* :: *T*. p.

SECONDE COMPARAISON.



XLIII. SOIENT tirées *kf* qui coupe la circonference en *c*, & *kg* qui la coupe en *d*; je dis que les baſes *fg* & *cd* ſont antiparalleles.

Car (par 33. s̃.) l'angle *kfg* a pour meſure la moitié de l'arc *k c*, qui eſt auſſy la meſure de l'angle inſcript *k d c*. Donc les angles *kfg* & *kdc* ſont égaux.

On prouvera de la même ſorte que les angles *kgf* & *kcd* ſont égaux.

Donc les baſes *fg* & *cd* ſont antiparalleles.

Donc *Kf*. *Kd* :: *Kg*. *Kc*.
T. *p* :: *T*. p.

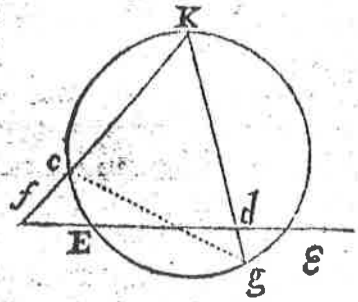
TROISIEME COMPARAISON.

XLIV. SOIENT tirées *k f* qui coupe la circonference en *c*, & *k g* qui coupe *y* en d.

Dans cette comparaiſon les baſes ſe croiſent. Car il faut

faut prendre pour les deux bases *f d* & *g c*.

Or pour prouver qu'elles sont antiparalleles, il faut montrer que les angles *kfd*. ou *kfE*. & *kgc*. sont égaux. Ce qui est facile, puisqu'il est clair (par ce qui a esté dit (44. s̃.) que l'un & l'autre a pour mesure la moitié de l'arc *kc*, & pour les deux autres *kdE* & *kcg*, cela se prouve aussy facilement (par ce qui a esté dit 43. s̃.) de l'égalité entre les angles *kdc* (ou *kdE*) & *kgf*.



Donc les bases *fd* & *gc* sont antiparalleles.

Donc *Kf*. *Kg* :: *Kd*. *Kc*.

T. *T* :: *p*. p.

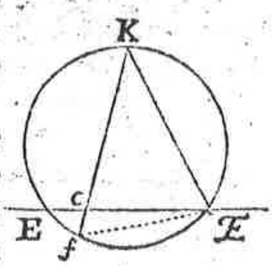
SECOND THEOREME.

COROLLAIRE DU PREMIER.

LA ligne tirée de *k* au point commun à la circonference & à *y* (c'estadire *k*E ou *kE*) est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie, soit qu'elle soit coupée par *y* & terminée par la circonference, soit qu'elle soit coupée par la circonference & terminée par *y*. XLV.

PREMIERE COMPARAISON.

Soit tirée *kf* qui coupe *y* en *c*, & *kE*, il ne faut que prouver que les bases *f*. E & *c*. *E* sont antiparalleles. Ce qui est facile.



Car les angles inscripts *kfE* & *k*E*c* (ou *kE*-E) sont égaux, parceque (par 30. s̃.) l'un est appuyé sur l'arc *kE*, & l'autre sur l'arc *k*E, qui sont égaux.

Et pour les angles *kcE*, & *kEf*, leur égalité se prouve de la même sorte que l'égalité des arcs *kfg* & *kdc*, dans le 1er Theoreme. 1re Comparaison.

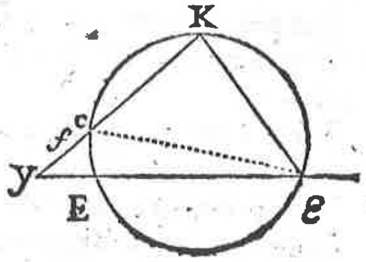
Donc ces bases sont antiparalleles & disposées en la 3e maniere expliquée dans le 4e Lemme.

Donc $Kf. KE :: KE. Kc.$

$T. \; m :: m. \; p.$

SECONDE COMPARAISON.

XLVI. Soit tirée *kf* qui coupe la circonference en *c*; je dis que les bases *fE* & *cE* sont antiparalleles. Car les angles *kfE* & *kEc* ont pour mesure la moitié de l'arc *kc*, selon ce qui a esté dit, 1[er] Theoreme, 2[e] Comparaison, & les angles inscripts *kEf*, ou *kEk* & *kcE* sont appuyez sur les angles *k*E, *kE*, qui sont égaux,



Donc $Kf. KE :: KE. Kc.$

$T. \; m :: m. \; p.$

SECOND CAS.

XLVII. Le 2[e] Cas de la proposition principale (§. 39.) est quand la ligne *y* touche le cercle en un point diametralement opposé à *k*: ce qui comprend aussy deux Theoremes.

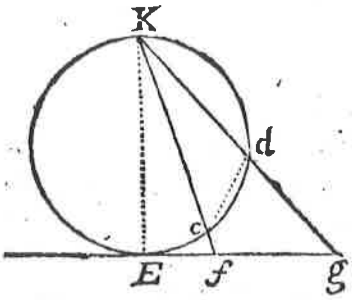
TROISIEME THEOREME.

XLVIII. QUAND *y* touche le cercle en un point diametralement opposé à *k*, toutes les lignes tirées de *k* sur cette ligne (qui ne peuvent pas n'estre point coupées par le cercle) sont telles, que chaque toute & sa partie sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie.

Si les deux lignes estoient tirées de deux differens costez, il n'y auroit rien qui n'eust déja esté prouvé (44. §.) C'estpourquoy nous les proposerons du même costé. Ce qui pourra aussy servir aux cas semblables du 1[er] Theoreme.

Soient tirées du même costé *kf*, coupée par la circonference en *c*, & *kg* coupée par la circonference en *d*; il faut prouver que les bases *fg* & *cd* sont antiparalleles. Or il y a sur chacune un angle aigu *kgf* (ou *kgE*) & *kcd*, & un obtus *kfg* & *kdc*.

Mais pour les aigus ils sont égaux, parcequ'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc *kd*. (par 30. & 33. §.)



Et pour les obtus, il est aisé de prouver qu'ils sont égaux par leurs complemens, qui sont *cdg* & *kfE*.

Car par 12. Lem. *cdg* a pour mesure la moitié des deux arcs *kd* & *dc*.

Et par Lem. 14. *kfE* a pour mesure la moitié de l'arc *kdc*, qui comprend ces deux là.

Donc ces angles aigus sont égaux.

Donc les obtus *kdc* & *kfg*, dont ces aigus sont les supplemens, sont égaux aussy.

Donc les bases *fg* & *cd* sont antiparalleles.

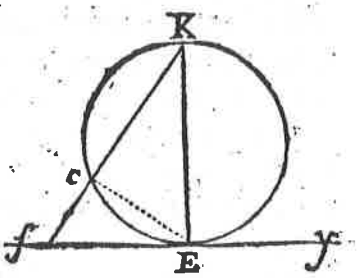
Donc *kf. kd :: kg. kc.*

T. *p* :: *T.* p.

QUATRIEME THEOREME,

COROLLAIRE DU SECOND.

Le diametre tiré du point *k* (& par consequent tout XLIX.
autre) est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie.



Soit tirée *kf* qui soit coupée en *c*, les bases *fE* & *cE* sont antiparalleles.

Car les angles *kEf*, & *kcE*, sont droits, & par consequent égaux.

Et les aigus *kfE*, & *kEc*, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc *kc* (par 30. & 33. s̄.)

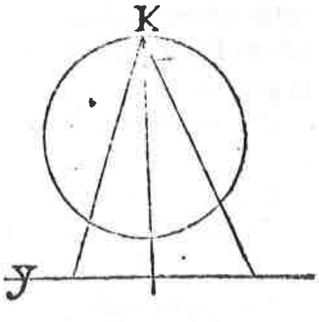
Donc les bases *fE* & *cE* sont antiparalleles.

Donc *kf. kE :: kE. kc.*

T. *m* :: *m.* p.

TROISIEME CAS.

Le 3^e^ Cas est quand la ligne *y* est toutafait hors le cer- L.



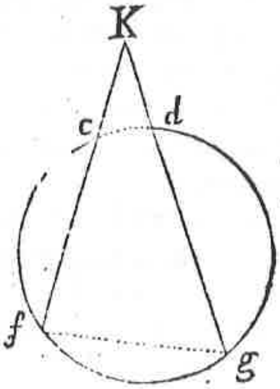
cle : mais comme il n'a aucune difficulté particuliere, nous ne nous y arresterons point.

Il faut seulement remarquer, qu'il n'y a point de moyenne proportionelle dans ce 3^e Cas, parcequ'il n'y a aucun point qui soit commun à la ligne *y*, & à la circonference, la ligne *y* estant toutafait hors le cercle.

SECONDE VOIE GENERALE POUR TROUVER DES RECIPROQUES QUAND LE POINT COMMUN EST HORS LE CERCLE.

LI. QUAND le point commun est hors le cercle, les costez de l'angle qui l'a pour sommet peuvent estre coupez chacun deux fois par la circonference du cercle ; une fois par la convexité en entrant dans le cercle, & une fois par sa concavité, où on les suppose terminées ; si ce n'est que le point de l'attouchement tenant lieu tout seul de la convexité & de la concavité, un des costez peut n'estre terminé qu'à ce point. Et alors il sera tangente du cercle, & les deux bases antiparalleles n'auront que 3 points differens. C'est ce qu'on verra dans les deux Theoremes suivans.

CINQUIEME THEOREME.



LII. LORSQUE d'un point hors le cercle on tire des lignes qui coupent le cercle en sa convexité, & sont terminées en sa concavité, chaque toute, & sa partie hors le cercle, sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie hors le cercle.

Soient tirées *kf*, qui coupe la circonference en *c* ; & *kg* qui la coupe en *d*. Je dis que les bases *fg* & *cd* sont antiparalleles.

Car (par 31. $\overline{s}$.) l'angle *kcd* a pour mesure la moitié des deux arcs *cd*, & *cf*. Or la moitié de ces deux arcs *cd* & *cf* est aussy la mesure de l'angle *kgf*. (par 30. $\overline{s}$.) Donc les angles *kcd* & *kgf* sont égaux.

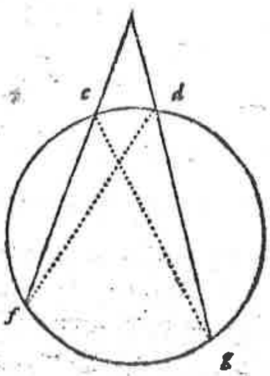
On prouvera de la même sorte l'égalité des angles *kdc* & *kfg*.

Donc les bases *fg* & *cd* sont antiparalleles.

Donc *kf*. *kd* :: *kg*. *kc*.

T. *p* :: *T*. p.

On peut aussy prouver ce Theoreme en croisant les bases, en montrant que les bases *fd* & *gc* sont antiparalleles. LIII.



Car les angles vers *f* & vers *g* sont égaux estant appuyez sur le même arc *cd*.

Et pour les angles *kcg* & *kdf*, ils sont égaux, parceque si on les examine (par le 12[e] Lemme, 31. $\overline{s}$.) on trouvera qu'ils ont chacun pour mesure la moitié des trois arcs *fc*, *cd*, *dg*.

Donc les bases *fd* & *gc* sont antiparalleles.

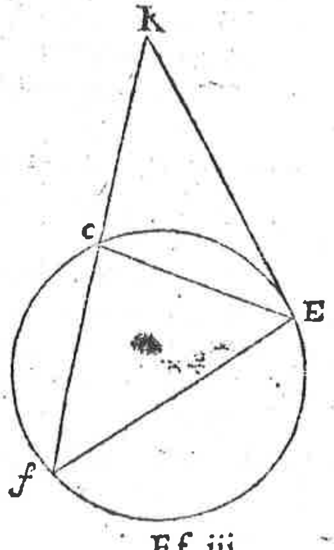
Donc *kf*. *kg* :: *kd*. *kc*.

T. *T* :: *p*. p.

VI. THEOREME,

Corollaire du cinquieme.

Si l'une de ces lignes tirées d'un point hors le cercle est une tangente, cette tangente est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie hors le cercle. LIV.



Soit tirée *kf* qui coupe le cercle en *c* & la tangente *kE*; je dis que les bases *fE* & *cE* sont antiparalleles. Car (par 30. $\overline{s}$.) l'angle *kfE* a pour mesure la moitié de l'arc $c\,E$, qui eſt auſſy la meſure de l'angle $k\,E\,c$ (par 29. s̃. & par le 10e Lemme 29. s̃.)

Et l'angle $k\,E\,f$, par le même 10e Lemme, a pour meſure la moitié des deux arcs $E\,c$ & $c\,f$, qui eſt auſſy la meſure de l'angle $k\,c\,E$, par le 11e Lemme (30. s̃.)

Donc les baſes $f\,E$ & $E\,c$ ſont antiparalleles.

Donc par 29. s̃.

$$kf.\ kE :: kE.\ kc.$$

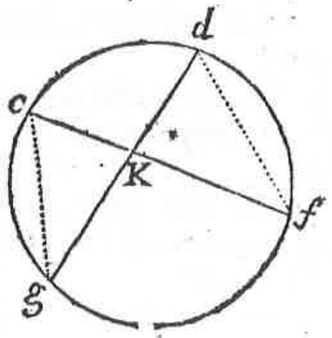
$$T.\ \ m :: m.\ p.$$

TROISIEME VOIE
POUR TROUVER DES RECIPROQUES QUAND LE POINT EST AU DEDANS DU CERCLE.

LV. CETTE voie eſt pour trouver que les parties d'une ligne ſont reciproques aux parties d'une autre ligne, ou à une ligne quand elle eſt moyenne proportionelle. Et ainſy elle eſt toute appuyée ſur la 2e Propoſition fondamentale & ſon Corollaire (21. & 22. s̃.) qui eſt des angles oppoſez au ſommet qui ont leurs baſes antiparalleles.

LVI. ### SEPTIEME THEOREME.

SI deux cordes ſe coupent dans le cercle, les parties de l'une ſont reciproques aux parties de l'autre.



Soient les cordes $c\,f$ & $d\,g$ qui ſe coupent en k. Soient tirées les baſes à deux angles oppoſez $c\,g$. $d\,f$. Je dis qu'elles ſont antiparalleles.

Car (par 11. Lem. & 30. s̃.) les angles vers g & vers f ſont égaux, parcequ'ils ſont appuyez ſur le même arc $c\,d$. Et par la même raiſon les angles vers c & vers d ſont égaux auſſy eſtant appuyez ſur le même arc $g\,f$.

Donc les baſes $c\,g$ & $d\,f$ ſont antiparalleles.

Donc par la 2e Propoſition fondamentale (21. s̃.)

$$kf.\ kg :: kd.\ kc.$$

$$p.\ q :: p.\ q.$$

HUITIEME THEOREME,

COROLLAIRE DU SEPTIEME.

Si une des lignes est coupée par la moitié, une de ces moitiez est moyenne proportionelle entre les deux parties de l'autre. LVII.

C'est le Corollaire même de la 2[e] Proposition fondamentale.

COROLLAIRE.

Si d'un point quelconque d'un diametre on éleve une perpendiculaire jusques à la circonference, cette perpendiculaire sera moyenne proportionelle entre les deux parties du diametre. LVIII.

Car il est clair que cette perpendiculaire est la moitié de la corde qui couperoit le diametre perpendiculairement par ce point. Donc par le Theoreme precedent elle doit estre moyenne proportionelle entre les parties du diametre.

NEUVIEME THEOREME.

Si du sommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypotenuse, il y aura trois moyennes proportionelles. LIX.

1. La perpendiculaire entre les deux parties de l'hypotenuse.

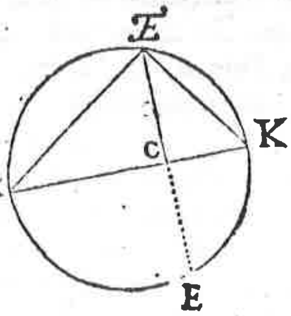
2. Le petit costé de l'angle droit entre la plus petite partie de l'hypotenuse qui y est jointe, & l'hypotenuse entiere.

3. Le plus grand costé de l'angle droit entre la plus grande partie de l'hypotenuse qui y est jointe, & l'hypotenuse entiere.

Tout cela se peut prouver par un grand nombre de voies. Mais celle cy me semble la plus facile & la moins embarassée.

Soit l'angle droit *k E K*, & la perpendiculaire du sommet à l'hypotenuse *E c*.

Si on fait un cercle qui ait l'hypotenuse *k K* pour diametre, le sommet *E* se trouvera dans la circonference par IX. 31.



Et si on prolonge *Ec* jusques à E, que je suppose estre le point opposé de la circonference, la corde *E* E sera coupée en *c* par la moitié, & les points *E* E également distans tant de *k* que de *K*.

Donc 1. par le Corollaire precedent

kc. Ec :: Ec. cK.

Donc 2. par le 2e Theoreme (46. s̃.)

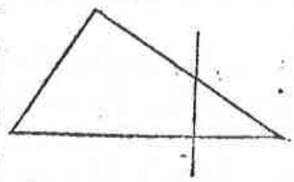
kc. kE :: kE. cK.

Donc 3. par le même 2e Theoreme.

Kc. KE :: KE. ck.

DIXIEME THEOREME.

LX. TOUTE ligne qui coupant perpendiculairement l'hypotenuse d'un angle droit en coupe aussy un costé, l'hypotenuse entiere & sa partie vers le point qui luy est commun avec le costé coupé, sont reciproques au costé coupé entier, & à sa même partie vers le point commun. La preuve en est facile par le 2e Theoreme & par d'autres voies que je laisse à trouver.



DERNIER THEOREME.

LXI. UN angle ayant deux bases, si ses costez selon une base sont proportionels à ses costez selon l'autre base, les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base chacun à chacun. C'est la converse de la plus part des propositions de ce Livre, qui se prouve ainsy.

Les costez sur une base ne sçauroient estre proportionels aux costez sur l'autre base qu'en deux manieres.

La 1re est, quand la toute d'une part & sa partie sont proportionels à l'autre toute & à sa partie.

La 2e, quand une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie.

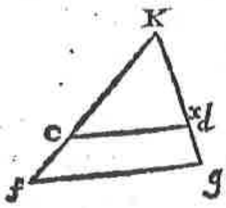
Or

Or le premier ne peut eſtre, que les baſes ne ſoient paralleles. Et le ſecond, qu'elles ne ſoient antiparalleles. Et en l'un & en l'autre les deux angles ſur une baſe ſont égaux aux deux angles ſur l'autre baſe.

PREUVE DU PREMIER.

SOIT l'angle *fkg*, dont les deux baſes ſoient *fg* & *cd*. LXII.
Je dis que ces baſes ſont paralleles, ſi,

kf. kc :: kg. kd.



Car ſoit mené du point *c* une parallele à *fg*, qui coupe *kg* en un point que j'appelleray *x*.

Il eſt certain (par XI. 19.) que

kf. kc :: kg. kx.

Or par l'hypoteſe,

kf. kc :: kg. kd.

Donc *kx* & *kd* ſont égales par 11. 43.

Donc les points *k* & *d* ne ſont qu'un même point.

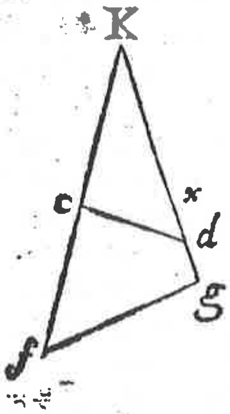
Donc *cx* & *cd* ne ſont que la même ligne.

Or *cx* eſt parallele à *fg*. Donc *cd* luy eſt auſſy parallele.

Donc les angles ſur la baſe *cd* ſont égaux aux angles ſur la baſe *fg*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREUVE DU SECOND.

SOIT l'angle *fkg*, qui ait deux baſes, *fg* & *cd*. Je dis que ces baſes ſont antiparalleles ſi LXIII.



kf. kd :: kg. kc.

Car ſoit tirée du point *c* une ligne qui coupant *kg*, prolongée s'il eſt beſoin, faſſe ſur *kg* un angle égal à celuy que *gf* fait ſur *kf*, & que le point où cette ligne coupera *kg* ſoit *x*, cette ligne *cx* ſera une baſe de l'angle *k* antiparallele à la baſe *fg*, & par conſequent (par 18. 5.)

kf. kx :: kg. kc.

Or par l'hypoteſe,

kf. kd :: kg. kc.

Donc par II. 43. *k x* est égale à *k d.*

Donc les points *x* & *d* estant sur la même ligne, ne sont qu'un même point.

Donc *c x* & *c d* ne sont qu'une même ligne.

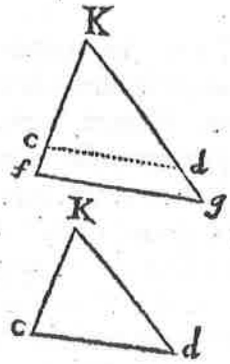
Or *c x* est antiparallele à *f g*.

Donc *c d* est aussy antiparallele à *f g*.

Donc les angles sur la base *c d* sont égaux aux angles sur la base *f g*. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

LXIV. SI deux angles égaux ont leurs costez proportionels, ils sont semblables; c'estadire que les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun.



Soient les angles égaux qui ayent leurs costez proportionels, *f K g*, & *c k d*, en sorte que *K f. K c :: K g. k d.*

D'où il s'ensuit que si *K f* est plus grand que *k c*, *K g* sera plus grand que *k d*. Prenant donc dans *K f*, *K c* égale à *k c*, & dans *K g*, *K d* égale à *k d*, les angles *c K d* & *c k d* estant égaux, & les costez de l'un estant égaux à ceux de l'autre, leurs bases seront égales, & les angles sur la base de l'un égaux aux angles sur la base de l'autre, par VIII. 63. & 64.

Or par le precedent Theoreme les deux bases de l'angle *K*, sçavoir la base *c d* & la base *f g*, sont paralleles, & les angles sur l'une sont égaux aux angles sur l'autre.

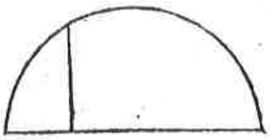
Donc dans les deux angles égaux *K* & *k* les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre. Ce qu'il falloit demonstrer.

Remarquez que ce dernier Theoreme & son Corollaire sont les inverses des principaux Theoremes de ce Livre & du Livre precedent, & qu'ils seront de grand usage dans la suite.

PROBLEMES.

I.

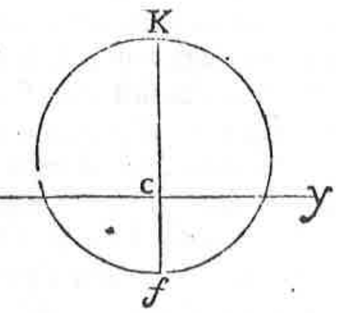
TROUVER la moyenne proportionelle entre deux lignes données. Joindre les lignes données. Faire un demy cercle, dont priſes enſemble elles ſoient diametre : la perpendiculaire élevée du point où ſe joïgnent ces lignes à la circonference ſera la moyenne proportionelle entre ces lignes données. (par 57. §.) LXV.



On peut employer pour trouver la même choſe les Theoremes 2. (46. §.) & 6. 54. §.) J'en laiſſe la recherche pour exercer l'eſprit.

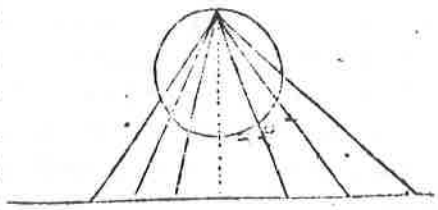
SECOND PROBLEME.

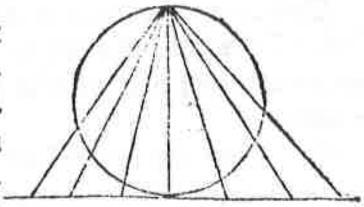
TROUVER toutes les reciproques poſſibles à deux lignes données. Mettre la plus petite dans la plus grande; comme *k c* dans *k f*. Faire un cercle qui ait la plus grande pour diametre. Et du point *c*, où la plus petite ſe termine, tirer ſur ce diametre une perpendiculaire indefinie comme *y*. Cette perpendiculaire ſatisfera au Probleme, comme on le peut juger en conſiderant le 1er Theoreme (42. 43. 45. §.) ſans qu'il ſoit beſoin que je m'amuſe à l'expliquer davantage. LXVI.



TROISIEME PROBLEME.

AYANT tiré à diſcretion d'un même point tant de lignes que l'on voudra ſur une même ligne, les diviſer toutes, en ſorte que chaque toute & ſa partie vers le point commun ſoient reciproques à chaque autre toute & à ſa même partie. LXVII.

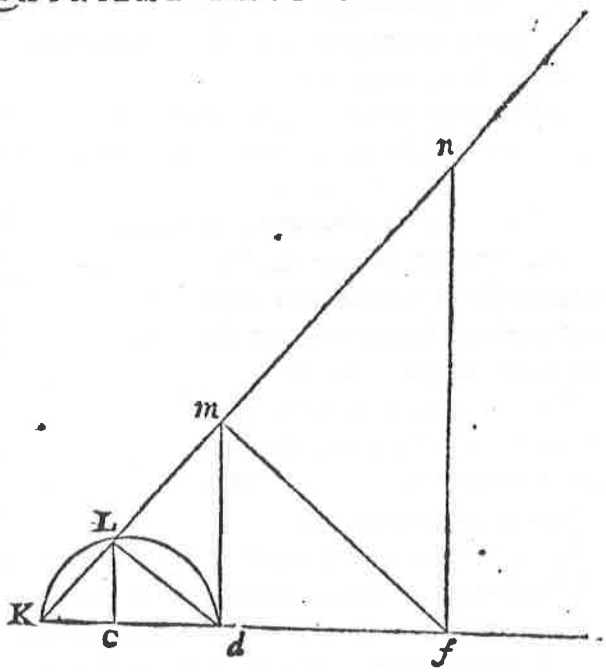




Tout cercle dont la circonference passera par le point commun, & qui aura pour diametre, ou la perpendiculaire entiere de ce point à la ligne, ou une partie de cette perpendiculaire, satisfera au Probleme, par le 3e Theoreme, & ce qui a esté dit du 3e Cas (49. 50. §.)

QUATRIEME PROBLEME.

LXVIII. AYANT les trois premieres lignes d'une progression geometrique, trouver toutes autres à l'infini.



Faire que la 3e comprenne la 1re, comme *Kd* comprend *K c*, faire un cercle qui ait *K d* pour diametre, de *c* élever la perpendiculaire *c L*, & puis tirer une ligne indefinie de *K* par *L*, laquelle j'appelleray *x*; & prolonger aussy infiniment *K d*, laquelle j'appelleray *z*.

Tirant *L d* perpendiculaire sur *x*, & *d m* perpendiculaire sur *z*, & *m f* perpendiculaire sur *x*, & *f n* perpendiculaire sur *z*, & ainsy à l'infiny:

On trouvera facilement par (20. §.) la suite infinie de la progression geometrique, dont les trois premiers termes auront esté *k c. k L. k d.* qui seront suivis de *k m. k f. k n. k g.* &c.

CINQUIEME PROBLEME.

DIVISER une ligne donnée en moyenne & extrême raison. C'estadire en telle sorte que sa plus grande partie soit moyenne proportionelle entre la plus petite partie & la toute. LXIX.

Ce qui est aussy la même chose que de trouver une ligne qui soit moyenne entre une donnée & cette donnée moins cette moyenne, laquelle pour cette raison j'appelleray la mediane.

Soit la ligne donnée appellée b.

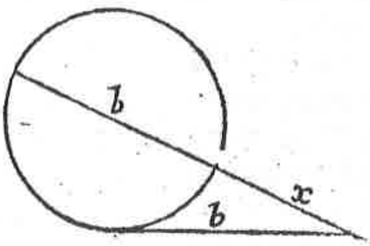
Sa plus grande partie que l'on cherche x.

Et sa plus petite $b-x$.

Il faut trouver une ligne qui soit telle, que b moins cette ligne soit à cette ligne comme cette ligne est à b.

$$b-x.\ x :: x.\ b.$$

C'est ce qui se peut trouver par une voie fort facile.



Décrire un cercle de l'intervale de la moitié de b, élevée perpendiculairement sur l'une des extremitez de b.

Et tirer une secante de l'autre extremité de b, qui passant par le centre du cercle se termine à la circonference.

La partie de cette secante qui est hors le cercle sera x. C'estadire moyenne proportionelle entre b, & $b-x$.

Car par la construction 1. b est tangente de ce cercle.

2. Le diametre de ce cercle est égal à b.

3. Et par consequent la secante entiere est $x+b$.

Or (par 54. 5.) b tangente est moyenne proportionelle entre la partie de la secante qui est hors le cercle (c'estadire x.)

Et la secante entiere (c'estadire $x+b$.

Donc $x.\ b :: b.\ x+b.$

Donc *permutando* $b.\ x :: x+b.\ b.$

Donc *dividendo* $b-x.\ x :: x.\ b.$

Ce qu'il falloit demonstrer.

PREMIER COROLLAIRE.

LXX. UNE ligne estant divisée en moyenne & extrême raison; si on y ajoûte sa plus grande partie (que nous appellerons la mediane) il s'en fera une nouvelle toute qui sera encore divisée en moyenne & extrême raison, la 1re toute estant la mediane.

C'est ce qui se voit par la voie même dont on s'est servi pour diviser la 1re toute en moyenne & extrême raison, en sorte qu'il ne faut que recomposer, pour parler ainsy, ce que l'on a divisé.

Car si $b - x.\ x :: x.\ b.$

Componendo $b.\ x :: x + b.\ b.$

Donc la ligne $x + b$ est divisée par b en moyenne & extrême raison, puisque b est moyenne proportionelle entre la toute $x + b$. & son autre partie x.

SECOND COROLLAIRE.

LXXI. UNE ligne estant divisée en moyenne & extrême raison, sa petite partie divise la mediane en moyenne & extrême raison.

Soit b divisée comme dessus; & comme sa mediane est appellée x, soit la petite appellée y. Il faut prouver que $x - y.\ y :: y.\ x.$

Or il ne faut pour cela que nommer b par ces parties $y + x$.

Car par la division de b par x en moyenne & extrême raison $y.\ x :: x.\ y + x.$

Donc *permutando* $x.\ y :: y + x.\ x.$

Donc *dividendo* $x - y.\ y :: y.\ x.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

TROISIEME COROLLAIRE.

LXXII. IL est aisé de conclure de ces deux Corollaires, que lorsqu'on a une ligne divisée en moyenne & extrême raison, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes & plus petites divisées de la même sorte.

PREUVE DES PLUS GRANDES.

LXXIII. SI on joint la mediane à la 1re toute, il s'en fait une 2de toute qui a la 1re pour sa mediane (par le 1er Corollaire.)

Donc ſi on joint la 1re toute à la 2e, il s'en fait une 3e qui a la 2e pour ſa mediane.

Et joignant la 2e à la 3e, il s'en fait une 4e qui a la 3e pour ſa mediane, & ainſy à l'infini.

PREUVE DES PLUS PETITES.

SI on prend la mediane de la 1re toute, il s'en fait une 2e toute plus petite; qui a pour ſa mediane (par le 2e Corollaire) la petite partie de la 1re toute.

Et cette mediane de la 2e toute eſt une 3e toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la 2e toute, & cette mediane de la 3e toute eſt une 4e toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la 3e toute, & ainſy à l'infini. Ce qui peut eſtre conſideré comme une nouvelle & tres belle preuve de la diviſibilité d'une ligne à l'infini.

SIXIEME PROBLEME.

AYANT la grandeur des coſtez d'un angle qui doive eſtre la moitié de chacun des angles ſur la baſe, en trouver la baſe. LXXIV.

Soit Kb de la grandeur de ces coſtez, & ſoit décritte une portion de cercle de cette intervale & du centre K.

Soit diviſée Kb en c. en moitié & extrême raiſon, en ſorte

$$bc.\ cK :: cK.\ bK.$$

La corde bd de la grandeur de cK, qui eſt la moyenne entre bc & bK, ſera la baſe de cet angle, & Kd en ſera l'autre coſté.

Car ſoit tirée la ligne cd, je ſuppoſe que les deux angles ſur la baſe d'un angle Iſoſcele ſont égaux. Et ainſy j'auray prouvé que l'angle K eſt la moitié de chacun des angles ſur la baſe, ſi je puis montrer deux choſes.

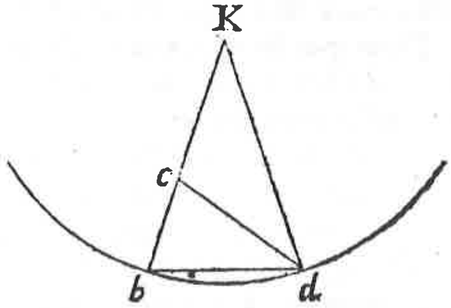
La 1re. Que l'angle K eſt égal à l'angle bdc.

La 2e. Que l'angle bdc eſt la moitié de l'angle bdK.

PREUVE DE LA PREMIERE.

L'angle b a deux baſes, cd & Kd, & ſes coſtez ſelon une baſe ſont proportionels à ſes coſtez ſelon l'autre baſe, puiſque

$$bc.\ bd :: bd.\ bK.$$



Donc les bases $c\,d$ & $K\,d$ sont antiparalleles, & par consequent les angles sur une sont égaux aux angles sur l'autre chacun à chacun.

Donc l'angle K est égal à l'angle $b\,d\,c$. Ce qui est la premiere chose qu'il falloit demonstrer.

PREUVE DE LA SECONDE.

Les deux parties de $b\,K$, base de l'angle $b\,d\,K$, sont en même raison que les deux costez de cet angle, puisque $d\,K$ estant égale à $b\,K$, & $c\,K$ à $b\,d$,

$$b\,c.\ c\,K :: b\,d.\ d\,K.$$

Donc l'angle $b\,d\,K$ est divisé par la moitié.

Donc l'angle K estant égal à l'angle $b\,d\,c$, qui est la moitié de l'angle $b\,d\,K$, est aussy la moitié de l'angle $b\,d\,K$. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

LXXV. TOUT angle Isoscele dont la base est moyenne proportionelle entre le costé entier & le costé moins, cette base est de 36 degrez, & chacun des angles sur la base de 72. Car 36. plus deux fois 72. qui est la double de 36, vaut 180, qui est ce que valent les 3 angles pris ensemble.

SEPTIEME PROBLEME.

AYANT la base d'un angle Isoscele de 36 degrez, en trouver le costé.

Soit b la base donnée divisée en moyenne & extrême raison, & x en soit la plus grande partie, $x+b$ sera le costé de cet angle. C'estadire que l'angle qui aura $x+b$ pour l'un & l'autre de ces costez, & b pour base sera de 36 degrez.

Car puisque par la division de b en moyenne & extrême raison. $b-x.\ x :: x.\ b.$

Componendo.

$$b.\ x :: x+b.\ b.$$

Donc

Donc la base b est moyenne proportionelle entre le costé $x+b$ & x, qui est ce costé moins b.

Donc par le precedent Corollaire l'angle qui a $x+b$ pour chaque costé, & b pour base, est de 36 degrez. Ce qu'il falloit demonstrer.

DES LIGNES INCOMMENSURABLES.

Ce que nous avons dit dans le IV. Livre des grandeurs incommensurables donne une si grande facilité d'expliquer les lignes incommensurables, qu'il ne faut pour cela qu'ajoûter à ce Livre trois ou quatre propositions. LXXVI.

PROPOSITION GENERALE.

Lorsque 3 lignes sont continuellement proportionelles, la raison de la 1re à la 3e peut estre de 3 sortes : ce qui se fait en 3 cas.

PREMIER CAS.

Si la raison de la premiere à la troisiéme est une raison de nombre à nombre qui ait pour ses exposans des nombres quarrez, la moyenne est à chacune des deux autres, comme le produit des racines de ces nombres quarrez, est à chacun de ces nombres quarrez, & par consequent la moyenne est commensurable aux deux autres.

SECOND CAS.

Si la raison de la 1re à la 3e est une raison de nombre à nombre, qui n'ait pas pour ses exposans des nombres quarrez, la moyenne est incommensurable en longueur & commensurable en puissance à la 1re & à la 3e.

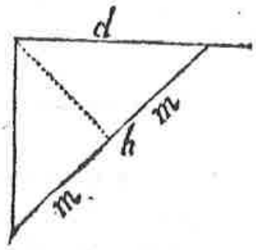
TROISIEME CAS.

Si la raison de la 1re à la 3e est une raison sourde, & non de nombre à nombre, la moyenne est incommensurable aux deux autres, tant en longueur qu'en puissance.

Tous ces 3 Cas se prouvent des lignes, de la même sorte qu'on les a prouvez dans le IV. Livre des grandeurs en general. C'est pourquoy ce qui reste icy est d'appliquer cette doctrine generale à des exemples particuliers qui soient propres aux lignes. Ce que nous ferons par les Theoremes suivans.

PREMIER THEOREME.

LXXVII. UN angle droit eſtant Iſoſcele, le coſté & l'hypotenuſe ſont incommenſurables en longueur & commenſurables en puiſſance.



Soit un angle droit Iſoſcele, dont
L'hypotenuſe ſoit appellée h.
Le coſté d.

La perpendiculaire du ſommet à l'hypotenuſe la partagera en deux également. Chaque moitié ſoit appellée m.

Donc ∺ $h.\ d.\ m.$

Or $h.\ m\ ::\ 2.\ 1.$

Donc 2 & 1 n'eſtant pas deux nombres quarrez (par le 2^e^ Cas) d eſt incommenſurable en longueur à h & à m.

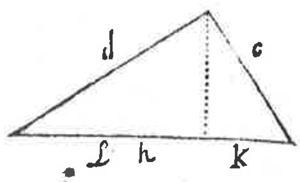
Mais il leur eſt commenſurable en puiſſance, parceque

$$\left\{\begin{matrix} hh. & dd \\ dd. & mm \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} h. & m. \\ 2. & 1. \end{matrix}\right.$$

SECOND THEOREME.

LXXVIII. QUAND l'hypotenuſe eſt à l'un des coſtez d'un angle droit, comme nombre à nombre, il eſt aiſé de juger ſi l'autre coſté eſt commenſurable ou incommenſurable à l'hypotenuſe. Et voicy comment.

Soit l'hypotenuſe h.
Un des coſtez c.
L'autre coſté d.



Une perpendiculaire eſtant menée du ſommet à l'hypotenuſe,
Soit ſa portion vers c appellée k,
Et l'autre vers d appellée l.

Il s'enſuit que $\left\{\begin{matrix} ∺\ h.\ c.\ k. \\ ∺\ h.\ d.\ l. \end{matrix}\right.$

Suppoſant donc que h & c ſoient comme les deux nombres x & z. C'eſtadire que

$$h.\ c\ ::\ x.\ z.$$

Donc la raiſon de $h.\ k.$ eſtant double de la raiſon de $h.c.$

$$h.\ k\ ::\ xx.\ zz.$$

Or k & l estant les deux portions de h,

$$l = h - k.$$

Donc $h.\ l :: xx.\ xx. - zz.$

Donc si $xx. - zz.$ est un nombre quarré par le 1er Cas de la Proposition principale, h est commensurable à d.

Que si au contraire $xx - zz$ n'est pas un nombre quarré (par le 2e Cas) h n'est point commensurable à d en longueur, mais seulement en puissance.

PROBLEME.

TROUVER toutes les raisons de nombre à nombre selon lesquelles l'hypotenuse peut estre à chacun costé comme nombre à nombre. LXXIX.

L'hypotenuse ne peut estre à chacun costé comme nombre à nombre, que ces 3 nombres estant reduits aux moindres termes ne soient tels qu'il s'ensuit.

I. Le nombre de l'hypotenuse doit avoir son quarré égal aux quarrez des nombres de chaque costé

$$HH = BB + CC.$$

II. Le nombre du grand costé doit estre moindre seulement d'une unité que celuy de l'hypotenuse $B + 1. = H$.

III. Le nombre du petit costé doit avoir son quarré égal aux nombres de l'hypotenuse & du grand costé

$$CC = H + B.$$

Or pour trouver toutes sortes de 3 nombres qui soient tels que cy dessus, il ne faut que voir ce qui en a esté dit dans le Livre IV. n. 30.

TROISIEME THEOREME.

LORSQU'UN des costez de l'angle droit est une aliquote de l'hypotenuse, l'autre costé est incommensurable à l'hypotenuse en longueur, & commensurable seulement en puissance. LXXX.

Car afin que c par exemple, soit une aliquote de h, il faut que h soit à c, comme quelque nombre à l'unité que je marqueray par un 1.

Soit donc $h.\ c :: x.\ 1.$

Donc par le Theoreme 2.

$$h.\ k :: xx.\ 11.$$

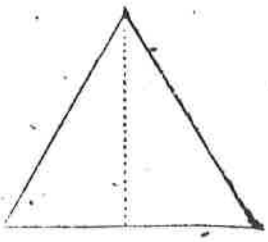
$$h.\ l :: xx.\ xx - 11.$$

Or il est impossible que $xx-11$ soit un nombre quarré. Car (11) ne fait qu'une unité, selon ce qui a esté dit, IV. 10. Et deux moindres quarrez ne peuvent jamais estre differents seulement d'une unité.

Donc par le Theoreme 2e h & d sont incommensurables en longueur, & commensurables seulement en puissance.

COROLLAIRE.

LXXXI. Si la base d'un angle Isoscele est égale au costé, la perpendiculaire du sommet à la base est incommensurable en longueur, & commensurable seulement en puissance avec le costé.



Car alors cette perpendiculaire fait un angle droit avec la moitié de la base, & l'un ou l'autre des costez est l'hypotenuse de cet angle droit.

Donc l'un des costez de cet angle droit, qui est la moitié de la base, est aussy la moitié de l'hypotenuse.

Donc il est une aliquote de l'hypotenuse.

Donc par le Theoreme precedent l'autre costé, qui est la perpendiculaire, est incommensurable en longueur, & commensurable seulement en puissance avec l'hypotenuse de cet angle droit, laquelle est le costé de l'angle dont la base est supposée égale à chaque costé.

QUATRIEME THEOREME.

LXXXII. AYANT deux lignes incommensurables en longueur (ou par les Theoremes precedens, ou par d'autres voies) & ayant trouvé la moyenne proportionelle entre ces deux lignes, elle leur sera incommensurable tant en longueur, qu'en puissance.

Cela est clair par le 3e Cas de la Proposition principale.

AVERTISSEMENT.

Il n'y a rien à dire de quatre lignes continuellement proportionelles que ce qui a esté dit dans le IV. Livre de quatre grandeurs continuellement proportionelles.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DOUZIEME.

DES FIGURES EN GENERAL CONSIDERE'ES SELON LEURS ANGLES ET LEURS COSTEZ.

ON appelle *figure* dans les elemens de Geometrie, une ſurface platte terminée de tous coſtez. I.

Ce qui comprend deux choſes : la premiere, les extremitez de cette ſurface : la ſeconde, l'eſpace qu'elle comprend ; ce qui s'appelle *l'aire de la figure.*

Nous les conſiderons dans ce Livre & le ſuivant ſelon le premier rapport ; & dans d'autres Livres nous les conſidererons ſelon le dernier.

DIVISION.

TOUTE figure conſiderée ſelon ſes extremitez, eſt, II.
Ou rectiligne.
Ou curviligne.
Ou mixte.

PREMIERE DEFINITION.

ON appelle rectiligne celle qui eſt terminée par des lignes droittes, qui ne peuvent eſtre moins de trois, eſtant III.

clair que deux lignes droittes ne peuvent pas terminer un espace de tous costez, puisqu'elles ne peuvent se rencontrer qu'en un point, ce qui laisse l'espace ouvert du costé opposé à ce point.

Il est clair aussy par là que les lignes droittes ne peuvent terminer un espace, qu'en faisant autant d'angles qu'il y a de lignes droittes qui terminent l'espace. Car si un angle demande deux lignes, une ligne sert à deux angles.

Et ainsy l'on peut considerer trois choses dans l'extremité d'une figure rectiligne. 1. Les angles. 2. Les costez. 3. Le circuit, qu'on appelle aussy *perimetre*, qui n'est autre chose que la somme des costez; c'estadire tous les costez pris ensemble.

SECONDE DEFINITION.

IV. ON appelle curviligne celle qui est terminée par une ou plusieurs lignes courbes. Et une seule ligne courbe pouvant rentrer en soy même, peut terminer un espace.

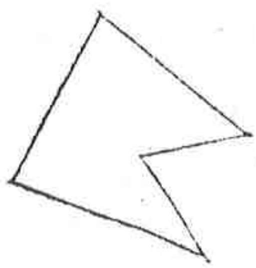
Mais on ne considere icy des figures curvilignes que le seul cercle; parceque de toutes les lignes courbes on ne considere que la circulaire.

TROISIEME DEFINITION.

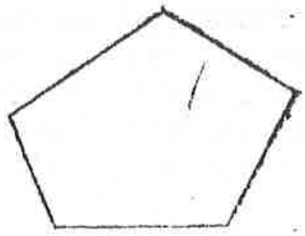
V. ON appelle figure mixte celle qui est terminée en partie par des lignes droittes, & en partie par des courbes, dont on ne considere icy que les portions de cercle, qui sont celles qui sont terminées par une corde & une portion de circonference; ou les secteurs du cercle qui sont terminez par deux rayons & une portion de la circonference, tel qu'est un quart de cercle.

DES FIGURES RECTILIGNES.

VI. ON peut diviser les figures rectilignes en celles qui ont quelque angle rentrant, & celles dont tous les angles sont saillans; c'estadire tels que leur



pointe regarde toûjours le dehors de la figure.



Les Geometres se sont restraints à considerer les dernieres, parcequ'on y peut facilement reduire les premieres.

ESPECES DES FIGURES RECTILIGNES.

Toute figure rectiligne ayant autant d'angles que de costez, on les divise indifferemment par le nombre de leurs angles ou de leurs costez, & on les nomme selon l'un ou selon l'autre. VII.

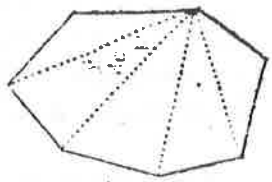
Ainsy on appelle Triangle une figure de trois angles & de trois costez, & Quadrilatere celle de quatre angles & de quatre costez.

Les noms Grecs des figures sont pris du nombre des angles : comme
Pentagone, de cinq.
Exagone, de six.
Heptagone, de sept.
Octogone, de huit.
Decagone, de dix.
Et Polygone, de plusieurs angles indeterminément.

Ces noms sont si communs, qu'il est bon de ne les pas ignorer ; mais on peut se passer d'en sçavoir d'autres qui sont moins communs : & appeller les figures du nombre de leurs costez ou de leurs angles. Une figure de quinze costez, de trente, de cent, de mille &c.

PREMIER THEOREME.

Tout polygone peut estre resolu en autant de triangles, qu'il a de costez moins 2, & il ne le peut estre en moins. VIII.



C'estadire, s'il a 4 costez, il peut estre resolu en deux triangles ; si 5, en trois ; si 6, en quatre ; si 7, en cinq ; si 8, en six &c.

Car d'un angle quelconque tirant deux lignes de part & d'autre, qui soûtienne chacune l'angle qui le suit de part & d'autre, il s'en fait deux triangles qui comprennent 4 costez de la figure. Mais de ce même angle menant des lignes à chacun des autres angles, il s'en fait autant de triangles qu'il y a de costez outre ces 4. Donc il y aura autant de triangles que de costez moins 2, puisqu'il y a necessairement 2 de ces triangles qui comprennent 4 de ces costez.

SECOND THEOREME.

IX. Tous les angles d'un polygone quelconque sont égaux à autant de droits que le double de ces costez moins 4.

Car nous avons déja veu qu'un angle plus les deux angles que font ses costez sur sa base, sont égaux à deux droits. Or un angle avec sa base n'est point different d'un triangle. Et par consequent les trois angles d'un triangle valent deux angles droits, qui sont six moins 4.

Or par le precedent Theoreme tout autre polygone peut estre resolu en autant de triangles moins 2 qu'il a de costez; & les angles de ces triangles comprendront ceux du polygone. Donc si le polygone a 7 costez estant resolu en 5 triangles, les angles de ces 5 triangles en vaudront dix droits, qui sont 14 moins 4.

On le peut encore demontrer d'une autre sorte, en prenant un point quelconque au dedans du polygone, & de ce point menant des lignes à tous les angles. Car alors l'heptagone sera partagé en 7 triangles, qui auront tous, deux costez de leurs angles autour de la figure, & le 3e au dedans. Or tous les 21 angles de ces 7 triangles en valent 14 droits, & les 7 du dedans de la figure valent 4 droits (& quand il y en auroit mille, ou tant que l'on voudra, ils ne vaudront jamais que 4 droits) & par consequent les 14 autres qui sont égaux à ceux de l'heptagone valent 14 droits moins 4; c'estadire 10 droits.

DIVISION.

Les figures de ces differentes especes se peuvent considerer ou chacune à part, ou en les comparant deux ensemble.

FIGURES

FIGURES CONSIDEREE'S A PART.

DEFINITIONS.

1. CELLES dont tous les angles ſont égaux, s'appellent *Equiangles*. X.

2. Celles dont tous les coſtez ſont égaux, s'appellent *Equilateres*.

3. Celles qui ſont tout enſemble equiangles & equilateres, s'appellent *Regulieres*.

Et on met auſſy le cercle entre les regulieres, à cauſe de ſa parfaite uniformité, & qu'on le peut conſiderer comme un polygone regulier d'une infinité de coſtez.

4. Celles dont les angles, ou les coſtez ſeroient alternativement égaux ; c'eſtadire le premier égal au 3^e, 5^e, 7^e, 9^e, & le ſecond égal au 4^e, 6^e, 8^e, 10^e, ſe peuvent appeller alternativement equiangles ou equilaterales.

Mais il faut remarquer que cela ne peut eſtre que quand le nombre des angles ou des coſtez eſt pair. Car s'il eſtoit impair, le dernier & le premier ſe trouveroient égaux ; & par conſequent le penultiême & le premier ſeroient inégaux : & par conſequent ils ne ſeroient pas tous alternativement égaux.

FIGURES COMPARE'ES.

DEFINITIONS.

QUAND on compare deux figures de même genre, c'eſt dire d'un nombre égal de coſtez. XI.

1. Si les angles de l'une ſont égaux aux angles de l'autre, on les appelle *Equiangles* ; & ce mot ne marque pas alors que les angles de chaque figure ſoient égaux entr'eux ; mais ſeulement que ceux de l'une ſont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

2. Si les coſtez de l'une ſont égaux aux coſtez de l'autre, on les appelle *Equilateres*, ou *Equilateres entr'elles*.

3. Si elles ſont tout enſemble equiangles & equilateres entr'elles, on les peut appeller *Tout-egales* ; ce qu'il faut bien diſtinguer de celles qu'on appelle ſimplement *Egales*.

4. Si elles ſont equiangles, & que les coſtez de l'une

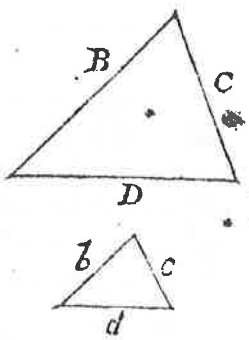
ſoient proportionels aux coſtez de l'autre, on les appelle *Semblables.*

Ce qui fait voir que les *tout-egales* ſont toûjours *ſemblables*, puiſqu'il y a même raiſon entre les coſtez de l'une & de l'autre, qui eſt la raiſon de l'égalité. Au lieu que les *ſemblables* ne ſont pas tous toûjours *tout-egales*, puiſqu'il peut y avoir une autre raiſon que celle d'égalité, qui ſoit la même entre les coſtez de l'une & de l'autre.

Les coſtez des figures ſemblables, entre leſquels il y a même raiſon, s'appellent les coſtez *Homologues*, qui ſont toûjours le plus grand coſté de l'une & de l'autre : & toûjours ainſy. Et c'eſt ce qui produit ce Theoreme.

PREMIER THEOREME.

XII. LES circuits de deux figures ſemblables ſont en même raiſon que leurs coſtez homologues.



Car ſoient les trois coſtez de l'une de ces figures, *B C D*; & de l'autre *b c d.*

Puiſque *B* eſt à *b*, comme *C* à *c*, & *D* à *d.*

Les trois d'une part (qui ſont le circuit de la premiere figure) ſont aux trois de l'autre part (qui ſont le circuit de la ſeconde) en même raiſon que chacune d'une part à chacune de l'autre. C'eſt ce qui a eſté demonſtré, II. 52.

AUTRES DEFINITIONS.

XIII. QUAND on compare deux figures de même ou de differentes eſpeces.

5. Si le circuit de l'une eſt égal au circuit de l'autre, on les appelle *Iſoperimetres.*

6. Si l'eſpace que comprend l'une eſt égal à l'eſpace que comprend l'autre, on les appelle *égales.* Ce qui appartient au Livre où l'on traittera des figures conſiderées ſelon *l'aire.* Et ce qu'il ne faut pas confondre, comme il a déja eſté dit, avec celles qu'on appelle *tout-egales.*

DES FIGURES INSCRITTES OU CIRCONSCRITTES AU CERCLE.

DES INSCRITTES.

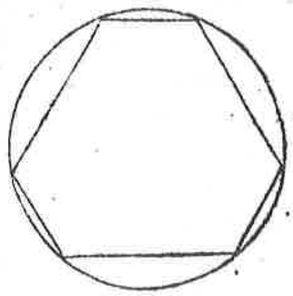
ON dit qu'une figure rectiligne est *inſcritte au cercle*, quand les ſommets de ſes angles ſe trouvent dans la circonference de ce cercle. D'où il s'enſuit, XIV.

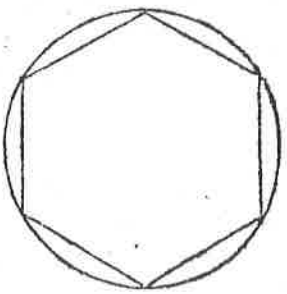
1. Que les angles de cette figure inſcritte ſe doivent alors conſiderer comme des angles inſcrits au cercle, dont il a eſté parlé dans le Livre IX.

2. Qu'ainſy les angles d'une figure inſcritte ne ſçauroient eſtre égaux, que quand les deux arcs qui ſoûtiennent les deux coſtez de chaque angle ſont égaux pris enſemble aux deux arcs que ſoutiennent les deux coſtez de chaque autre angle : parceque chacun de ces angles a pour meſure la demycirconference moins la moitié des deux arcs que ſoutiennent ces coſtez. IX. 19. D'où s'enſuit ce Theoreme.

SECOND THEOREME.

UNE figure inſcritte au cercle ne ſçauroit eſtre equiangle qu'elle ne ſoit equilaterale ou abſolument, ou alternativement ; & en ce dernier cas, il faut que le nombre de ſes coſtez ſoit pair. XV.





Car afin que les angles d'une figure inſcritte au cercle (qui ſont des angles inſcrits) ſoient tous égaux, il faut & il ſuffit que les deux arcs que ſoutiennent les coſtez de chaque angle pris enſemble ſoient égaux aux arcs que ſoutiennent auſſy les coſtez de tout autre angle, comme il vient d'eſtre dit.

Or cela eſt quand tous ces arcs ſont égaux : ce qui arrive quand la figure eſt abſolument équilaterale ;

parceque tous ces costez estant égaux, tous les arcs qu'ils soutiennent le sont aussy.

Mais cela arrive encore quand ces arcs sont alternativement égaux, pourveu qu'ils soient en nombre pair; parcequ'alors la moitié de ces arcs estant petits & tous égaux entr'eux, & la moitié plus grands tous égaux aussy entr'eux, & un petit estant toujours suivi d'un grand, les deux arcs soutenant les costez d'un angle inscrit pris ensemble seront toujours égaux à deux autres arcs soutenans les costez de tout autre angle. Et ainsy ces angles seront égaux. Or pour cela il suffit que les costez de la figure soient alternativement égaux, parce qu'alors ils soutiendront des arcs alternativement égaux.

Mais il est bien visible qu'il faut en ce cas là que le nombre des costez soit pair, comme il a esté montré §. 10.

DES CIRCONSCRITTES AU CERCLE.

XVI. ON dit qu'une figure est *circonscritte à un cercle*, quand tous les costez de la figure touchent le cercle. Et de là il s'ensuit,

1. Que les angles de la figure sont des angles circonscrits; & par consequent il est bon de les considerer comme des angles compris entre deux tangentes, que l'on doit prendre comme si chacune estoit terminée au point de l'attouchement. D'où il s'ensuit encore,

2. Que ces angles circonscrits sont toujours Isosceles; parceque les tangentes menées d'un même point sont égales, VII. 34.

3. Que les angles circonscrits sont égaux quand les tangentes de l'un sont égales aux tangentes de l'autre. IX. 55.

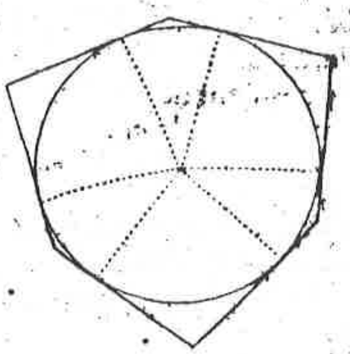
4. Que chaque costé d'une figure circonscritte est composé de deux tangentes, qui viennent de deux differens angles.

Et delà s'ensuit ce Theoreme.

TROISIEME THEOREME.

UNE figure circonscritte au cercle ne sçauroit estre equilaterale qu'elle ne soit equiangle, ou absolument ou alternativement; & en ce dernier cas il faut que le nombre de ses angles soit pair. XVII.

Car afin qu'une figure circonscritte au cercle soit équilaterale, il faut & il suffit que deux tangentes dont est composé chaque costé de cette figure circonscritte prises ensemble soient égales à deux autres tangentes dont sera composé tout autre costé.



Or cela est quand toutes ces tangentes sont égales, ce qui arrive quand tous les angles de cette figure sont égaux; car alors toutes les tangentes sont égales aussy.

Mais cela arrive encore quand les angles de la figure sont alternativement égaux, pourveu que ce soit en nombre pair, en sorte que la moitié des angles n'ait que deux petites tangentes (ce qui fait neanmoins les plus grands angles) & l'autre moitié deux plus grandes tangentes, & que toutes les petites soient égales entr'elles, & les grandes aussy, & qu'un petit angle soit toujours suivi d'un grand.

Car alors chaque costé sera composé d'une petite & d'une grande tangente (parceque chaque costé, comme il a esté dit, est composé de deux tangentes qui viennent de deux differens angles.) Donc tous les costez seront égaux.

Donc une figure circonscritte au cercle ne peut estre équilaterale, si elle n'est equiangle, ou absolument ou alternativement, & en ce dernier cas il faut que le nombre des angles soit pair. Ce qu'il falloit demonstrer.

DES FIGURES REGULIERES.

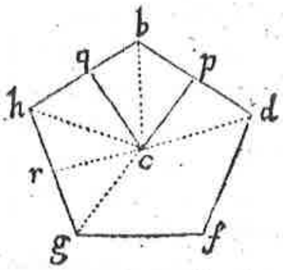
LE meilleur moyen de bien concevoir les figures regulieres, est de les considerer comme inscrittes en un cercle; XVIII.

parcequ'elles peuvent toutes y estre inscrites, selon ce Theoreme.

QUATRIEME THEOREME.

XIX. TOUTE figure reguliere peut estre inscritte & circonscritte en un cercle; parcequ'il y a toûjours dans ces figures un po[illegible]qui en est le centre, dont toutes les lignes menées à to[illegible]angles (qu'on appelle raions) sont égales, & dont to[illegible]es perpendiculaires menées au costé (qu'on
aussy peut appeller *les raions droits*) sont ~~ainsy~~ égales entr'elles.

Soit une figure reguliere de tant de costez & d'angles que l'on voudra, il suffira d'en considerer 4 ou 5 angles, dont j'appelleray les sommets *b. d. f. g. h.*



Si de *p* milieu du costé *b d*, & de *q* milieu du costé *b h*, on éleve deux perpendiculaires, elles se rencontreront estant prolongées, par VI. 34.

Et le point *c* où elles se rencontrent sera le centre de la figure.

Car du point *c*, intervale *cb*, décrivant une circonference, elle passera par les trois points *h. b. d.* VII. 3.

Donc les trois raions *cb*, *ch*, & *cd*, seront égaux.

Donc les 4 angles *chb*, *cbh*, *cbd*, *cdb* seront égaux, par VIII. 64.

Donc chacun de ces trois raions *ch*, *cb*, *cd*, partage par la moitié l'angle de la figure.

Donc l'angle *chg* estant égal à l'angle *chb*, *cg* base de l'angle *chg*, doit estre égale à *cb*, base de l'angle *chb*, par VIII. 65.

Donc ce 4^e raion *cg* est égal aux trois autres.

Et il est clair que quand cette figure reguliere auroit cent mille angles, on prouveroit la même chose de toutes les lignes menées de *c* aux angles, qui sont les raions.

Donc si de ce point *c* & de l'intervale d'un raion on décrit un cercle, la figure sera inscritte en ce cercle; puisque tous les raions estant égaux, les sommets de tous les angles se trouveront dans la circonference de ce cercle.

Et delà il s'ensuit que tous les costez de cette figure seront des cordes égales du même cercle.

Donc les perpendiculaires du centre aux costez sont égales, par VII. 8.

Or ces perpendiculaires en font les raions droits.

Donc si on décrit un autre cercle de l'intervale d'un raion droit; c'estadire d'une perpendiculaire à un costé, cette figure sera circonscritte à ce cercle; puisque tous ces raions droits estant égaux, il n'y aura aucun costé qui ne touche le cercle.

COROLLAIRE.

IL est aisé par là de determiner trois choses importantes dans chaque espece de figure reguliere. XX.

La premiere, de combien de degrez est l'arc qui soûtient le costé de la figure, que j'appelleray simplement l'arc de la figure.

La seconde, de combien de degrez est l'angle de la figure; c'estadire l'angle compris entre les deux costez de la figure.

La troisiême, quel est aussy l'angle que fait un raion sur un costé: c'est ce qui se verra par ces trois Problemes.

PREMIER PROBLEME.

DETERMINER la grandeur de l'arc de toute espece de figure reguliere. XXI.

La circonference estant divisée en 360 degrez, ou 21600 minutes, ou 1296000 secondes: si on divise ce nombre par celuy des costez de la figure, le quotient fera voir de combien de degrez, ou de minutes, ou de secondes est l'arc de la figure.

Ainsy l'arc d'une figure de 15 costez est de 24 degrez, parceque 15 divisant 360, le quotient est 24.

L'arc d'une figure de 3600 costez est de 6 minutes, parceque 21600 minutes estant divisé par 3600, le quotient est 6.

SECOND PROBLEME.

DETERMINER la grandeur de l'angle de toute espece de figure reguliere. XXII.

Ayant trouvé l'arc par le premier Probleme, oster les degrez de cet arc de 180. qui est la demycirconference, ce qui restera sera la mesure de l'angle de la figure.

Car tout angle d'une figure reguliere doit estre consideré comme un angle Isoscele inscrit dans le cercle, qui a pour mesure la demycirconference moins l'arc que soûtient un de ses costez. IX. 20.

Et ainsy pour avoir la grandeur de l'angle d'une figure de 15 costez, il ne faut qu'oster de 180 les 24 degrez de l'arc que soûtient le costé de cette figure; & ce qui restera, qui est 156, sera la mesure de l'angle d'une figure de 15 costez.

Et pour avoir l'angle d'une figure de 3600 costez, il faut oster 6 minutes de 180 degrez, & ce qui restera, qui est 179 d. 54'. sera la mesure de l'angle de cette figure.

TROISIEME PROBLEME.

XXIII. DETERMINER la grandeur de l'angle que fait le raion sur le costé de toute figure reguliere.

Il ne faut pour cela que prendre la moitié du nombre des degrez que vaut l'angle de la figure. Parceque tout raion partage par la moitié l'angle de la figure.

Ainsy l'angle du raion sur le costé dans une figure de 15 costez, est de 78 degrez, qui est la moitié de 156. Et l'angle du raion sur le costé d'une figure de 3600 costez, est de 89. d. 57'.

CONSIDERATION SUR LE CERCLE.

XXIV. LES Geometres considerent souvent le cercle comme un polygone d'une infinité de costez : & selon cela voicy de quelle sorte on devroit marquer les trois choses que nous venons de determiner dans tout autre polygone.

Puisque l'arc d'un polygone regulier est d'autant plus petit, que le nombre de ses costez est grand, il faut que l'arc d'un polygone d'une infinité de costez soit infiniment petit, & qu'ainsy il ne puisse estre marqué que par zero.

Or qui oste zero de 180 degrez, reste 180 pour l'angle de ce polygone infini.

Et

Et qui divise 180 par la moitié, reste 90, qui est la mesure d'un angle droit pour l'angle du raion sur le costé de ce polygone infini.

Aussy il est vray que l'angle du raion sur la circonference d'un cercle est droit en sa maniere, puisque le raion coupe perpendiculairement sa circonference; & que si cet angle est plus petit qu'un droit, ce n'est que de l'espace qui est entre la circonference & la tangente, qui est plus petit que tout angle aigu; quoiqu'il n'y ait point d'angle aigu qui ne puisse estre divisé en une infinité de plus petits.

Et on peut dire aussy que tout point de la circonference est comme le sommet d'un angle de 180 degrez, puisqu'estant partagé par le raion en deux angles égaux, chacun de ses angles de part & d'autre est droit en sa maniere; & qu'ainsy chacun est de 90 degrez.

DES FIGURES REGULIERES COMPARÉES ENSEMBLE.

CINQUIEME THEOREME.

LES figures regulieres de même espece, c'estadire d'autant de costez, sont toûjours semblables, & les circuits sont en même raison que les costez. XXV.

Car par ce qui vient d'estre dit, les angles de deux figures regulieres de même espece sont necessairement égaux; leur grandeur estant determinée par les arcs des figures, & ces arcs l'estant par le nombre des costez de la figure.

Et pour ce qui est des costez, ceux de chaque figure estant égaux, on peut appeller les uns b, & les autres c.

Or il est bien clair que $b. \ c :: b. \ c$.

Et il est clair aussy que b est à c, comme $10\,b$ à $10\,c$, ou $100\,b$ à $100\,c$, ou $1000\,b$ à $1000\,c$.

Donc les circuits ne sçauroient manquer d'estre en même raison que les costez.

SIXIEME THEOREME.

DEUX figures regulieres estant de même espece, ces 4 choses de l'une, *raion*, *raion droit*, *costé*, *circuit*, sont en même raison avec ces 4 autres mêmes choses de l'autre: XXXV.

c'estadire que le raion de l'une est au raion de l'autre, comme le raion droit au raion droit, le costé au costé, le circuit au circuit.

Ces deux derniers viennent d'estre prouvez; mais ils ne laisseront pas d'entrer dans la preuve generale des autres.

Il ne faut pour cela que considerer dans chacune de ces figures un angle compris entre un raion, & un raion droit qui a pour base la moitié du costé.

Ces deux angles sont semblables en toutes les figures regulieres de même espece; c'estadire que l'angle est égal à l'angle, & que les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre.

Car chacun de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc de la figure, puisque sa base est la moitié du costé. Or dans toutes les figures de même espece l'arc de la figure est d'autant de degrez en l'une qu'en l'autre.

Pour les angles sur chacune des bases cela est encore plus clair, puisque l'un est droit en l'un & en l'autre; sçavoir celuy qui est fait par le raion droit; & que l'autre est la moitié de l'angle de la figure qui est égal en toutes les figures de même espece.

Or puisque ces angles sont semblables par X. 17. les costez sont proportionels aux costez; & la base à la base: c'estadire que,

Le raion est au raion, comme le raion droit à un raion droit, & la moitié du costé à la moitié du costé. Et par consequent comme le costé au costé, & le circuit au circuit.

PREMIER COROLLAIRE.

XXVII. LES costez & les circuits de deux figures regulieres de même espece sont en même raison, que les diametres des cercles dans lesquels elles sont inscrites.

Car ces diametres sont le double des raions de ces figures. Donc &c.

SECOND COROLLAIRE.

XXVIII. LES circonferences des cercles sont en même raison que leurs diametres.

Car les cercles sont comme des polygones d'une infinité de costez, & leur circonference est comme le circuit comprenant cette infinité de costez. Donc par le precedent Corollaire ce circuit d'une infinité de costez d'une part, est au circuit d'une infinité de costez de l'autre, comme le diametre au diametre.

C'est la seule voie dont on peut prouver la proportion des circonferences & des diametres. Car n'y en ayant point pour le faire positivement & immediatement, on est reduit à y employer l'analogie des polygones semblables d'un si grand nombre de costez que l'on voudra, qu'on peut concevoir estre inscrits dans l'un & l'autre cercle : comme de cent mille costez, de cent millions, de cent mille millions, & ainsy jusques à l'infini.

Car plus ces polygones ont de costez, moins il y a de difference entre la circonference du cercle & leur circuit, VII. 19. Et ainsy quelque petite que soit une ligne donnée, quand ce ne seroit que la centmilliême partie de l'épaisseur d'une fueille de papier, on peut concevoir un polygone de tant de costez inscrit dans l'un & dans l'autre cercle, que la difference de son circuit d'avec la circonference de ces cercles sera moindre que cette ligne donnée.

Or de quelque grand nombre de costez que soient ces polygones, leurs circuits seront toûjours en même raison que les diametres, par le Corollaire precedent.

Donc on doit conclure par une analogie tres certaine, que les circonferences sont aussy en même raison que les diametres.

Troisieme Corollaire.

Si deux figures regulieres de même espece ont de l'égalité en l'une de ces quatre choses, raion, raion droit, costé, circuit, elles l'ont en tout, & sont tout-égales. XXIX.

C'est une suite évidente du sixiême Theoreme.

Quatrieme Corollaire.

L'une de ces quatre choses estant donnée, la grandeur de la figure reguliere est determinée : c'estadire qu'elle ne XXX.

peut estre que d'une sorte, quoiqu'il ne soit pas toûjours facile de la décrire; parceque souvent il n'est pas aisé ou de trouver le costé d'une figure reguliere en ayant le raion, ce qui est la même chose que de l'inscrire en un cercle donné: ou d'en trouver le raion en ayant le costé; ce qui est la même chose que trouver le cercle dans lequel une figure dont le costé est donné puisse estre inscritte. C'est de quoy nous allons traitter.

DE L'INSCRIPTION OU CIRCONSCRIPTION D'UNE FIGURE REGULIERE DE TELLE ESPECE DANS UN CERCLE DONNÉ.

XXXI. IL est bien facile par ce qui a esté dit, une figure reguliere estant décritte, d'en trouver le raion pour l'inscrire dans un cercle: mais il n'est pas aussy facile d'inscrire dans un cercle donné, telle figure reguliere que l'on voudra. Et souvent même on ne le peut que mecaniquement, & non geometriquement, aumoins par la Geometrie ordinaire; parcequ'elle ne donne pas le moien de diviser un arc donné, en 3, en 5, en 7 &c. ce qui seroit souvent necessaire pour inscrire en un cercle donné telle figure que l'on voudroit.

Ainsy je pense que tout ce que l'on peut faire de mieux se reduit à ces deux regles generales, & à quelques Problemes particuliers.

PREMIERE REGLE GENERALE.

XXXII. LORSQU'ON sçait inscrire en un cercle donné une certaine espece de figure reguliere, il est bien facile d'inscrire toutes celles qui ont plus ou moins de costez, selon la progression double.

C'estadire qui en ont deux fois moins, 4 fois moins, 8 fois moins &c jusques à ce qu'on soit arrivé ou à 4, ou à un nombre impair, qui ne se puisse plus diviser par la moitié.

Ou qui en ont deux fois plus, 4 fois plus, 8 fois plus &c. jusqu'à l'infini.

Supposons, par exemple, qu'on sçache inscrire dans un cercle donné une figure de 32 costez, la corde qui soûtiendra deux arcs de cette figure, sera le costé d'une figure de 16. Et celle qui soûtiendra deux arcs de la figure de 16 costez, sera le costé d'une figure de 8. Et ainsy de suite.

Et au contraire la corde qui soûtiendra la moitié de l'arc de cette figure de 32 costez sera le costé d'une figure de 64. Et celle qui soûtiendra la moitié de l'arc d'une figure de 64 costez, sera le costé d'une figure de 128 costez. Et ainsy à l'infini.

SECONDE REGLE GENERALE.

LORSQUE l'on sçait inscrire une certaine espece de figure reguliere en un cercle donné, on la sçait aussy circonscrire. XXXIII.

Car ayant les points de tous les sommets des angles de l'inscrite, les tangentes au cercle à ces mêmes points estant prolongées jusques à ce qu'elles se rencontrent, font une figure semblable circonscritte au même cercle; puisque d'une part tous les angles circonscrits de cette figure sont égaux, estant appuyez sur des arcs convexes égaux; & que de l'autre chacun de ces angles est égal à l'angle de la figure circonscritte, par IX. 52.

PROBLEMES PARTICULIERS.

I.

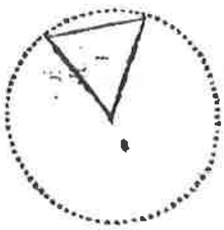
INSCRIRE un quadrilatere regulier (qui s'appelle quarré) dans un cercle donné. XXXIV.

Deux diametres qui se couppent, partagent la circonference en 4 parties, dont chacune est l'arc du quarré inscrit dans le cercle.

COROLLAIRE.

INSCRIRE dans un cercle donné une figure de 8 costez, de 16, de 32; & ainsy à l'infini. 2[e] Regle generale. XXXV.

SECOND PROBLEME.



INSCRIRE en un cercle donné un exagone regulier. XXXVI.

Le diametre ou raion est le costé de l'exagone. Car ayant fait un angle compris par deux raions, & ayant pour base une ligne égale au raion, cet angle est de 60 degrez, puisque cet angle est égal à chacun des angles sur la base, & que les trois ensemble valent 180 degrez. Donc chacun est de 60 degrez. Or 60 degrez est l'arc de l'exagone. Donc le demydiametre est le costé de l'exagone.

PREMIER COROLLAIRE.

XXXVII. INSCRIRE en un cercle donné un triangle regulier.

Doubler l'arc de l'exagone, par la 1re Regle generale.

SECOND COROLLAIRE.

XXXVIII. INSCRIRE en un cercle donné une figure de 12 costez, de 24, de 48. Et ainsy à l'infini. 1re Regle generale.

TROISIEME PROBLEME.

XXXIX. INSCRIRE en un cercle donné un decagone, ou figure de dix costez.

Ayant divisé le demydiametre en moyenne ou extrême raison (par XI. 68.) la plus grande partie de cette ligne ainsy divisée est le costé du decagone. Car elle soûtient un arc de 36. degrez, par XI. 73.

PREMIER COROLLAIRE.

XL. INSCRIRE en un cercle donné un pentagone ou figure de cinq costez.

Doubler l'arc du decagone, par la 1re Regle generale.

SECOND COROLLAIRE.

XLI. INSCRIRE en un cercle donné une figure de 20 costez, de 40, de 80 : & ainsy à l'infini. 1re Regle generale.

QUATRIEME PROBLEME.

XLII. INSCRIRE en un cercle donné une figure de 15 costez.

De l'arc de l'exagone qui est de 60 degrez, oster l'arc du decagone qui est de 36, il restera un arc de 24 degrez, qui est l'arc d'une figure de 15 costez ; parceque 24 fois 15 font 360.

COROLLAIRE.

XLIII. INSCRIRE en un cercle donné une figure de 30 costez, de 60, de 120. Et ainsy à l'infini. 1re Regle generale.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TREIZIEME.

DES TRIANGLES ET QUADRILATERES CONSIDEREZ SELON LEURS COSTEZ ET LEURS ANGLES.

APRES ce qui a esté dit des figures en general, il ne reste plus que d'expliquer ce qui est particulier aux triangles, & aux quadrilateres.

PREMIERE SECTION.

DES TRIANGLES.

PREMIER LEMME.

UN angle avec sa base, est la même chose qu'un triangle. Et ainsy tout ce qui a esté dit dans les livres des angles, des proportionelles, & des reciproques des angles considerez avec leur base, se peut sans peine appliquer aux triangles. I.

SECOND LEMME.

TOUT triangle se peut inscrire en un cercle. Car il ne faut que trouver la circonference qui passe par les trois sommets des trois angles, par VII. 3. II.

TROISIEME LEMME.

DEFINITION.

III. LE costé quelconque d'un triangle en peut estre appellé *la base*, & les deux autres ses costez : & alors l'angle soûtenu par la base est appellé *l'angle du sommet*, & la distance de ce sommet à la base est appellée *la hauteur du triangle*.

TRIANGLES CONSIDEREZ A PART.

PREMIER THEOREME.

IV. TOUT triangle a ses trois angles égaux à deux droits. VIII. 59.

PREMIER COROLLAIRE.

V. Tous les trois angles d'un triangle peuvent estre aigus ; mais il n'y en peut avoir qu'un droit ou obtus.

SECOND COROLLAIRE.

VI. SI l'un des angles du triangle est droit, les deux autres valent un droit.

TROISIEME COROLLAIRE.

VII. QUI connoist la grandeur des deux angles d'un triangle, connoist la grandeur du 3^{e}. Car ostant de la demycirconference les deux dont on connoist la grandeur, ce qui reste est la grandeur du 3^{e}.

Qui connoist de combien de degrez sont les deux, sçait de combien de degrez est le 3^{e}. Car ostant le nombre des degrez que valent les deux de 180, ce qui reste est le nombre des degrez que vaut le 3^{e}. Si les deux valent 108 degrez, le 3^{e} en vaut 72.

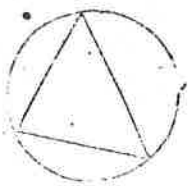
SECOND THEOREME.

VIII. DANS tout triangle le plus grand costé soûtient le plus grand angle, & le plus grand angle est soûtenu par le plus grand costé. Car par le 2^{e} Lemme, tout triangle peut estre inscrit dans un cercle, & alors la circonference du cercle est partagée en trois arcs, sur chacun desquels est appuyé chacun des angles du triangle.

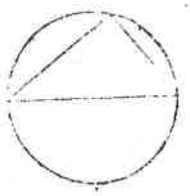
Or ces trois arcs sont :

1er CAS. Ou tous trois moindres que la demycirconfe-

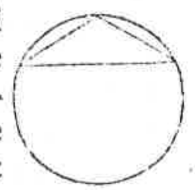
rence



rence : & alors chacun des angles du triangle est aigu. (IX. 25.) Et il est clair que le plus grand angle estant appuyé sur le plus grand arc, est aussy soûtenu par le plus grand costé. VII. 10.



2ᵉ CAS. Ou l'un de ces arcs est une demycirconference, & les autres moindres ; & alors l'angle appuyé sur la demycirconference est droit (IX. 25.) Et par consequent le plus grand de tous ; comme aussy le costé qui le soûtient, qui est un diametre, est plus grand qu'aucun des deux autres. VII. 9.



3ᵉ CAS. Ou l'un de ces arcs est plus grand que la demycirconference ; & alors l'angle appuyé sur cet arc est obtus, & par consequent le plus grand de tous : comme aussy le costé qui le soûtient terminant le segment dans lequel est cet angle obtus, est plus prés du centre qu'aucun des deux costez qui le comprennent ; & ainsy plus grand. VII. 10.

PREMIER COROLLAIRE.

Tous les costez du triangle estant égaux, tous les angles le sont aussy : & au contraire tous les angles estant égaux, les costez le sont aussy. IX.

Car estant inscrit dans un cercle, les costez égaux soûtiennent des arcs égaux. Or les angles appuyez sur des arcs égaux, sont égaux. IX. 21.

Que si au contraire on supposoit les trois angles égaux, on prouveroit de la même maniere que les costez sont égaux. Car les angles égaux seront appuyez sur des arcs égaux. IX. 21. Or les arcs égaux sont soûtenus par des costez égaux.

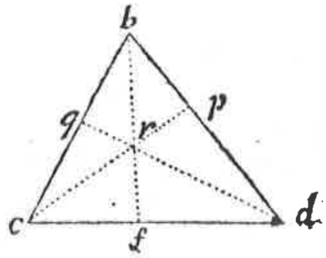
SECOND COROLLAIRE.

TOUT triangle qui a deux costez égaux a les deux angles soûtenus par ces costez égaux ; & au contraire. En inscrivant ce triangle dans le cercle, on prouvera ce Corollaire de la même sorte que le precedent. X.

On laisse à trouver beaucoup d'autres manieres dont on le peut demonstrer.

TROISIEME THEOREME.

XI. LES lignes qui divisent par la moitié chacun des angles du triangle se rencontrent en un même point au dedans du triangle.



Soit le triangle *b c d*.

Soit l'angle *d* divisé par la moitié par *d q*, & *c* divisé par la moitié par *c p*, & que *d q* & *c p* se coupent en *r*; je dis que la ligne *b r* divisera aussy l'angle *b* par la moitié.

Car (par X.30.) l'angle *d* estant divisé par la moitié,

db. bq :: dc. cq.

Et par la même raison considerant *d q*, comme la base de l'angle *c*, divisé par la moitié par *c r*.

cd. cq :: dr. qr.

Donc *db. bq :: dr. qr.*

Donc (par X. 31.) la ligne *b r* divise l'angle *b* par la moitié. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Ces lignes coupant par la moitié les angles d'un triangle font plusieurs proportions. On les peut reduire à 9, en commençant la comparaison par les portions des secantes.

Pour l'angle *b*. *br. rs* $\begin{cases} bd. & ds. \\ bc. & cs. \end{cases}$

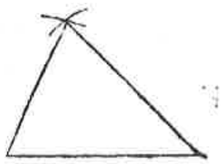
Pour l'angle *c*. *cr. rp* $\begin{cases} cd. & dp. \\ cb. & bp. \end{cases}$

Pour l'angle *d*. *dr. rq* $\begin{cases} db. & bq. \\ dc. & cq. \end{cases}$

PREMIER PROBLEME.

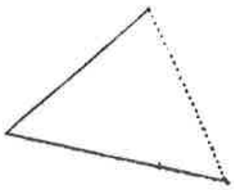
XII. FAIRE un triangle de trois lignes données. Il faut que deux quelconques soient plus grandes que la 3^e^.

De chacune des deux extremitez de l'une des données décrire un cercle de l'intervale de chacune des deux autres; où ces deux cercles se rencontreront, ce sera le point où il faudra tirer les deux costez du triangle.



SECOND PROBLEME.

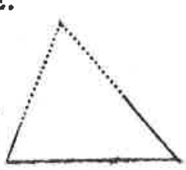
FAIRE le triangle dont on a un angle, & la grandeur des costez qui le comprennent. XIII.



Ayant mis ces deux costez en sorte qu'ils fassent l'angle donné, la ligne qui en joindra les extrémitez achevera le triangle.

TROISIEME PROBLEME.

FAIRE le triangle dont on a un costé, & les deux angles sur ce costé. XIV.



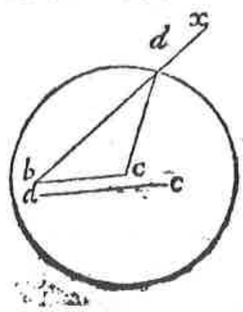
Tirant des lignes sur les extremitez du costé donné qui fassent les angles donnez, où elles se rencontreront elles acheveront le triangle.

QUATRIEME PROBLEME.

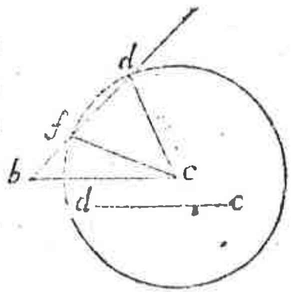
FAIRE le triangle dont on a un angle, un des costez qui le comprend, & la grandeur du costé qui le soûtient. XV.

Soit *b c* le costé donné comprenant l'angle donné, & *c d* la grandeur du costé qui doit soûtenir l'angle donné, tirant de *b* une ligne indefinie qui fasse sur *b c* l'angle donné, & décrivant un cercle de *c*, intervalle *c d*.

1. CAS. Ou ce cercle ne coupera l'indefinie qu'au point *d*. Ce qui arrivera toûjours quand le costé qui doit soûtenir l'angle donné est plus grand que celuy qui le comprend) & alors le triangle sera *b c d*.



2^e CAS. Ou le cercle coupera l'indefinie en deux points de la même part (comme en *f* & en *d*) & alors le triangle pourra eſtre *b c d*, ou *b c f.*



Et pour ſçavoir lequel des deux c'eſt preciſément, il faudroit avoir determiné ſi *b c* doit ſoûtenir un angle aigu, ou s'il doit ſoûtenir un angle obtus.

Car ſi *b c* doit ſoûtenir un angle aigu ; le triangle eſt *b c d* : & s'il doit ſoûtenir un angle obtus, le triangle eſt *b c f.*

TRIANGLES COMPAREZ.

PREMIER THEOREME.

XVI. DEUX triangles ſont tout-égaux, quand les coſtez de l'un ſont égaux aux coſtez de l'autre, chacun à chacun. Car alors les angles de l'un ſont auſſy égaux aux angles de l'autre, par VIII. 64.

SECOND THEOREME.

XVII. DEUX triangles ſont tout-égaux quand ils ont un angle égal, & que les coſtez qui comprennent dans l'un cet angle égal, ſont égaux à ceux qui le comprennent dans l'autre, chacun à chacun. Car alors la baſe eſt auſſy égale à la baſe, par VIII. 65.

TROISIEME THEOREME.

XVIII. DEUX triangles ſont tout-égaux quand ils ont un coſté égal, & que les angles ſur ce coſté égal ſont égaux chacun à chacun.

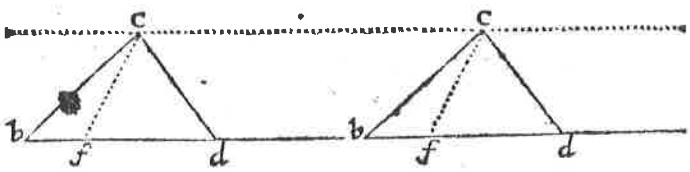
Car ces deux angles eſtant égaux chacun à chacun, le troiſiême qui eſt celuy que ſoûtient le coſté égal, ſera égal auſſy (§. 7.)

Si donc l'on s'imagine que ces deux triangles ſont chacun inſcrit dans un cercle, ces cercles ſeront égaux (par X. 26.) parceque le coſté égal ſoûtiendra dans chacun de ces cercles des arcs d'autant de degrez.

Donc les deux autres angles estant égaux chacun à chacun seront appuyez sur des arcs égaux, qui estant de cercles égaux seront soûtenus par des costez égaux chacun à chacun.

Donc les 3 costez de ces deux triangles sont égaux chacun à chacun aussy bien que les angles. Donc ils sont tout-égaux.

QUATRIEME THEOREME.



Si deux triangles ont ces trois choses égales. XIX.

Un angle, comme celuy dont le sommet est en *b*.

Un des costez qui comprennent cet angle, comme *b c*.

Et le costé qui le soûtient, comme *c d*, ou *c f*.

Il faut outre cela afin qu'ils soient tout-égaux, ou que l'angle que soûtient *b c*, ne soit obtus ny dans l'un ny dans l'autre, ou qu'il soit obtus dans tous les deux.

Car supposant qu'on eust mené par *c* une parallele à *b d*.

Ces deux triangles seroient enfermez entre deux espaces paralleles égaux (par VIII. 56.) parceque *b c* est égale & fait le même angle *c b d* dans l'un & dans l'autre.

Donc le costé *c d* ou *c f* estant égal par l'hypothese dans les deux triangles, s'il est oblique dans tous les deux vers le même endroit, il fait le même angle aigu dans l'un & dans l'autre, lorsque c'est vers le dedans du triangle qu'il est incliné, comme quand c'est *c d*, en l'un & en l'autre; ou le même angle obtus quand c'est vers le dehors, comme si c'est *c f* en l'un & en l'autre. VIII. 56.

Donc les deux triangles qui avoient déja deux costez égaux par l'hypothese se trouvant encore avoir deux angles égaux, & par consequent trois (7. $\tilde{\text{s}}$.) seront tout-gaux par le 2. Theoreme.

Mais si le costé que soûtient *b c* estoit diversement incliné dans ces deux triangles, parceque ce seroit *c d* dans l'un & *c f* dans l'autre, ces triangles n'auroient garde d'estre tout-égaux, puisque *c d* feroit dans l'un un angle aigu, & *c f* dans l'autre un angle obtus.

COROLLAIRE.

Dans l'hypothese du precedent Theoreme, lorsque des deux costez supposez égaux dans les deux triangles celuy qui soûtient l'angle supposé égal est plus grand que celuy qui le comprend, les deux triangles sont certainement tout-égaux.

Car alors dans l'un & dans l'autre angle *c d b* est necessairement aigu, par 8. $\tilde{\text{s}}$.

CINQUIEME THEOREME.

XX. DEUX triangles équiangles entr'eux sont semblables. C'estadire que les costez de l'un sont proportionnels aux costez de l'autre. C'est ce qui a esté prouvé en diverses manieres dans les deux livres des Proportionnelles. Voyez X. 18.

AVERTISSEMENT ET DEFINITION.

XXI. EN comparant deux triangles semblables, il faut toûjours comparer le plus grand costé de l'un au plus grand costé de l'autre, le moyen au moyen, & le plus petit au plus petit. Ainsy le plus grand costé estant appellé *b*. b.

Le moyen *d* d.

Et le plus petit *h*. h.

Dans deux triangles semblables.

b. b :: *d*. d :: *h*. h.

Et ces costez que l'on doit comparer ensemble s'appellent homologues.

PREMIER COROLLAIRE.

XXII. LES costez qui soûtiennent les angles égaux, sont homologues. Car dans l'un & dans l'autre le plus grand costé soûtient le plus grand angle ; le moyen costé le moyen angle ; le plus petit costé le plus petit angle. Cela se prouve encore par le X. livre 18.

SECOND COROLLAIRE.

DEUX triangles sont équiangles, si deux angles de l'un sont égaux aux deux angles de l'autre, chacun à chacun. Car il s'ensuit de là que le 3e est aussy égal au 3e. XXIII.

SIXIEME THEOREME.

LORSQUE deux triangles ont un angle égal, & les costez qui soûtiennent ces angles proportionnels, ils sont semblables. Car alors la base est aussy proportionnelle à la base, & les deux angles sur cette base égaux, par XI. 63. XXIV.

SEPTIEME THEOREME.

SI deux triangles sont de même hauteur, les paralleles à la base également distantes de la base dans l'une & dans l'autre sont entr'elles comme ces bases. XXV.

Cela est demonstré X. 20.

HUITIEME THEOREME.

DEUX polygones quelconques estant semblables peuvent estre partagez, chacun en autant de triangles, qui seront tels, que ceux d'une part sont semblables à ceux de l'autre part, chacun à chacun, & les costez homologues de deux de ces triangles semblables, sont en même raison que ceux de deux autres semblables. XXVI.

Soient deux exagones irreguliers semblables *BCDFGH*, & *bcdfgh*. Soient menées dans le grand des lignes de *B* à *D*, à *F*, à *G*. Et de même dans le petit.

L'une & l'autre exagone sera en 4 triangles.

Sçavoir $\begin{cases} BCD. & BDF. & BFG. & BGH. \\ bcd. & bdf. & bfg. & bgh. \end{cases}$

Qui sont semblables deux à deux *BCD*, à *bcd* &c.

Car les angles *C* & *c* sont égaux par l'hypotese que les exagones sont semblables, & les costez *CB* & *CD* proportionelles aux costez *cb* & *cd* par la même hypotese.

Donc les bases *BD* & *bd* sont aussy proportionelles aux costez, & les triangles semblables, par le 6e Theoreme.

B D F & *b d f* sont semblables aussy. Car les angles *C D F* & *c d f* estant égaux par l'hypotese, si on en oste les angles *B D C* & *b d c* qui sont égaux aussy (comme on le vient de voir) les angles *B D F* & *b d f* demeureront égaux.

Or les costez de ces angles *B D* & *D F* d'une part, & *b d* & *d f* de l'autre sont proportionels. Donc les bases *D F* & *d f* sont proportionelles aux costez, & les triangles *B D F* & *b d f* semblables. On prouvera la même chose & de la même maniere des autres triangles. Donc les triangles d'une part sont semblables à ceux de l'autre.

Il reste à prouver que les costez homologues de deux de ces triangles semblables sont en même raison que ceux de deux autres semblables, ce qui est aisé. Car prenant les points *B* & *b* pour sommet des quatre triangles d'une part & d'autre, ils auront chacun pour base un des costez de l'exagone. Les deux premiers *C D* & *c d*, les deux seconds *D F* & *d f* &c.

Or par l'hypotese *C D. c d* :: *D F. d f*.

Donc les bases des deux premiers triangles sont proportionelles aux bases des deux seconds. Et ainsy des autres.

AVERTISSEMENT.

XXVII. *On omet diverses choses qui pourroient estre dittes des triangles semblables, parcequ'il n'y a rien en tout cela qui ne se trouve facilement par ce qui a esté dit des angles considerez avec leurs bases dans les deux livres des Proportionnelles.*

DIVISION DU TRIANGLE EN SES ESPECES.

XXVIII. LE triangle se divise selon les costez & selon les angles.

Les costez sont	tous trois inégaux, & s'appelle		Scalene.
	Deux égaux,		Isoscele.
	Tous trois égaux,		Equilateral.
Les angles sont	Tous trois aigus,		Oxygone.
	Deux aigus & l'autre	obtus,	Amblygone.
		droit,	Rectangle.

Le scalene a ses trois angles inégaux.

L'Isoscele en a deux égaux.

L'equilateral

L'equilateral les a tous trois égaux.

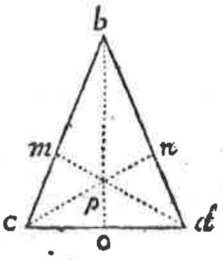
Le scalene / L'isoscele } peuvent estre { Oxygone. / Amblygone. / Rectangle.

L'equilateral ne sçauroit estre qu'oxygone.

DES TRIANGLES OXYGONES.

THEOREME.

Si de tous les angles d'un triangle oxygone on tire des perpendiculaires aux costez, elles se couperont en un même point au dedans du triangle. XXIX.



Soit le triangle *b c d*, & deux perpendiculaires aux costez *d m*, *c n*; je dis que *b o* menée par le point *p*, qui est celuy où *d m* & *c n* se coupent, sera aussy perpendiculaire.

Car les triangles *c b n* & *d b m* sont équiangles ayant chacun un angle droit & un angle commun; & par consequent les angles *b c n* & *b d m* sont égaux.

Et par consequent aussy les triangles *b d m* & *c p m* sont équiangles, ayant chacun un angle droit, & l'angle *m c p* (qui est le même que *b c n*) estant égal à l'angle *b d m*.

Donc *d m. m c :: m b. m p. & alternando d m. m b :: m c. m p.*

Donc les triangles *b m p* & *d m c* sont équiangles, par 24. *sup.* puisque dans le triangle *b m p* les costez *d m* & *m c*, qui comprennent un angle droit, sont proportionels à *m b* & *m p*, qui comprennent aussy un angle droit.

Donc l'angle *m b p* soûtenu par *m p*, est égal à l'angle *m d c* soûtenu par *m c*.

Or les angles *m p b* & *o p d* sont égaux, parcequ'ils sont opposez au sommet. Donc les triangles *m p b* & *o p d* sont équiangles.

Or l'angle *p m b* est droit par la construction.

Donc l'angle *o p d* est droit aussy. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Ces perpendiculaires coupant les angles d'un triangle, XXX.

font 12 triangles rectangles : 6 grands, qui ont pour hypothenuse l'un des costez du triangle total, & qui enferment tous quelque chose les uns des autres : & 6 petits entierement separez, & qui ont chacun pour hypothenuse la portion d'une perpendiculaire la plus proche de l'angle qu'elle coupe ; & ces 12 triangles rectangles sont 4 à 4 équiangles, deux grands & deux petits. C'est un exercice d'esprit de les trouver, & il vaut mieux le laisser à ceux qui commencent. Je diray seulement qu'entre les diverses proportions qui se font par tous ces triangles, il y en a de deux sortes fort considerables.

La premiere est, que le costé d'un angle & sa premiere portion sont reciproques à l'autre costé & sa premiere portion ; c'estadire que le grand costé est au petit comme la premiere portion du petit à la premiere portion du grand. Exemple dans l'angle *b*.

grand,	petit,	::	1. portion du grand,	1. portion du petit.
bd.	*bc.*	::	*bm.*	*bn.*

La seconde est, que les portions d'un costé du triangle total sont reciproques à la perpendiculaire entiere, & sa portion qui fait l'angle droit ; c'estadire qu'une portion du costé est à la perpendiculaire, comme la portion de la perpendiculaire qui fait l'angle droit, est à l'autre portion du costé. Exemple :

port. du costé.	perpend ::	port. de la perp.	port. du costé.
mc.	*md* ::	*mp.*	*mb.*

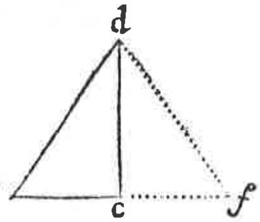
DES TRIANGLES RECTANGLES.

PREMIER THEOREME.

XXXI. SI l'un des angles aigus du triangle rectangle est double de l'autre (ce qui ne peut estre qu'il ne vaille les deux tiers d'un angle droit, & l'autre le tiers, c'estadire qu'il ne soit de 60 degrez & l'autre de 30) le petit costé qui soûtient l'angle de 30 degrez & qui en est le sinus, est la moitié de l'hypothenuse de l'angle droit, qui est aussy le raion de cet angle de 30 degrez.

Soit le triangle *bdc* conforme à l'hypotese.

Tirant *df* égale à *db* sur *bc* prolongée, l'angle *dfb* sera égal à l'angle *dbf*, & par consequent l'un & l'autre sera de 60 degrez. Donc l'angle *bdf* sera aussy de 60 degrez, puisque tous les trois ensemble valent deux droits, c'estadire 180 degrez.



Donc le triangle *bdf* est équilateral.

Donc $bc + cf = db$.

Or $bc = cf$, les deux triangles *dbc* & *dcf* estant tout-égaux, par 18. *sup.*

Donc *bc* est la moitié de *db*. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME.

TROUVER le triangle rectangle dont on a XXXII.

1. Ou les deux costez comprenans l'angle droit.
2. Ou l'hypothenuse, & un des costez.
3. Ou l'hypothenuse, & la perpendiculaire du sommet de l'angle droit à cette hypothenuse.
4. Ou l'hypothenuse, & la moyenne proportionelle entre l'hypothenuse donnée, & un des costez.
5. Ou un des costez & la moyenne proportionelle entre le costé donné & l'hypothenuse.
6. Ou l'un des costez, & la moyenne proportionelle entre ce costé donné & l'autre costé.

PREMIER CAS.

Mettant à l'angle droit les deux costez donnez, la ligne qui en joint les extrêmitez est l'hypotenuse.

SECOND CAS.

Décrivant la demycirconference dont l'hypotenuse donnée est le diametre, le point de cette circonference où se terminera le costé donné sera le point du sommet de l'angle droit; ce qui determinera l'autre costé non donné.

TROISIEME CAS.

Voyez IX. 34.

QUATRE, CINQ ET SIXIEME CAS.

Trois lignes estant continuellement proportionelles;

ayant la premiere & la ſeconde, qui eſt la moyenne, on a la 3ᵉ par le Probleme, X. 34. Et par conſequent le 4ᵉ & 5ᵉ Cas ſe rapportent au 2ᵉ, & le 6ᵉ au 1ᵉʳ.

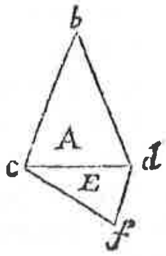
DES TRIANGLES ISOSCELES.

PREMIER THEOREME.

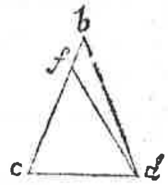
XXXIII. LORSQUE l'angle du ſommet d'un triangle Iſoſcele eſt de 36 degrez, chacun des angles ſur la baſe eſt de 72, & la baſe eſt la moyenne proportionelle entre le coſté entier, & le coſté moins cette baſe (c'eſtadire que la baſe diviſe le coſté en moyenne & extrême raiſon) & la baſe eſtant ajoûtée au coſté, il s'en fait une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon. Voyez XI. 68. 69. 73.

SECOND THEOREME.

XXXIV. DEUX triangles Iſoſceles eſtant ſemblables & inégaux, ſi la même ligne eſt la baſe de l'un & le coſté de l'autre, cette ligne ſera moyenne proportionelle entre le coſté de triangle dont elle eſt baſe, & la baſe de celuy dont elle eſt coſté.



Soit l'un des triangles Iſoſceles *bcd*, & l'autre *cfd*, de ſorte que *cd* ſoit la baſe de *bcd*, & le coſté de *cfd*; Je dis que *cd* ſera moyenne proportionelle entre *bc* coſté du premier triangle, & *fd* baſe du ſecond. Car ces triangles eſtant ſemblables, *bc* (coſté du 1ᵉʳ) eſt à *cd* (coſté du 2ᵉ) comme le même *cd*, entant que baſe du premier, eſt à *fd* baſe du ſecond.



Donc $\div$ *bc. cd. fd* Ce qu'il falloit demonſtrer.

SECONDE SECTION.

DES QUADRILATERES.

DEFINITIONS.

XXXV. LE quadrilatere eſt une figure de 4 coſtez qui ne ſe joignent qu'aux extrêmitez: & par conſequent de 4 angles qui tous enſemble valent quatre droits. XII. 5.

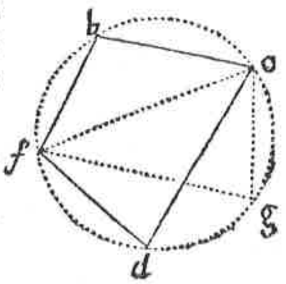
Les coſtez qui comprennent un même angle s'appellent coſtez angulaires.

Ceux qui ne comprennent point le même angle, costez opposez.

Les angles de même sont proches ou opposez.

THEOREME.

Tout quadrilatere qui a ses angles opposez égaux à deux droits, peut estre inscrit au cercle, & nul autre n'y peut estre inscrit. XXXVI.



Soit le quadrilatere *b c d f*, dont les angles *b* & *d* soient égaux à deux droits, & par consequent aussy les angles *f. c.*

Soit trouvé le cercle dont la circonference passe par les 3 points *f b c.* par VII. 3. Je dis qu'elle passera aussy par le 4^{e}, qui est *d*.

Car tout angle qui a *f c* pour base, & qui est inscrit dans ce cercle du costé de *d*, comme *f g c*, plus l'angle *b*, vaut deux droits. IX. 26. Or l'angle *f g c* est égal à l'angle *d*, qui plus l'angle *b* vaut aussy deux droits. Donc l'angle *d* est aussy inscrit dans ce cercle par IX. 30.

DIVISION ET DEFINITIONS.

Lorsque les costez opposez d'un quadrilatere sont paralleles, le 1er au 3^{e}, & le 2^{e} au 4^{e}, on l'appelle *Parallelogramme*, sinon on l'appelle *Trapeze*, quand même deux des costez opposez, comme le 1er & le 3^{e} seroient paralleles, si le 2^{e} & le 4^{e} ne le sont pas. XXXVII.

DES PARALLELOGRAMMES.

PREMIER THEOREME.

Si les costez opposez d'un quadrilatere sont égaux, ils sont paralleles; & s'ils sont paralleles, ils sont égaux. VI. 26. & 27. XXXVIII.

SECOND THEOREME.

Si tous les 4 angles d'un quadrilatere sont droits, il est parallelogramme. VI. 23. XXXIX.

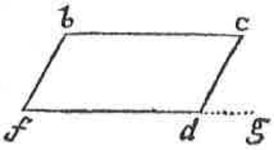
TOISIEME THEOREME.

Si deux costez opposez d'un quadrilatere sont égaux XL.

& paralleles, les deux autres sont aussy égaux & paralleles. VI. 28.

QUATRIEME THEOREME.

XLI. LES deux angles opposez d'un parallelogramme sont égaux, & les proches sont égaux à deux droits.



Soit le parallelogramme *b c d f*. Soit prolongé *f d* jusques à *g*, l'angle *c d g* est égal à l'angle *c*, par VIII. 53. & à l'angle *f*, par VIII. 54. Donc les aigus opposez *c* & *f* sont égaux.

Or les deux angles vers *d*, l'un exterieur & l'autre interieur, sont égaux à deux droits. Donc les angles interieurs vers *d* & vers *f* sont aussy égaux à deux droits.

Donc les deux autres vers *b* & vers *c* sont aussy égaux à deux droits, puisque les 4 valent 4 droits.

Ostant donc de part & d'autre les deux aigus *c* & *f* qui sont égaux, les obtus opposez *b* & *d* seront égaux.

PREMIER COROLLAIRE.

XLII. S'IL y a un angle droit dans un parallelogramme, tous les autres le sont aussy, & alors il est appellé *Rectangle*.

Car l'opposé est droit, puisqu'il est égal à celuy là; & les proches ne peuvent valoir deux droits, que l'un estant droit, l'autre ne le soit aussy.

SECOND COROLLAIRE.

XLIII. QUI connoist un angle d'un parallelogramme, les connoist tous. Car ce qui manque de la demycirconference à l'arc qui mesure l'angle donné, est la mesure de l'angle proche de celuy là, & les deux autres sont égaux chacun à l'un de ces deux là.

TROISIEME COROLLAIRE.

XLIV. DEUX parallelogrammes qui ont un angle égal, sont equiangles.

QUATRIEME COROLLAIRE.

XLV. SI deux costez angulaires d'un parallelogramme sont égaux, tous les 4 sont égaux entr'eux. Car chacun des angulaires est égal à son opposé.

CINQUIEME COROLLAIRE.

QUI connoiſt d'un parallelogramme deux coſtez angulaires & un angle, connoiſt tout le parallelogramme. XLVI.

Car qui connoiſt un angle, les connoiſt tous; & qui connoiſt deux coſtez angulaires connoiſt les deux autres, chacun eſtant égal à ſon coſté.

PROBLEME.

DECRIRE un parallelogramme dont on a un angle, & la grandeur de chacun des deux coſtez angulaires. XLVII.

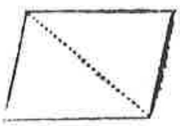
Les deux coſtez angulaires comprenant cet angle, de l'extremité du plus petit décrire un cercle de l'intervalle du plus grand, & de l'extremité du plus grand décrire un cercle de l'intervalle du plus petit: les lignes menées de ces extremitez au point où ces cercles ſe couperont, acheveront la deſcription de ce parallelogramme.

CINQUIEME THEOREME.

DEUX parallelogrammes ſont ſemblables quand ils ont un angle égal, & les coſtez angulaires proportionels. XLVIII.

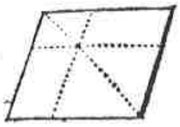
Car l'égalité d'un angle donne celle des autres; & deux coſtez angulaires ne ſçauroient eſtre proportionels, que les deux autres ne le ſoient auſſy.

DEFINITION.



LA ligne qui joint deux angles oppoſez s'appelle *Diagonale*, & elle diviſe le parallelogramme en deux triangles tout-egaux. Car les deux angles non diviſez ſont égaux, parcequ'ils ſont oppoſez; & les parties des diviſez ſont alternativement égales, par VIII. 53. XLIX.

SIXIEME THEOREME.



SI on tire des paralleles aux coſtez angulaires qui paſſent par le même point de la Diagonale, les parties de ces nouvelles lignes ſont proportionelles. L.

Demonſtré X. 16.

DEFINITION.

ON dit qu'un parallelogramme eſt décrit autour de la diagonale d'un autre parallelogramme, quand d'un point LI.

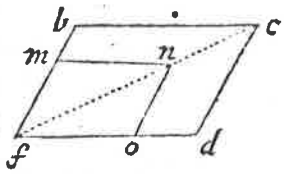
de cette diagonale on tire deux paralleles aux deux costez angulaires du parallelogramme, qui se terminant chacune à l'un de ces costez fassent un nouveau parallelogramme, dont une partie de cette diagonale est encore diagonale.

SEPTIEME THEOREME.

LII. TOUT parallelogramme décrit autour de la diagonale d'un autre, luy est semblable.

b c d f est semblable à *m n o f*. Car d'une part *f d c* & *f o n* sont égaux ; parceque *c d* & *n o* sont paralleles.

Et par la même raison *f c d*, & *f n o* sont égaux aussy.



Donc *fd. fo* :: *dc. on.*

Donc ces parallelogrammes sont equiangles, & ont les costez angulaires proportionels. Donc ils sont semblables par le 5e Theoreme.

DIVISION DU PARALLELOGRAMME EN SES ESPECES.

LIII.

Selon ses
- costez angulaires
  - égaux
    - Quarré
    - Rhombe
  - inégaux
    - Oblong
    - Rhomboïde
- angles
  - droits. rectangle
    - Quarré
    - Oblong
  - non droits
    - Rhombe
    - Rhomboïde

Quarré, Oblong : angles droits. Rhombe, Rhomboïde : angles non droits.

Quarré, Rhombe : costez tous égaux. Oblong, Rhomboïde : costez non tous égaux.

AUTREMENT.

Parallel.
- rectangle
  - tous les costez égaux. Quarré.
  - les seuls opposez égaux. Oblong.
- non rectangle
  - tous les costez égaux. Rhombe.
  - les seuls opposez égaux. Rhomboïde.

DU

DU PENTAGONE.

THEOREME.

LORSQUE deux lignes qui ſoutiennent chacune un angle d'un pentagone regulier ſe coupent, elles ſe coupent mutuellement en moyenne & extrême raiſon, & la plus grande partie de chacune de ces lignes eſt égale au coſté du pentagone. LIV.

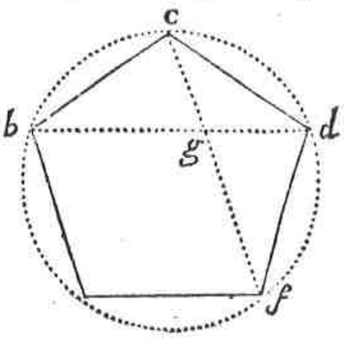
Soit le pentagone inſcrit dans un cercle.

Chaque coſté ſoutient un arc de 72 degrez. XII. 21.

Donc les angles inſcrits au même cercle qui ſont ſoutenus par un de ces arcs (tels que ſont *cbd*, *cdb*, *dcf*, *dfc*) ſont chacun de 36 degrez. IX. 18.

Et ceux qui ſont ſoutenus par deux de ces coſtez (comme l'angle *bcf*) ſont de 72. *ibid.*

Et les angles oppoſez au ſommet (*bgc* & *fgd*) ſont chacun auſſy de 72 degrez, par IX 40. Et par conſequent *bg* eſt égale à *bc* coſté du pentagone.



Donc l'angle *cbg* eſt tel par XI. 73. & 69 que la baſe eſtant jointe au coſté, il s'en fait une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon. Or *gd* eſt égale à la baſe *gc*. Donc la toute *bd* eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon. C'eſtadire que,

bd. bg :: bg. gd.

COROLLAIRE,

UN exagone & un decagone eſtant inſcrits dans le même cercle, le coſté de l'un ajoûté au coſté de l'autre fait une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon. LV.

Car l'angle compris entre deux demydiametres, qui a pour baſe le coſté du decagone, eſt un angle de 36 degrez (XII. 21. & 39.) Donc ajoûtant le coſté à la baſe, il s'en fait une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon. XI. 73. & 69. & *ſup.* 33.

Or le coſté de cet angle qui eſt le demydiametre, eſt auſſy le coſté de l'exagone inſcrit dans ce cercle là.

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUATORZIEME.

DES FIGURES PLANES CONSIDERE'ES SELON LEUR AIRE: C'ESTADIRE SELON LA GRANDEUR DES SURFACES QU'ELLES CONTIENNENT.

ET PREMIEREMENT DES RECTANGLES.

IDE'E GENERALE DE LA MESURE DES SURFACES.

1\. *La surface estant une étendüe de deux dimensions, longueur & largeur, il est necessaire pour en connoitre la grandeur, de sçavoir quelle en est la longueur, & quelle en est la largeur.*

La longueur se mesure par une ligne droitte qui donne la distance d'un point à un point. C'estpourquoy on ne peut connoitre la longueur des lignes courbes que par rapport à des lignes droittes.

La largeur consiste dans la distance entre deux lignes ; com-

me entre b *&* c, *qui se mesure aussy par une ligne droitte. C'estpourquoy les surfaces courbes ne se peuvent mesurer que par rapport à des surfaces planes.*

De plus toute ligne droitte n'est pas propre à mesurer la distance d'une ligne à une ligne. Car si elle tomboit du point d'une ligne obliquement sur l'autre, elle n'en mesureroit pas la distance ; mais tombant du point d'une ligne perpendiculairement sur l'autre, elle mesure la distance de ce point à cette ligne.

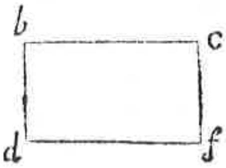
Mais il ne s'ensuit pas que pour avoir mesuré la distance d'un des points de la ligne b *à la ligne* c, *elle ait mesuré la distance de tous les autres points de la ligne* b, *à moins que tous les autres points de la ligne* b *fussent également distans de la ligne* c ; *c'estadire qu'elle luy fust parallele.*

D'où il s'ensuit que si b *n'estoit pas parallele à* c, *il faudroit autant de differentes mesures pour connoître la distance de* b *à* c, *qu'il y auroit de differens points dans* b. *Ce qui estant impossible, il paroist par là qu'afin qu'on puisse avoir distinctement la distance d'une ligne à une autre, ce qui fait la largeur, il faut que ces lignes soient paralleles.*

De plus, si ces lignes sont inégales, & que b *soit plus grande que* c, *on ne sçauroit laquelle prendre pour la longueur, parceque cette surface seroit plus longue d'un costé que de l'autre. Et ainsy afin qu'on puisse avoir exactement la mesure d'une surface, il faut que les lignes dont la distance en fait la largeur, soient non seulement paralleles ; mais aussy égales. D'où il arrivera que les autres lignes seront aussy égales & paralleles entr'elles.*

Et par consequent afin qu'une surface soit en estat d'estre exactement mesurée, il faut qu'elle soit terminée par 4 lignes paralleles ; c'estadire que ce soit un parallelogramme.

Mais si les deux lignes égales & paralleles qu'on prend pour mesure de la longueur ne sont pas directement opposées, en sorte que de tous les points de l'une on puisse tirer des perpendiculaires sur tous les points de l'autre ; c'estadire si ce parallelogramme n'est pas rectangle, mais obliquangle, on aura bien alors dans la figure dequoy en mesurer la longueur, sçavoir lequel *on voudra de deux costez opposez. Mais l'autre costé angulaire estant oblique sur cette longueur, ne sera pas propre à mesurer la distance entre les deux lignes qui font la longueur. D'où il s'ensuit qu'il n'y a que le rectangle qui ait en soy la mesure de sa longueur & de sa largeur.*



Car si df *est pris pour la longueur,* db *qui est la mesure de la distance de tous les points de* bc *à* df, *en mesurera la largeur.*

C'estpourquoy nulle surface ne se mesure proprement par soy même, que le rectangle. Et dans tout rectangle l'un des costez angulaires à choisir, se peut appeller sa longueur, *& l'autre* sa largeur; *ou pour s'accommoder davantage aux termes communs, l'un* sa base, *& l'autre* sa hauteur.

Mais comme la mesure est d'autant plus parfaite qu'elle est plus simple, & que le quarré *qui n'a qu'une même mesure pour sa longueur & pour sa largeur, est plus simple que l'oblong qui en a deux; il est arrivé de là que les hommes prennent le quarré de quelque ligne connüe, comme d'une toise, d'un pied, d'un pouce &c. pour la mesure commune de toutes les surfaces; & qu'alors seulement ils en croient connoitre parfaitement la grandeur, quand ils peuvent dire qu'elle est de tant de toises quarrées, ou de tant de pieds quarrez, ou de tant de pouces quarrez &c. Et ainsy ce qu'on entend ordinairement par ces mots; avoir l'aire d'un plan, c'est sçavoir combien ce plan, de quelque figure qu'il soit, contient ou de toises quarrées, ou de pieds quarrez, ou de pouces quarrez; & quand on parle de surface on sousentend le mot de quarré sans l'exprimer: comme quand on dit que la place d'un logis est de tant de toises, cela s'entend de toises quarrées, dont chacune vaut 36 pieds quarrez.*

Neanmoins comme cela ne se peut pas toujours connoitre à cause des grandeurs incommensurables, on se contente souvent en comparant des surfaces ensemble, de sçavoir que si l'une contient tant de petits rectangles, comme 16 fois bc, *l'autre en contient tant aussy; comme 25 fois le même* bc.

Tout cela nous fait voir, 1°. Que la premiere & la plus *parfaitte mesure est le quarré, & que c'est par le quarré qu'on mesure les rectangles pour en connoître exactement la grandeur.*

2°. Que la plus parfaitte apres le quarré, & qui est même parfaitte en son genre, parcequ'elle contient en soy la mesure de la longueur & de la largeur, est le rectangle oblong; & que c'est par là que l'on mesure les autres parallelogrammes.

3°. Que celle d'aprés, & qui est imparfaitte, ne contenant pas en soy la mesure de la longueur & de la largeur, est le parallelogramme non rectangle: & que c'est d'ordinaire par ces parallelogrammes que l'on mesure les triangles, en ce qu'on les considere comme les moitiez de ces parallelogrammes.

4°. Que le triangle suit aprés, & que c'est par luy qu'on mesure d'ordinaire les autres polygones en les reduisant en triangles; comme ils s'y peuvent tous reduire.

5°. Qu'enfin les autres polygones sont mesurez & ne servent point de mesure, comme le quarré sert de mesure & n'est point mesuré si ce n'est par d'autres plus petits; comme quand on dit que la toise quarrée contient 36 pieds quarrez. Voilà en abregé tout ce qu'a pû faire l'art des hommes pour mesurer les surfaces rectilignes, sans parler des curvilignes qui ne se peuvent mesurer que par rapport à des rectilignes.

Mais comme toutes nos connoissances qui dependent de l'art en supposent de naturelles qu'on appelle Axiomes, voicy ceux sur lesquels est fondée toute la science de la dimension des figures planes.

PREMIER AXIOME.

Tous les quarrez de racine égale, sont égaux. C'est-adire que les espaces compris dans le quarré de la ligne *b*, & dans celuy de la ligne *m* égale à *b*, & de quelque autre ligne que ce soit égale à *b*, sont égaux. Cela est clair par la notion même de la surface, qui n'ayant que deux dimensions, longueur & largeur, il n'est pas plus clair que deux lignes droittes d'une même longueur sont égales, qu'il est clair que deux surfaces de même longueur & de même largeur sont égales. Or deux quarrez sont de même longueur & de même largeur, si la ligne qui mesure dans l'un II.

tant la longueur que la largeur, est égale à celle qui mesure dans l'autre tant la longueur que la largeur.

C'estpourquoy aussy par tout où une ligne d'une certaine longueur se trouve, comme de la longueur de *b*, elle peut estre marquée par le même caractere & appellée *b*. Car il ne peut y avoir de difference que de situation; ce qui n'y fait rien. Et ainsy il ne faut pas s'étonner si *bb* est par tout égal à *bb*.

SECOND AXIOME.

III. SI les costez angulaires d'un rectangle sont égaux aux costez angulaires d'autres rectangles, chacun à chacun, tous ces rectangles sont égaux. Ou ce qui est la même chose, tous ceux dont la base est égale à la base, & la hauteur à la hauteur, sont égaux.

C'est la même chose que le precedent. Car les costez angulaires d'un rectangle en mesurent la longueur & la largeur; & on peut même, comme nous avons dit, en appeller l'un sa longueur, & l'autre sa largeur. Et par consequent tous les rectangles dont les costez angulaires sont égaux, chacun à chacun, ont même longueur & même largeur.

On peut encore dire que les costez angulaires d'un rectangle pouvant estre marquez par les mêmes caracteres par tout où ils se rencontrent égaux, comme par *b* & par *c*, par tout où l'un est égal à *b* & l'autre à *c*, dire qu'ils sont égaux; c'est dire que *b c* est égal à *b c*.

AVERTISSEMENT.

IV. *Ces deux axiomes nous font voir que tout ce que nous avons dit dans le premier livre de la multiplication des grandeurs incomplexes & complexes; & dans le 3^e de la raison entre les grandeurs planes, se peut appliquer aux quarrez & aux rectangles; & qu'il n'y a qu'à substituer des lignes au lieu des simples caracteres.*

C'est ce que nous verrons en peu de mots en commençant par la puissance des lignes.

DEFINITION.

V. ON appelle puissance d'une ligne le quarré de cette ligne, comme *bb* est la puissance de *b*, ou bien le rectangle de deux lignes quand il s'agit de deux lignes, comme la puissance de *b* par *c* est le rectangle *bc*.

DE LA PUISSANCE D'UNE LIGNE COMPAREE AVEC LA PUISSANCE DE SES PARTIES.

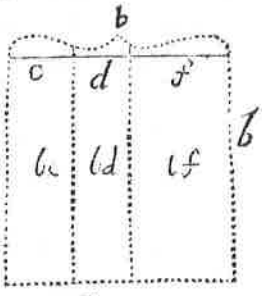
TOUT ce qu'on enseigne de la puissance d'une ligne VI.
comparée avec la puissance de ses parties, n'est que la même chose que ce que nous avons dit dans le premier livre de la multiplication des grandeurs complexes; & se peut reduire à cet Axiome.

TROISIEME AXIOME.

C'EST la même chose de multiplier le tout par le tout, VII.
& de multiplier le tout par chacune de ses parties, ou de multiplier chaque partie par toutes les parties, en faisant autant de multiplications partiales qu'est le produit des deux nombres des parties qu'on multiplie les unes par les autres.

AVERTISSEMENT.

Ainsy le plus grand mystere pour ne se point broüiller est VIII.
de nommer chaque ligne autant que l'on peut par un seul caractere, afin que deux caracteres joints ensemble puissent marquer une multiplication; c'estadire un rectangle, & de marquer par un même caractere les lignes égales.



Exemple: La ligne b *soit divisée en trois portions inégales que j'appelleray* c. d. f. *il est visible que c'est la même chose de multiplier* b *par* b, *ce qui donne* b b, *que de multiplier* b *par toutes ces parties; c'estadire par* c, *par* d, *&* *par* f, *ce qui donne* b c. b d. b f: *& par consequent* $bb = bc + bd + bf$.

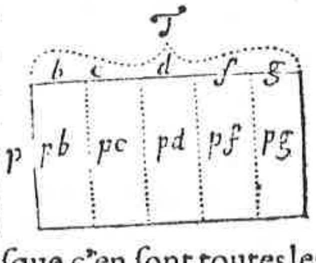
Ainsy presque toutes les propositions du second livre d'Euclide ne sont que des Corollaires de cet Axiome & de cet Avertissement. Je ne proposeray que les principales & qui sont d'usage.

Je suppose toujours qu'on mette à angles droits les lignes *qui doivent faire les costez angulaires des rectangles, sans que je m'amuse plus à en avertir.*

Et quand je parle d'une ligne coupée en plusieurs parties, j'entens toujours égales ou inégales, à moins que j'exprime qu'on les doive prendre égales.

PREMIER THEOREME.

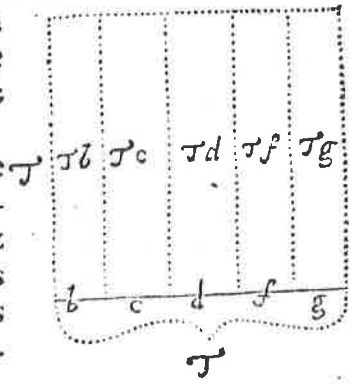
IX. Ayant deux lignes, l'une non coupée; & l'autre coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle des deux entieres est égal à tous les rectangles de la non coupée par chaque partie de la coupée. C'estadire qu'un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.



Soit *p* la non coupée, & *T* la coupée en 5 parties *b*, *c*, *d*, *f*, *g*; il est bien visible qu'en tirant des lignes paralleles à *p*, & par consequent qui luy sont égales par tous les points de division de *T*, elles feront *pb*, *pc*, *pd*, *pf*, *pg*, qui pris ensemble sont égaux à *pT*, puisque c'en sont toutes les parties.

SECOND THEOREME.

X. UNE ligne estant coupée en plusieurs parties, le quarré de la toute est égal aux rectangles de chaque partie sur la toute.



C'est la même chose que le precedent, excepté que la même ligne faisant les deux costez du rectangle total qui est alors quarré, on la prend une fois pour la non coupée, & une autre fois pour la coupée.

Il est donc clair que *T* estant coupé en *b*, *c*, *d*, *f*, *g*.

TT doit estre égal à *Tb*. *Tc*. *Td*. *Tf*. *Tg*.

TROISIEME THEOREME.

XI. UNE ligne estant coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle de quelque partie que ce soit par la toute,

toute, eſt égal au quarré de cette partie plus les rectangles de cette partie par chacune des autres.

Soit *T* comme auparavant diviſé en 5 parties *b. c. d. f. g.* il eſt clair par le premier Theoreme, que le rectangle de *b* par la toute eſt égal aux 5 rectangles de *b* par chaque partie de *T*. Or *b* eſt l'une de ces parties, & par conſequent l'un de ces 5 rectangles ſera *b b*. C'eſtadire le quarré de cette partie, & les autres 4 rectangles ſeront le rectangle de *b* par chacune des autres parties; ſçavoir *b c. b d. b f. bg.*

QUATRIEME THEOREME.

UNE ligne eſtant diviſée en tant de parties que l'on voudra, le quarré de la toute eſt égal aux quarrez de chaque partie plus deux fois autant de rectangles, dont il y en a toujours deux qui ſont les rectangles des mêmes deux parties. XII.

Ce Theoreme n'eſt que l'aſſemblage du 2e & du 3e.

Soit *T* comme auparavant diviſée en *b, c, d, f, g*, par le 1er Theoreme ayant fait le quarré *TT*, & n'ayant diviſé qu'un ſeul de ces coſtez par *b, c, d, f, g*, & tiré les paralleles à l'autre coſté, on a 5 bandes, dont on peut appeller chacune du nom de ſa partie; ſçavoir *T b*, *T c*, *T d*, *T f*, *T g*. Mais diviſant encore l'autre coſté par les mêmes *b, c, d, f, g*, on diviſe chacune des 5 bandes en 5, ce qui fait 25, & dans chaque bande ainſy diviſée ſe trouve un quarré de la partie dont elle eſt bande (dans *T b*, *b b*, dans *T c*, *c c*) & quatre rectangles des autres parties par celle là. Et il eſt aiſé de voir que dans chaque bande ſe trouve toujours un rectangle de deux parties, dont le rectangle ſe trouve encore dans un autre, comme dans *T b* ſe trouve *b c*, qui ſe trouve auſſy dans *T c*, & ainſy tout le quarré contient

5 quarrez *b b. c c. d d. f f. g g.*
20 rectangles 2. *b c.* 2. *b d.* 2. *b f.* 2. *b g.*
2. *c d.* 2. *c f.* 2. *c g.*
2. *d f.* 2. *d g.*
2. *f g.*

COROLLAIRE.

LE plus grand uſage de ces Theoremes eſt quand la li- XIII.

gne eſt coupée en deux. C'eſtpourquoy il faut bien retenir ces trois propoſitions.

1. Le quarré de la toute eſt égal aux deux rectangles de chaque partie par la toute.

2. Le rectangle d'une partie par la toute eſt égal au quarré de cette partie, plus le rectangle des deux parties.

3. Le quarré de la toute eſt égal aux 2 quarrez de chaque partie plus deux fois le rectangle des deux parties.

DE LA PROPORTION ENTRE LES RECTANGLES.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

XIV. LES rectangles qui ont un coſté égal à un coſté, & l'autre inégal, ſont entr'eux comme l'inégal.

Ou) les rectangles de même hauteur ſont comme leurs baſes.

D'égale baſe ſont comme leurs hauteurs.

Ou) d'égale longueur ſont comme leurs largeurs.

D'égale largeur ſont comme leurs longueurs.

Tout cela n'eſt que la même choſe, & peut paſſer pour prouvé dans le 2e Livre.

Neanmoins en voicy encore la preuve. La theſe eſt

$bc.\ bd :: c.\ d.$

L'aliquote quelconque de c ſoit appellée x.

Si par tous les points de la diviſion on tire des paralleles à b, il eſt clair que bx ſera autant de fois dans bc, qu'x dans c. C'eſtadire que bx & x ſeront toujours les aliquotes pareilles, l'une de bc, & l'autre de c. Car il eſt bien clair que toutes les x eſtant égales, tous les bx ſeront égaux.

Que ſi on applique x à d, baſe du rectangle bd, & qu'on tire auſſy par tous les points de la diviſion des paralleles à b, il eſt clair que bx ſera autant de fois dans bd, qu'x dans d, & que ſi x eſt preciſément tant de fois dans d, bx ſera auſſy preciſément tant de fois dans bd. Et ſi x n'eſt pas preciſément tant de fois dans d, mais avec quelque reste; bx de même ne sera pas precisément tant de fois dans $\cdot d$, mais avec un rectangle de reste plus petit que bx.

Donc les aliquotes pareilles de bc & de c sont également contenües, celles de bc dans bd, & celles de c dans d.

Donc par la definition de l'égalité des raisons bc & bd sont en même raison que c & d; puisque les aliquotes pareilles des antecedens bc & c sont également contenus dans les consequens bd & d. Donc $bc.\ bd :: c.\ d.$

PREMIER COROLLAIRE.

LES rectangles sont en raison composée de la longueur à la longueur, & de la largeur à la largeur. C'est la definition même de la raison composée. III. 2. 4. XV.

$bc.\ mn :: b.\ m + c.\ n.$

SECOND COROLLAIRE.

LES rectangles semblables sont en raison doublée de leurs costez homologues. XVI.

Car les rectangles sont semblables, quand la longueur est à la longueur, comme la largeur à la largeur.

bf & cg sont semblables, si $b.\ c :: f.\ g.$

Donc la raison de ces deux rectangles est composée de deux raisons égales, par le premier Corollaire.

Donc cette raison est doublée de chacune, par la definition de la raison doublée.

TROISIEME COROLLAIRE.

LES quarrez sont en raison doublée de leurs racines. XVII.

C'est la même chose que le precedent.

Et ainsy si b est double de d, bb est quadruple de dd.

QUATRIEME COROLLAIRE.

LES rectangles reciproques sont égaux. Car on appelle les rectangles reciproques quand la longueur du premier est à la longueur du second, comme la largeur du second est à la largeur du premier. XVIII.

Ainsy bg & cf sont reciproques, si

$b.\ c :: f.\ g.$

Or la grandeur plane des deux extremes d'une proportion est égale à la grandeur plane des moyens.

Donc $bg = cf$.

MESMES COROLLAIRES
AUTREMENT PROPOSEZ.

XIX. SI 4 lignes ſont proportionelles,

b. c :: f. g.

1. Le rectangle des antecedens *bf*, eſt au rectangle des conſequens *cg*, en raiſon doublée de la raiſon de cette proportion *b. c.* ou *f. g.*

2. Le rectangle des deux premiers termes *bc* eſt au rectangle des deux derniers *fg* en raiſon doublée de la raiſon alterne de cette proportion *b. f.* ou *c. g.*

3. Le rectangle des deux extrêmes eſt égal au rectangle des deux moyens, *bg* = *cf.* II. 27.

4. Les quarrez de ces quatre lignes ſont proportionels *bb. cc :: ff. gg.* par III. 24.

5. Si trois lignes ſont continuellement proportionelles, le quarré de celle du milieu eſt égal au rectangle des extremes.

Si ÷ *b. c. d. cc* = *bd.* II. 27.

6. Les quarrez des deux premiers *bb* & *cc* ſont en même raiſon que la premiere & la troiſiême.

bb. cc :: b. d. par III. 26.

CINQUIEME COROLLAIRE.

XX. UNE ligne eſtant diviſée en deux parties, ſi deux autres lignes ſont moyennes proportionelles, l'une entre la toute & ſa plus grande partie, & l'autre entre la même toute & ſa plus petite partie : les deux quarrez de ces deux lignes ſont égaux au quarré de cette toute.

Soit *h* diviſée en *m* & *n*.
Soit *b* moyenne entre *h* & *n*.
Et *d* entre *h* & *n*.
Puiſque ÷ *h. b. m. bb* = *hm.*
Et puiſque ÷ *h. d. n* = *dd. hn.*
Donc *bb* + *dd* = *hm* + *hn.*
Or *hm.* + *hn.* = *hh.*
Donc *bb* + *dd* = *hh.*

AVERTISSEMENT.

On peut rapporter icy tout ce qui a esté demonstré dans le 2 & 3e livre des grandeurs planes en general. Car le rectangle est la grandeur plane en matiere d'estendüe ou espace. XXI.

APPLICATION
DE CETTE DOCTRINE GENERALE A QUELQUES LIGNES PARTICULIERES QU'ON A FAIT VOIR CY DEVANT ESTRE PROPORTIONELLES.

PREMIER THEOREME.

Si deux lignes se coupent dans un cercle, le rectangle des portions de l'une est égal au rectangle des portions de l'autre. Voyez XI. 55. XXII.

SECOND THEOREME.

Le quarré de la perpendiculaire d'un point de la circonference au diametre, est égal au rectangle des portions du diametre. Voyez XI. 57. XXIII.

TROISIEME THEOREME.

Si d'un point hors le cercle deux lignes sont menées jusqu'à la concavité du cercle, le rectangle d'une toute & de sa portion qui est hors le cercle, est égal au rectangle de l'autre toute & de sa portion, qui est aussy hors le cercle. Voyez XI. 52. XXIV.

QUATRIEME THEOREME.

Si d'un point hors le cercle on mene une ligne qui touche le cercle, & l'autre qui le coupe jusqu'à la concavité, le quarré de la tangente est égal au rectangle de l'autre toute, & de sa portion qui est hors le cercle. XI. 54. XXV.

Et si on appelle la tangente p, la secante entiere t, la partie qui est hors le cercle h, & celle qui est au dedans d, on aura toutes ces égalitez par ce qui a esté dit cy devant.

$pp = ht.$

$pp = hh. + hd.$

$hh = pp. - hd.$

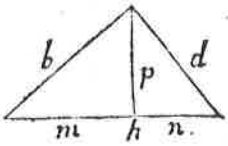
$tt = ht. + dt.$

$tt = pp. + dt.$

CINQUIEME THEOREME.

XXVI. SI du sommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypothenuse,

1. Le quarré de cette perpendiculaire est égal au rectangle des deux portions de l'hypothenuse. $pp = mn$.



2. Le quarré du grand costé de l'angle droit est égal au rectangle de l'hypothenuse entiere & de sa grande portion, $bb = hm$.

3. Le quarré du petit costé est égal au rectangle de l'hypothenuse entiere, & de sa petite portion, $dd = hn$.

4. Le quarré de toute l'hypothenuse est égal aux quarrez des deux costez $bb + dd. = hh$.

Les 3 premiers points sont clairs, par XI. 58.

Et le 4e par le 5e Corollaire 5.

PREMIER COROLLAIRE.

XXVII. LA diagonale d'un rectangle peut autant que les quarrez des deux costez.

SECOND COROLLAIRE.

XXVIII. LA diagonale d'un quarré peut 2 fois le quarré du costé.

TROISIEME COROLLAIRE.

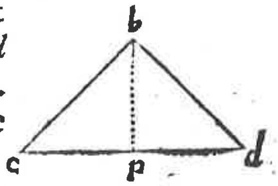
XXIX. LA diagonale du quarré est incommensurable en longueur au costé, & commensurable en puissance. XI. 76.

QUATRIIME COROLLAIRE.

XXX. LA hauteur d'un triangle equilateral (c'estadire la perpendiculaire du sommet à la base) est incommensurable en longueur au costé, & commensurable en puissance, le quarré du costé estant au quarré de cette perpendiculaire : comme 4 à 3.

La premiere partie est claire, par XI. 79.

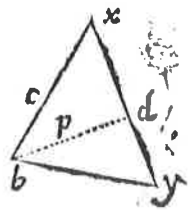
La seconde se prouve ainsy : pd est la moitié de bd. Donc le quarré de bd est au quarré de pd, comme 4 à un. Or ce même quarré de bd vaut le quarré de pd, plus celuy de bp.



Donc le quarré de bd est à celuy de bp comme 4 à 3.

SIXIEME THEOREME.

LE quarré de la baſe d'un angle aigu eſt égal aux quarrez des coſtez qui le comprennent moins deux fois le rectangle du coſté ſur lequel on mene une perpendiculaire de l'extremité oppoſée de la baſe & de la ligne compriſe entre le ſommet de cet angle aigu & de cette perpendiculaire. XXXI.



Soit la baſe de l'angle aigu nommé *b.*

Le coſté vers lequel on ne mene point la perpendiculaire, *c.*

Celuy ſur lequel on la mene, *d.*

La perpendiculaire, *p.*

La ligne compriſe entre la perpendiculaire & le ſommet de l'angle aigu. *x.*

Celle qui eſt compriſe entre la perpendiculaire & la baſe, *y.*

Je dis que $bb = cc. + dd. - 2. dx.$

Mais il faut remarquer qu'x eſt quelquefois $d - y.$

Quelquefois d ſimplement.

Et quelquefois $d. + y.$

Selon que d fait ſur la baſe, ou un angle aigu, ou un droit, ou un obtus.

Mais quand d fait un angle droit ſur b, il eſt plus court de dire que bb baſe de l'angle aigu, eſt égal à $cc.$ moins $dd.$ comme il eſt clair par le precedent Theoreme. Et ainſy reſte ſeulement les deux autres cas.

PREMIER CAS.

QUAND d fait ſur la baſe un angle aigu, la perpendiculaire coupe d en deux parties.

Et ainſy $d = x + y.$ & $x = d - y.$

Et alors le Theoreme ſe prouve ainſy.

Par le precedent Theoreme $bb. = pp + yy.$

Et $cc = pp + xx.$

Et $dd = yy + xx + 2. yx.$

Donc bb eſt moindre que $cc + dd.$ de $2. xx$, & $2. yx.$

Or x estant égale, $d - y$. $xx = dx - xy$.

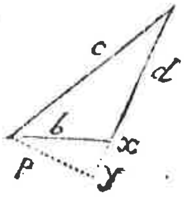
Donc $xx + xy = dx$.

Donc $2.xx + 2xy = 2.dx$.

Donc $bb. = cc. + dd. - 2.dx$. Ce qu'il falloit demonstrer.

SECOND CAS.

SI d fait un angle obtus sur b, alors p ne tombe sur d qu'estant prolongé, & y est une ligne ajoûtée à d. & x. est égale à $d. + y$. Ce qui fait qu'on prouve ainsy que $bb = cc + dd - 2.dx$.



$pp = cc - xx$. c'estadire $- dd - yy - 2.dy$.

Or $bb = pp. + yy$.

Donc $bb = cc - dd - dy$.

Et par consequent $bb = cc + dd - 2.dd. - 2.dy$.

Or $x = d. + y$. Donc $dd + dy = dx$.

Donc $2.dd + 2.dy = 2.dx$.

Donc $bb = cc + dd - 2.dx$. Ce qu'il falloit demonstrer.

De tout cecy il est aisé de conclure que si des deux extremitez de la base d'un angle aigu, on tire des perpendiculaires à chaque costé, le rectangle d'un costé & de la ligne comprise entre le sommet de l'angle aigu; & la perpendiculaire qui tombe sur ce costé sera toujours égale au rectangle de l'autre costé & de la ligne comprise entre le sommet de l'angle aigu & la perpendiculaire qui tombe sur cet autre costé.

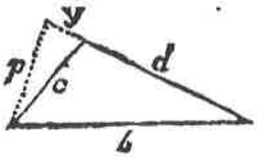
SEPTIEME THEOREME.

XXXII. LE quarré de la base de l'angle obtus est égal aux quarrez des costez, plus le rectangle du costé vers lequel on aura mené une perpendiculaire de l'extremité de cette base & de la ligne comprise entre cette perpendiculaire & le sommet de l'angle obtus.

Il est clair que cette perpendiculaire ne peut tomber sur aucun costé qu'en le prolongeant.

Soit donc la base b.

Le costé non prolongé $c.$
L'ajoûtée $y.$
La perpendiculaire $p.$



bb est égal au quarré de p, plus le quarré de $d + y$. C'estadire que

$bb = pp + yy + dd. + 2.dy.$

Or $cc = pp. + yy.$

Donc $bb = cc + dd + 2.dy.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

AVERTISSEMENT.

On peut faire icy un Corollaire semblable à celuy du Theoreme precedent. Je le laisse à chercher, & à prouver si l'on veut par les principes du livre des lignes proportionelles. XXXIII.

HUITIEME THEOREME.

LE quarré de la base d'un angle obtus, qui vaut les deux tiers de deux angles droits; c'estadire qui est de 120 degrez, est égal aux quarrez des deux costez plus le rectangle de ces deux mêmes costez. XXXIV.

Toutes choses estant faittes, & les lignes nommées comme dans le precedent Theoreme, l'angle obtus ne peut valoir 120 degrez, que l'angle que fait c sur l'ajoûtée y (qui est le complement de cet angle obtus) ne soit de 60 degrez. Or le triangle que font $c\,y\,p$ est rectangle. Donc y est le sinus d'un angle de 30 degrez. Donc par XIII. y est la moitié de c, qui en est le raion.

Donc $dc = 2.dy.$

Or par le precedent Theoreme,

$bb = cc. + dd + 2.dy.$

Donc $bb = cc + dd + dc.$ égal à $2\,dy.$

NEUVIEME THEOREME.

LE quarré de la base d'un angle aigu de 60 degrez est égal aux quarrez des costez moins le rectangle des costez. XXXV.

Car par le 6^e Theoreme b estant la base d'un angle aigu,

$bb = cc + dd - 2.dx.$

Or x en tous les cas (c'estadire soit qu'x soit ou $d - y$, ou d simplement, ou $d + y$.) il est toujours le sinus d'un

Pp

angle de 30 degrez dont c est le raion, quand l'angle que soutient b est de 60 degrez.

Donc x est toujours la moitié de c, par XIII.....

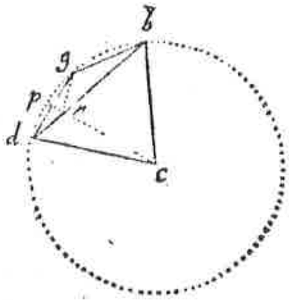
Donc $dc = 2.dx$.

Donc $bb. = cc. + dd. \left\{ \begin{array}{l} -\ 2.dx. \\ \text{ou} \\ -\ dc. \end{array} \right.$

DIXIEME THEOREME.

XXXVI. Le quarré du costé du pentagone est égal au costé du decagone, plus le quarré du costé de l'exagone inscrits dans le même cercle.

Soit bd le costé du pentagone.



cb & cd deux demidiametres du cercle dans lequel il est inscrit, qui sont aussy les costez de l'exagone, par XII. 36.

dg & gb deux costez du decagone.

cp une ligne qui coupe perpendiculairement & par la moitié, tant le costé du decagone dg, que l'arc dg qui coupe en r le costé du pentagone.

Cela estant, je prouve 1°. Que bc (costé de l'exagone) est moyenne entre bd costé du pentagone, & sa partie br.

Car les deux angles vers b & vers d sont chacun de 54 degrez, XII. 23.

Or l'angle rcb est aussy de 54 degrez, puisque l'arc gb est de 36 degrez, XII. & l'arc gp de 18, ce qui ensemble fait 54.

Donc les deux triangles bcd, & brc sont isosceles & semblables.

Donc par (34 5.) bc est moyenne entre bd & br. C'est-adire entre le costé du pentagone & sa plus grande partie.

Je prouve 2°. Que dg costé du decagone, est moyenne entre bd costé du pentagone, & dr sa plus petite partie.

Car rp coupant gd perpendiculairement & par la moitié, rg est égale à rd. Donc les angles que chacun fait sur gd sont égaux.

Donc les deux triangles dgb & drg sont isoscceles & semblables. Donc par (34. §.) dg (base du petit & costé du grand) est moyenne entre bd (base du grand) & rd (costé du petit.)

Donc le costé du decagone est moyenne entre le costé du decagone & sa plus petite partie.

Donc par le 5^e Corollaire (20 §.) le quarré du pentagone est égal au quarré du costé de l'exagone, plus le quarré du costé du decagone inscrit dans le même cercle. Ce qu'il falloit demonstrer.

ONZIEME THEOREME.

SI une ligne est divisée en moyenne & extrême raison, la ligne composée de la moitié de cette ligne & de sa plus grande partie, peut 5 fois le quarré de la moitié. XXXVII.

Soit la ligne d divisée en b, & c en moyenne & extrême raison, en sorte que $bb = dd - db$, & par consequent $bb + db. = dd$.

Appellant m la moitié de d, je dis que le quarré de $m + b$ vaut 5 fois le quarré d'm.

Car m estant la moitié de d, $dd = 4.mm$. Et $2mb. = bd$.

Et ainsy le quarré de $m + b$.

Estant égal à $mm + bb + 2.mb$.

Donc à $mm + bb + db$.

Donc à $mm + dd$.

Donc à $mm + 4.mm$.

Donc à $5.mm$.

DOUZIEME THEOREME.

UNE ligne estant divisée en moyenne & extrême raison, la ligne composée de la petite portion & de la moitié de la plus grande, peut 5 fois le quarré de la moitié de la plus grande. XXXVIII.

Soit comme auparavant la toute d, la plus grande partie b, & sa moitié n, la plus petite c; en sorte que $dc = bb$.

Or $dc = cc + cb$. Donc $cc + cb = bb$.

Cela estant, je dis que le quarré de $n. + c. = 5.nn$.

Car ce quarré de $n + c$.

Est égal à $nn + cc. + 2.nc$. Donc a $nn + cc. + bc$. Puisque n est $\frac{1}{2}$ de b.

Donc a $nn + bb.$ (puisque $bb = cc. + bc$)

Donc a $nn + 4.\ nn.$ Donc a $5.\ nn.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

TREIZIEME THEOREME.

XXXIX. UNE ligne estant divisée en moyenne & extrême raison, le quarré de la toute, plus le quarré de la plus petite partie, valent 3 fois le quarré de la plus grande.

Soit comme auparavant $d = b. + c.$ & b moyenne entre d & c, en sorte que $bb = dc.$ Et par consequent à $cc + cb.$ Je dis que $dd + cc. = 3.\ bb.$

Car $dd = bb + cc + 2.\ cb.$

Donc $dd + cc. = bb. + 2.\ cc + 2.\ cb.$

Or $2.\ cc + 2.\ cb = 2.\ bb.$ puisque $cc + cb = bb.$

Donc $dd + cc. = 3.\ bb.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

PREMIER PROBLEME.

XL. TROUVER le quarré égal à un rectangle donné.

Ou ayant l'aire d'un quarré, en trouver la racine.

Il ne faut que trouver la moyenne proportionelle entre les costez du rectangle donné.

Ou entre les deux lignes qui font l'aire donnée; comme si l'aire est supposée de 20 toises, ou pieds, ou pouces, entre un & 20, ou 2 & 10, ou 4 & 5.

SECOND PROBLEME.

XLI. AYANT le costé d'un rectangle, trouver quel doit estre l'autre, afin qu'il soit égal à un rectangle donné. Prendre le costé donné pour premier terme de la proportion, les deux costez du rectangle donné pour 2 & 3, le costé que l'on cherche se trouvera en trouvant une 4e proportionelle.

TROISIEME PROBLEME.

TROUVER un quarré égal à deux ou plusieurs quarrez donnez.

Soient les quarrez donnez bb, cc, dd, mettant b & c à angle droit, le quarré de l'hypothenuse de cet angle droit que je nomme f, sera égal à $bb + cc.$ Et mettant de nouveau f & d à angle droit, le quarré de l'hypothenuse de cet angle sera égal à $ff. + dd.$ Et par consequent à $bb + cc.$

$+ dd$. Et on peut conduire cela jusqu'à l'infini.

COROLLAIRE.

TROUVER le quarré égal à plusieurs rectangles donnez, il ne faut que trouver les quarrez égaux à chacun de ces rectangles. Et puis on trouvera le quarré égal à tous ces quarrez. XLII.

QUATRIEME PROBLEME.

TROUVER un quarré à qui un quarré donné soit en raison donnée. XLIII.

Soit le quarré donné bb.

La raison donnée $m.n$.

Ayant disposé $m. n. b.$ & trouvé pour 4ᵉ proportionelle d, en sorte que

$m. n :: b. d.$

Et trouvant aussy la moyenne proportionelle entre b & d, que je suppose estre c, le quarré de c satisfera au Probleme. Car puisque $\div b.c.d.$ par le....

$bb. cc :: b. d.$

Or $b. d :: m. n.$

Donc $bb. cc :: m. n.$

CINQUIEME PROBLEME.

DIVISER une ligne, en sorte que le quarré de la plus grande portion soit égal au rectangle de la toute & de la plus petite portion. XLIV.

Ce Probleme a esté resolu (XI. 68.) quand on a appris à couper une ligne en moyenne & extrême raison : c'est-à-dire, en sorte que la toute soit à la plus grande portion, comme la plus grande portion à la plus petite.

SIXIEME PROBLEME.

DIVISER une ligne en sorte que le quarré de la plus grande portion soit au rectangle de la toute & de la plus petite portion en raison donnée. XLV.

Soit la ligne donnée d.

La raison donnée $m.n$.

Il faut trouver une ligne qui soit à d comme m à n. Ce qui se fera en transposant mn ($n.m.$) & mettant d pour 3 proportionelle. Car la 4ᵉ qu'on trouvera que j'appelle c, ſera à d, comme m à n.

$n.\ m :: d.\ c.$ *Permutando* $c.\ d :: m.\ n.$

Cela eſtant fait, prendre la moyenne proportionelle entre c & d, que j'appelle p.

Et faire un cercle de l'intervalle de la moitié de c, dont p ſoit tangente.

Puis tirer une ſecante du point de p qui eſt hors le cercle juſqu'à la concavité du cercle en paſſant par le centre. La partie de cette ſecante qui eſt dans le cercle eſtant le diametre d'un cercle qui a la moitié de c pour raion, ſera égale à c, & celle qui eſt dehors le cercle que j'appelle x ſatisfera à la queſtion.

C'eſtadire que prenant x dans d,

$$xx.\ dd - xd :: \begin{cases} m. & n. \\ c. & d. \end{cases}$$

Car par la ſolution du Probleme precedent, l. XI. 68.

$xx = pp - xc.$

Et $pp = dc.$ parceque $\div d.\ p.\ c.$

Donc $xx = dc - xc.$

Or $dc - xc.\ dd - xd :: c.\ d.$

Parceque le ſolide de la multiplication des extrêmes,

$dcd - xcd.$

Eſt égal au ſolide de la multiplication des moyens,

$dcd - xcd.$

$$\text{Donc } xx.\ dd - xd :: \begin{cases} m. & n. \\ c. & d. \end{cases}$$

SEPTIEME PROBLEME.

XLVI. TROUVER la racine d'un quarré dont on ne ſçait autre choſe, ſinon qu'eſtant comparé au quarré d'une ligne donnée, & à un rectangle d'une autre ligne donnée & de cette racine inconnüe, il eſt

Ou { 1. Egal au quarré plus le rectangle.
2. Egal au quarré moins le rectangle.
3. Egal au rectangle moins le quarré. }

Ainſy la racine inconnüe eſtant nommée x ou y.

La ligne donnée qui fait le quarré, b.

Et l'autre ligne donnée coſté du rectangle, d.

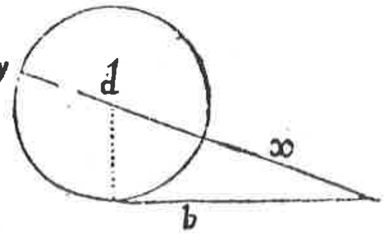
Le 1er Cas sera $yy = bb + yd$.

Le 2e Cas, $xx = bb - xd$.

Et le 3e, $\begin{cases} yy = yd - bb. \\ xx = xd - bb. \end{cases}$

CONSTRUCTION COMMUNE
AU PREMIER ET AU SECOND CAS.

DECRIRE un cercle de l'intervale de la moitié de d, élevée perpendiculairement sur l'une des extremitez de b.



Et tirer de l'autre extremité de b une secante qui passant par le centre du cercle se termine à la circonference.

Cette secante entiere soit appellée y.

Qui sera composée de sa partie hors le cercle appellée x.

Et du diametre du cercle qui sera d par la construction.

Et b sera tangente du cercle.

PREUVE DU PREMIER CAS.

Dans le 1er Cas, c'est y (c'estadire la secante entiere) qui est la racine que l'on cherche.

Car y estant égale à $x + d$.

$yy = yx + yd$. $\tilde{5}.13$.

Or $bb = xy$. $\tilde{5}.25$.

Donc $yy = bb + yd$. Ce qu'il falloit demonstrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

Dans le 2e Cas, c'est x (c'estadire la partie de la secante qui est hors le cercle) qui est la racine que l'on cherche.

Car $x.\ b :: b\ x + d$.

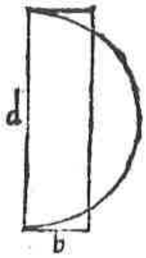
Donc $xx + xd = bb$.

Donc $xx = bb - xd$. Ce qu'il falloit demonstrer.

CONSTRUCTION ET PREUVE DU TROISIEME CAS.

Faisant un cercle qui ait d pour diametre, & b pour tangente, il faut tirer une parallele à d de l'extremité de b qui est hors le cercle.

Que ſi cette parallele ne coupe point le cercle, parceque b eſt auſſy grande ou plus grande que la moitié de d, le Probleme eſt impoſſible.



Mais ſi elle le coupe tirant une tangente parallele à b de l'autre extremité de d, & prolongeant juſqu'à cette tangente la ſecante parallele à d, cette ſecante (égale à d) ſera compoſée de trois parties; de deux hors le cercle, qui eſtant égales (comme il eſt aiſé de le prouver en tirant du centre une perpendiculaire à cette ſecante) chacun s'appellera x, & celle de dedans le cercle plus une du dehors, c'eſtadire plus x, s'appellera y.

Cela eſtant ſuppoſé, je dis qu'x & y peuvent l'une & l'autre ſatisfaire au Probleme.

Car $xy = bb$, par le 4e Theoreme, & d eſtant égale à $x + y$.

$$\left.\begin{array}{l} xx + xy = xd. \\ \text{Et } yy + xy = yd. \end{array}\right\} \text{par 13. } \tilde{s}.$$

Donc $xx = xd - xy$ égal à bb.

Et $yy = yd - xy$ égal à bb.

Donc ſoit qu'on prenne x ou y, on ſatisfait au Probleme. Et le choix depend de ſçavoir d'ailleurs ſi la racine que l'on cherche doit eſtre plus petite que b. Car alors c'eſt x, au lieu que ſi elle doit eſtre plus grande, c'eſt y.

NOUVEAUX

NOVVEAVX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUINZIEME.

DE LA MESURE DE L'AIRE DES PARALLELOGRAMMES, DES TRIANGLES, ET AUTRES POLYGONES.

DEFINITIONS.

QUAND on parle des costez d'un parallelogramme, on entend les costez angulaires, amoins qu'on ne marque autre chose. I.

On peut prendre lequel on veut de ces costez pour mesure de la longueur du parallelogramme; & alors ce costé s'appelle la base.

Et la perpendiculaire qui mesure la distance entre la base & son costé opposé s'appelle la hauteur du parallelogramme.

FONDEMENT DE LA MESURE DES PARALLELOGRAMMES.

PAR ce que nous avons dit au commencement du livre precedent, que dans les parallelogrammes non rectangles (à qui pour abreger nous donnerons simplement le nom II.

de parallelogrammes) on pouvoit prendre lequel on vouloit de leurs costez angulaires pour mesure de l'une de leurs dimensions, qui est la longueur ; mais que l'autre costé angulaire ne pouvoit pas en mesurer la largeur, parcequ'estant oblique il ne mesuroit pas la distance entre les costez opposez qui avoient esté pris pour la longueur. Et ainsy au lieu de cet autre costé angulaire, il faut prendre la perpendiculaire qui mesure la distance entre le premier costé & son opposé, pour avoir l'autre dimension de ces parallelogrammes.

Or delà il s'ensuit que le rectangle de la base & de cette perpendiculaire appellée la hauteur du parallelogramme est égal à ce parallelogramme, puisque n'ayant tous deux que deux dimensions, longueur & largeur, la longueur de l'un est égale à la longueur de l'autre, en ce qu'ils ont tous deux une base égale, & que la largeur de l'un est égale à la largeur de l'autre, puisqu'elle est mesurée par une per- par l'un
pendiculaire égale dans l'une & dans l'autre ; quoiqu'~~elle~~
elle soit ~~en~~ l'un des costez de la figure, sçavoir dans le rectangle, & que dans l'autre elle n'y soit pas marquée.

Cela pourroit suffire pour ceux qui cherchent plûtost à s'assurer de la verité qu'à en pouvoir convaincre les autres.

Neanmoins pour plus grande certitude on peut employer deux voies pour prouver cette proposition : l'une nouvelle appellée la *Geometrie des indivisibles* : & l'autre ancienne & plus commune. Nous expliquerons l'une & l'autre.

NOUVELLE METHODE APPELLÉE LA GEOMETRIE DES INDIVISIBLES.

III. QUOIQUE les Geometres conviennent que la ligne n'est pas composée de points, ny la surface de lignes, ny le solide de surfaces, neanmoins on a trouvé depuis peu de temps un art de démonstrer une infinité de choses, en considerant les surfaces comme si elles estoient composées de lignes, & les solides de surfaces.

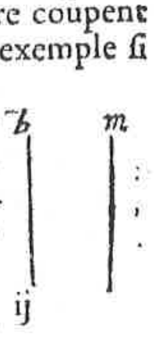
Je n'ay rien veu de ce qui en a eſté écrit : mais voicy ce qui m'en eſt venu dans l'eſprit, en ne m'arreſtant maintenant qu'à ce qui regarde les ſurfaces.

Le fondement de cette nouvelle Geometrie eſt de prendre pour l'aire d'une ſurface la ſomme des lignes qui la rempliſſent ; de ſorte que deux ſurfaces ſont eſtimées égales, quand l'une & l'autre eſt remplie par une ſomme égale de lignes égales ; ſoit que chacune de celles d'une ſomme ſoit égale à chacune de celles de l'autre ſomme ; ſoit qu'il ſe faſſe une compenſation ; en ſorte par exemple, que deux d'une ſomme qui pourront eſtre inegales entr'elles, ſoient égales à deux priſes enſemble de l'autre ſomme qui ſeront égales entr'elles.

Mais pour ne pas donner lieu à beaucoup de paralogiſmes où l'on tombe aiſément en ſe ſervant de cette methode, ſi on n'y prend bien garde, il faut remarquer,

1. Qu'afin que des lignes ſoient cenſées remplir un eſpace, il faut qu'elles ſoient toutes paralleles entr'elles ; ſoit qu'elles ſoient droittes pour remplir un eſpace rectiligne, ſoit qu'elles ſoient circulaires pour remplir des cercles ou des portions de cercle. Il eſt facile d'en voir la raiſon. Et ainſy il faut bien prendre garde de ne pas employer pour cela des lignes qui ne ſeroient pas paralleles en l'une ou l'autre de ces deux manieres.

2. Afin qu'une ſomme de lignes ſoit cenſée égale à une autre ſomme de lignes, il ne faut pas s'imaginer qu'on puiſſe dire le nombre qu'en contient chaque eſpace (car il n'y a point de ſi petit eſpace qui n'en contienne un nombre infini) mais ce qui fait qu'on appelle ces ſommes égales, c'eſt que toutes les lignes d'un coſté & d'autre coupent perpendiculairement deux lignes égales. Par exemple ſi la ligne *b* eſt égale à la ligne *m*, le nombre infini des lignes qui peuvent couper perpendiculairement *b* en tous ſes points, eſt cenſé égal au nombre infini de celles qui peuvent auſſy couper perpendiculairement *m*, eſtant viſible qu'il n'y a point de raiſon pourquoy on en puiſ-



se faire passer davantage par l'une que par l'autre. Car les aliquotes pareilles de l'une & de l'autre estant toûjours égales jusques à l'infini, on pourra toujours de part & d'autre tirer par tous les points de ces divisions autant de lignes paralleles entr'elles, & qui contiendront toujours de part & d'autre un espace parallele égal. Et c'est proprement delà que depend la verité de cette nouvelle methode (& non que le continu soit composé d'indivisibles) ce qui l'a fait même appeller par quelques uns, la Geometrie de l'infini.

Il faut donc bien prendre garde que les lignes (par le rapport desquelles on dit qu'une somme de ces lignes paralleles qui remplissent un espace, est égale à une autre somme) les coupent perpendiculairement. Et c'est où il y a plus de danger de se tromper. Sur ces fondemens voicy les Theoremes que l'on établit.

PREMIER THEOREME.

IV. **Tous les parallelogrammes de base égale & de même hauteur sont égaux entr'eux.**

Soient divers parallelogrammes, comme *A*, *E*, *I*, enfermez dans le même espace parallele (comme ils le peuvent estre, puisqu'ils sont supposez de même hauteur) & ayant tous les bases égales, il est clair que toutes les paralleles qui peuvent remplir cet espace, rempliront tous ces parallelogrammes; & qu'ainsy ils seront tous remplis d'une somme égale de lignes, cette somme estant mesurée dans tous par la perpendiculaire qui mesure la hauteur de ces rectangles, qui est la même en tous, puisqu'ils sont de même hauteur?

De plus, toutes ces lignes estant paralleles à la base dans tous ces rectangles, sont égales en tous, puisqu'elles sont en tous égales à la base, & que les bases sont supposées égales.

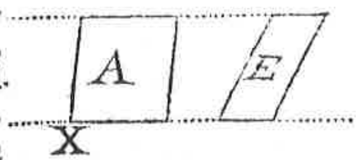
Donc il y a par tout somme égale de lignes égales.

Donc ils sont tous égaux selon le fondement de la Geometrie des indivisibles.

SECOND THEOREME.

Tous les parallelogrammes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. V.

C'est une suitte du precedent. Soient les parallelogrammes *A*, *E* entre mêmes paralleles, & qui ayent des bases inégales; en quelques aliquotes que je divise la



base d'*A*, en tirant les paralleles au costé par tous les points de la division, il y aura dans *A* autant de parallelogrammes égaux entr'eux, que cette base aura de parties égales : de sorte que si elle avoit esté divisée en 7 parties, dont j'appelleray chacune *x*, il y aura dans *A* 7 parallelogrammes qui auront chacun *x* pour base.

Que si appliquant *x* à la base d'*E*, il se trouve qu'il y soit trois fois, ou sans reste, ou avec reste, tirant encore de tous les points de la division des lignes paralleles au costé d'*E*, il est visible qu'il y aura dans *E* autant de parallelogrammes qui auront *x* pour base, qu'*x* se sera trouvé dans la base d'*E*. Et si ç'a esté sans reste, ces trois parallelogrammes rempliront *E* sans reste : & si avec reste, il restera aussy un parallelogramme qui aura ce reste pour base.

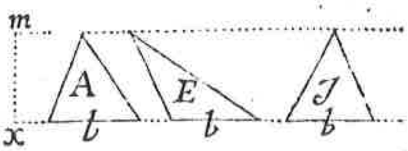
Or les parallelogrammes qui dans *E* ont *x* pour base sont égaux à ceux qui dans *A* ont aussy *x* pour base; par le precedent Theoreme.

Donc par la definition de l'égalité des raisons *A* est à *E* en même raison que la base d'*A* à la base d'*E*, puisqu'autant que les aliquotes quelconques de la base d'*A* sont contenues dans la base d'*E*, les aliquotes pareilles d'*A* sont contenues dans *E* : si sans reste, sans reste; si avec reste, avec reste.

TROISIEME THEOREME.

LES triangles de même hauteur & de même base sont égaux. Car estant mis entre les mêmes paralleles, comme devant, & ayant tous *b* pour base, toutes les lignes paral- VI.

leles qui rempliront cet eſpace, rempliront ces triangles, & chacune de ces lignes tirées tout le long de l'eſpace d'un point quel-



conque de la perpendiculaire *m n*, ce qui ſera enfermé dans chaque triangle ſera toûjours égal, comme il a eſté prouvé dans le livre XIII. & X. 20. quoique toujours de plus petit en plus petit montant vers le ſommet.

Donc une ſomme égale de lignes égales chacune à chacune de chaque triangle, remplit tous ces triangles.

Donc ces triangles ſont égaux.

QUATRIEME THEOREME.

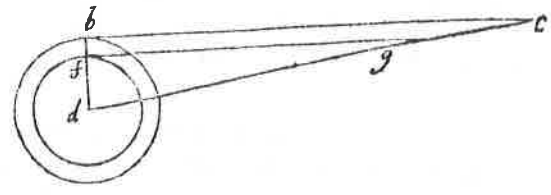
VII. LES triangles de même hauteur ſont entr'eux comme les baſes.

C'eſt la même choſe que le 2^e^ Theoreme, & qui ſe prouve de la même ſorte, excepté qu'on employe icy au lieu de parallelogrammes des triangles qui ont pour baſe, & qui aboutiſſent de part & d'autre au ſommet de chaque triangle dont ils ſont parties. Or ces triangles qui ont *x* pour baſe dans l'un & dans l'autre triangle, ſont auſſy de même hauteur dans l'un & dans l'autre; & par conſequent ils ſont égaux. Enſuite dequoy il ne faut appliquer que ce que nous avons dit pour la demonſtration du 2^e^ Theoreme.

CINQUIEME THEOREME.

VIII. LE cercle eſt égal au triangle rectangle, qui a pour coſtez de ſon angle droit le raion du cercle, & une ligne égale à la circonference du cercle.

Soit le cercle *d*, le raion *d b*, la tangente *b c*, égale à la circonference & l'hypothenuſe *d c*.



Si on tire de tous les points du raion des circonferences concentriques au cercle, elles rempliront tout le cercle, &

elles seront paralleles entr'elles, en la maniere que les circonferences le peuvent estre, & coupées perpendiculairement par le raion.

Si on tire aussy de tous ces mêmes points du raion par lesquels auront passé ces circonferences des paralleles à *b c*, jusques en *d c*, ces paralleles rempliront le triangle. Et ainsy la somme de ces circonferences & de ces paralleles sera égale, estant determinée de part & d'autre par les points du même raion, estant clair que l'on ne sçauroit tirer une circonference par aucun point, qu'on ne tire aussy une parallele à *d c* par ce même point; & au contraire.

Or la circonference & la parallele tirées du même point sont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra: par exemple celle du point *b*. Car

$$bd.\ df :: \begin{cases} \text{circonf. } b. & \text{circonf. } f. \\ bc. & fg. \end{cases}$$

Donc circonf. *b*. circonf. *f* :: *b c*. *f g*.

Donc *alternando* circonf. *b*. *b c* :: circonf. *f*. *f g*.

Or par l'hypothese la circonference *b*, qui est celle du cercle, est égale au costé du triangle *b c*.

Donc la circonference passant par le point *f*, est égale à *f g*, parallele à *b c*.

AVERTISSEMENT.

Je n'en diray pas davantage de cette nouvelle methode. Il est aisé de juger que ces 5 Theoremes sont de suffisans fondemens pour mesurer sans peine toutes les figures rectilignes, & en trouver les égalitez & les rapports, sur tout en y joignant les principes qui ont esté établis dans les 3 premiers livres. IX.

METHODE COMMUNE.

LEMME OU AXIOME.

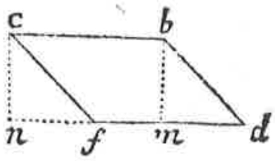
DEUX triangles tout-égaux sont égaux. C'estadire que lorsque les angles d'un triangle sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun, & les costez égaux aussy chacun à chacun, ces deux triangles comprennent un espace égal; en quoy consiste ce qu'on appelle égalité dans les figures. X.

Cela est clair de soy même, estant visible que deux triangles de cette sorte ne different que de position.

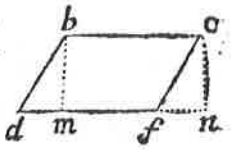
PROPOSITION FONDAMENTALE DE LA MESURE DES PARALLELOGRAMMES, ET DES TRIANGLES.

XI. TOUT parallelogramme eſt égal au rectangle de ſa hauteur & de ſa baſe.

Soit le parallelogramme *b c d f*, tirant ſes perpendiculaires *b m* & *c n* ſur la baſe *d f*, prolongée autant qu'il eſt neceſſaire, je dis que le rectangle *b c m n*, qui eſt le rectangle de la baſe & de la hauteur de *b c d f*, eſt égal à *b c d f*.



Car *b c* eſtant égale tant à *d f* qu'à *m n*, *d f* eſt égale à *m n*. Donc oſtant *m f*, commune de l'une & de l'autre, *d m* demeurera égale à *f n*. Et ainſy *b d* eſtant égale à *c f*, & *b m* à *c n*, les triangles *b d m* & *c f n* ſont égaux par le Lemme precedent. Et ainſy ajoûtant à l'un & à l'autre le trapeze commun *b m c f*, *b c d f* ſera égal à *b m c n*. Ce qu'il falloit demonſtrer.



PREMIER COROLLAIRE.

XII. LES parallelogrammes de même hauteur & de baſe égale ſont égaux.

Car ils ont tous pour leur meſure commune le même rectangle de cette hauteur & de cette baſe.

SECOND COROLLAIRE.

XIII. LES parallelogrammes de même hauteur ſont comme leurs baſes ; de baſe égale, ſont comme leurs hauteurs.

Car chacun eſt égal au rectangle de ſa baſe & de ſa hauteur. Or les rectangles de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes. Il en faut donc dire de même des parallelogrammes qui leur ſont égaux.

On peut auſſy prouver ce 2e Corollaire par le premier de la même façon qu'on a déja fait en demonſtrant le 2e Theoreme de la premiere methode.

TROISIEME COROLLAIRE.

XIV. LA raiſon de deux parallelogrammes quelconques eſt toûjours toujours composée de la raison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base.

Car les parallelogrammes sont toujours entr'eux comme les rectangles de leur hauteur & de leur base.

QUATRIEME COROLLAIRE GENERAL.

TOUT ce qui a esté dit de la raison des rectangles par la comparaison de leurs costez angulaires, est vray des parallelogrammes, en comparant la hauteur à la hauteur, & la base à la base. Cela est clair par la raison du precedent Corollaire. XV.

DES PARALLELOGRAMMES EQUIANGLES.

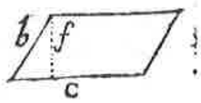
THEOREME GENERAL.

LES parallelogrammes equiangles sont entr'eux en raison composée de leurs costez angulaires, de même que s'ils estoient rectangles. XVI.

Car tous les parallelogrammes sont entr'eux en raison composée de celle de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

Or quand ils sont equiangles, la raison des costez obliques sur la base de chacun est la même que celle de la hauteur à la hauteur. Parceque les lignes également inclinées sont en même raison que leurs perpendiculaires, qui est ce qui mesure cette hauteur. X. 11.

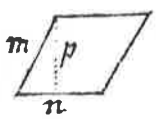
Exemple. Soient bc & mn deux parallelogrammes equiangles, dont les hauteurs soient f & p.



Par les precedens Corollaires,

$bc.\ mn :: c.\ n. + f.\ p.$

Or $f.\ p :: b.\ m.$ par X. 11.



Donc $bc.\ mn :: c.\ n + b.\ m.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE GENERAL.

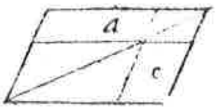
TOUT ce qui a esté dit de la raison des rectangles entr'eux par la comparaison de leurs costez angulaires, est vray aussy des autres parallelogrammes equiangles par la même comparaison de leurs costez angulaires. XVII.

C'estadire par exemple, que s'ils sont semblables, le grand costé du premier estant au grand costé du second, comme le petit costé du premier au petit costé du second, ils sont en raison doublée de leurs costez homologues.

Si leurs costez sont reciproques (c'estadire, si le grand costé du premier est au grand costé du second, comme le petit costé du second est au petit costé du premier) ils sont egaux. Et ainsy de tout le reste.

COROLLAIRE PARTICULIER.

XVIII. LORSQUE deux lignes paralleles chacune aux costez angulaires d'un parallelogramme se coupent en un même point de la diagonale, il se fait 4 parallelogrammes, dont les deux qui ne sont point coupez par la diagonale, comme *A* & *E*, sont egaux.



Car ils sont equiangles, puisqu'il y a un angle de l'un qui est opposé au sommet à un angle de l'autre.

Et il est visible par XIII. 21. que le grand costé d'*a* est au grand costé d'*e*, comme le petit costé d'*e* est au petit costé d'*a*.

Je sçay bien que cela se prouve ordinairement d'une autre maniere plus palpable, qui est que la diagonale partage par la moitié tant le parallelogramme total, que chacun de ceux qui sont autour de cette diagonale. Donc la moitié du total dans laquelle est *a* estant égale à la moitié dans laquelle est *e*, & ostant de chacune de ces deux moitiez deux triangles egaux, les deux parallelogrammes qui demeureront seront egaux.

DES PARALLELOGRAMMES SEMBLABLES.

PREMIER THEOREME.

XIX. DEUX parallelogrammes semblables (c'estadire qui estant equiangles ont leurs costez proportionels) sont en raison doublée de leurs costez homologues, comme il vient d'estre dit §. 17.

SECOND THEOREME.

XX. LES costez homologues de deux parallelogrammes semblables, estant en même raison que les costez homologues de deux autres parallelogrammes semblables entr'eux, ces 4 parallelogrammes sont proportionels.

Soient les deux premiers semblables *A* & *E*, & les deux derniers *I* & *O*; si la raison d'entre les costez d'*A* & *E* est *x.y*, & de même entre les costez d'*I* & *O*, je dis que

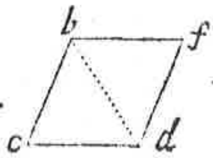
A. E :: I. O.

Car $\left\{\begin{matrix} A. & E \\ I. & O \end{matrix}\right\}$ :: *xx. yy.*

DES TRIANGLES.

LEMME.

Tout triangle est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur. XXI.



Soit le triangle *bcd*. Si de *b* on tire *bf*, égale & parallele à la base *cd*, & que du point *f* on tire *fd*; je dis 1. que *b. c. d. f.* est un parallelogramme. Car *cd* & *bf* sont paralleles & égales par la constru-ction; & par consequent *bc* & *fd* sont aussy paralleles & égales, par VI. 28.

Et par consequent *bd*, qui est la diagonale de ce parallelogramme, le divise en deux triangles egaux *bcd* & *bfd*. Donc *bcd* est la moitié de ce parallelogramme.

Or il est visible que ce triangle & ce parallelogramme sont de même hauteur, puisqu'ils sont enfermez entre les mêmes paralleles *bf* & *cd*, & qu'ils ont la même base, sçavoir *cd*.

Donc tout triangle est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur.

THEOREME GENERAL.

Tout triangle est egal au rectangle de la moitié de sa base, & de toute sa hauteur; ou de la moitié de sa hauteur & de toute sa base. XXII.

Car il est la moitié d'un parallelogramme de sa base & de sa hauteur. Or ce parallelogramme est egal au rectangle de sa base & de sa hauteur.

Donc prenant la moitié de la base & toute la hauteur, ou la moitié de la hauteur & toute la baſe, on a un rectangle qui vaut la moitié du rectangle de toute la baſe & de toute la hauteur. Donc on a un rectangle égal au triangle.

PREMIER COROLLAIRE.

XXIII. LES triangles de même hauteur & de baſe égale, ſont égaux.

Car ils ſont tous égaux au même rectangle, qui eſt celuy de la moitié de leur baſe & de toute leur hauteur.

SECOND COROLLAIRE.

XXIV. LES triangles de même hauteur ſont comme leurs baſes, & d'égale baſe comme leurs hauteurs.

Car ils ſont tous égaux à des rectangles, qui eſtant de même hauteur ſont comme leurs baſes, & d'égale baſe comme leurs hauteurs.

On peut auſſy prouver ce ſecond Corollaire par le premier, de la même façon qu'on a demonſtré le 4e Theoreme de la premiere methode.

TROISIEME COROLLAIRE.

XXV. LA raiſon de deux triangles quelconques eſt toujours compoſée de la raiſon de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe. Car ces triangles ſont toujours entr'eux comme les rectangles de la moitié de leur baſe & de toute leur hauteur, qui ont entr'eux cette raiſon compoſée.

QUATRIEME COROLLAIRE GENERAL.

XXVI. TOUT ce qui a eſté dit de la raiſon des rectangles par la comparaiſon de leurs coſtez, eſt vray des triangles par la comparaiſon de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe.

DES TRIANGLES EQUIANGLES OU SEMBLABLES.

PREMIER THEOREME.

XXVII. Tous les triangles equiangles, & par conſequent ſemblables, ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs coſtez homologues.

Car par les Corollaires precedens les triangles ſont entr'eux en raiſon compoſée de la raiſon de la baſe à la baſe, & de la hauteur à la hauteur.

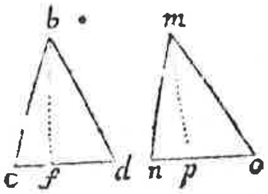
Or quand ils ſont equiangles, les coſtez ſur la baſe de part & d'autre ſont chacun à chacun en même raiſon que les perpendiculaires du ſommet à la baſe qui en meſure la hauteur. X. 12.

Et par conſequent ils ſont en raiſon compoſée de celle de la baſe à la baſe; & d'un coſté à un coſté.

Or eſtant equiangles, la baſe eſt à la baſe comme chacun des coſtez à chacun des coſtez.

Et par conſequent leur raiſon eſt compoſée de deux raiſons égales; ce qui s'appelle raiſon doublée.

Exemple. Soient triangles ſemblables *bcd* & *mno*, dont *bf* & *mp* meſurent les hauteurs.



bcd. mno :: *cd. no.* + *bf. mp.*

Or $\left.\begin{array}{l} bc.\ mn \\ bd.\ mn \\ cd.\ no \end{array}\right\}$ :: *bf. mp.*

Donc tous les coſtez ayant la même raiſon, chacun à chacun, & avec les perpendiculaires, la raiſon de ces triangles *bcd* & *mno* ne peut eſtre compoſée de la raiſon de la baſe *cd* & *no*, & de celle des hauteurs *bf*, *mp*, qu'ils ne ſoient en raiſon doublée de l'une de ces raiſons, puiſqu'elles ſont égales; & par conſequent auſſy de la raiſon des autres coſtez homologues, qui eſt la même.

SECOND THEOREME.

SI les coſtez homologues de deux triangles ſemblables XXVIII.
ſont en même raiſon que les coſtez homologues de deux autres triangles ſemblables entr'eux, ces 4 triangles ſont proportionels. C'eſt la même choſe que ce qu'on a demonſtré des parallelogrammes. 5. 20.

DES FIGURES SEMBLABLES.

PREMIER THEOREME.

DEUX figures ſemblables quelconques ſont en raiſon XXIX.
doublée de leurs coſtez homologues.

Car par XIII. 26. elles peuvent estre partagées chacune en autant de triangles, tels que ceux d'une part estant semblables à ceux de l'autre, chacun à chacun, les costez homologues de deux semblables seront en même raison que ceux de deux autres quelconques semblables.

Ainsy supposant qu'elles soient partagées chacune en 4 triangles qui soient

$A.\ E.\ I.\ O.$

$a.\ e.\ i.\ o.$

Par le precedent Theoreme $A.\ a :: E.\ e :: I.\ i :: O\cdot o.$

Donc par II.35. $A + E + I. + O.\ a + e + i + o :: A.a.$

C'estadire que la plus grande des figures semblables qui comprend ces 4 triangles $A.\ E.\ I.\ O.$ sera à la plus petite qui comprend les 4 triangles $a.\ e.\ i.\ o.$ comme l'un de ces triangles est à son semblable.

Or ces triangles semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs bases, & les bases de ces deux triangles semblables sont costez homologues de ces deux figures (comme on a veu XIII. 26.)

Donc ces figures semblables sont en raison doublée de leurs costez homologues.

COROLLAIRE.

XXX. LES figures semblables sont entr'elles comme les quarrez de leurs costez homologues.

Car par le Theoreme precedent les figures semblables sont entr'elles en raison doublée de leurs costez homologues.

Or les quarrez de ces costez homologues sont aussy entr'eux en raison doublée de ces costez qui sont leurs racines.

SECOND THEOREME.

XXXI. SI l'on construit sur l'hypothenuse & sur les deux costez d'un angle droit des figures semblables quelconques, celle qui sera construitte sur l'hypothenuse sera égale aux deux qui seront construittes sur les costez.

Soit le grand costé de l'angle droit b, le petit c, l'hypothenuse h.

La figure construitte sur *b* soit nommée *A*. sur *c*. *E*, & sur *h*. *I*.

Par le Theoreme precedent,

A. *bb* :: *E*. *cc* :: *I*. *hh*.

Donc *A* + *E*, *bb* + *cc* :: *I*. *hh*. (par II. 44)

Donc *alternando*,

A + *E*. *I*. :: *bb* + *cc*. *hh*.

Or *bb* + *cc*. = *hh*. par XIV. 26.

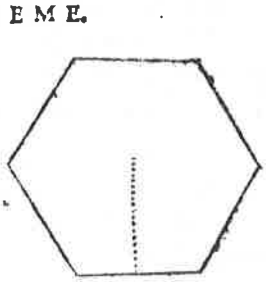
Donc *A* + *E*. = *I*. Ce qu'il falloit demonstrer.

AVERTISSEMENT.

On voit par là que cette proposition quoique plus generale que celle des quarrez, n'a deu estre traitée qu'aprés celle des quarrez; parceque le quarré est la vraie & naturelle mesure de la dimension des autres figures planes. XXXII.

DES FIGURES REGULIERES.

PREMIER THEOREME.



Tout polygone est égal au rectangle du raion droit (qui est la perpendiculaire du centre à l'un des costez (& de la moitié de son perimetre, ou au triangle qui a pour hauteur ce raion droit, & pour base ce perimetre. XXXIII.

Car tout polygone regulier comprend autant de triangles tout-égaux, qu'il a de costez, lesquels ont tous pour mesure de leur hauteur la perpendiculaire du centre au costé qui leur sert de base.

Donc chaque triangle est égal au rectangle de ce raion droit qui est leur hauteur, & de la moitié de la base.

Or toutes ces moitiez des bases de ces triangles prises ensemble font la moitié du perimetre, puisque toutes les bases font tout le perimetre.

Donc le rectangle de cette perpendiculaire & de la moitié du perimetre est égal à tous ces triangles; & par consequent au polygone.

Et c'est la même chose du triangle qui a pour hauteur cette perpendiculaire, & pour base tout le perimetre, puisqu'il est égal à ce rectiligne. Outre qu'il est aisé de prouver qu'il est égal à tous les triangles que contient le polygone, estant de même hauteur que chacun, & sa base estant égale à toutes les bases des autres prises ensemble.

SECOND THEOREME.

XXXIV. PAR l'analogie du cercle à un polygone infini, le cercle est égal au rectangle du raion & de la moitié de la circonference, ou au triangle qui a pour hauteur le raion, & pour base toute la circonference.

Nous l'avons prouvé par la premiere methode, qui est la Geometrie des indivisibles. On le peut aussy prouver par la voie d'Archimede, en montrant que le rectangle du raion & de la moitié de la circonference est plus grand que tout polygone inscrit au cercle, & plus petit que tout circonscrit.

Il est plus grand que tout inscrit, parceque l'inscrit par le Theoreme precedent est égal au rectangle de la perpendiculaire du centre au costé, & de la moitié du perimetre. Or cette perpendiculaire est plus petite que le raion du cercle, puisqu'elle est terminée dans le cercle, & le perimetre du polygone inscrit est plus petit que la circonference qui la comprend, par la maxime d'Archimede. V. 6.

Donc le rectangle du raion du cercle & de la moitié de la circonference est plus grand que tout polygone inscrit.

Et il est plus petit que tout polygone circonscrit, parceque le polygone circonscrit est égal au rectangle du raion du cercle (qui est alors la même chose que la perpendiculaire au costé) & de la moitié de son perimetre, lequel perimetre est plus grand que la circonference du cercle, puisqu'il la comprend, selon la même maxime d'Archimede. Donc &c.

TROISIEME THEOREME.

XXXV. LES figures regulieres de même espece sont entr'elles en raison doublée de celle de leurs raions droits.

Car elles sont égales chacune au rectangle du raion droit,

droit, & de la moitié du perimetre. Or le raion droit eſt au raion droit comme le perimetre au perimetre, par XII. 26. Donc ces rectangles (auſquels ces figures regulieres ſont égales) eſtant ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublee de celle du raion droit, qui eſt l'un de leurs coſtez.

PREMIER COROLLAIRE.

LES cercles ſont entr'eux en raiſon doublée de celle de leurs raions, ou de leurs diametres, ce qui eſt la même choſe. XXXVI.

SECOND COROLLAIRE.

LES cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres. Car les uns & les autres ſont en raiſon doublée de celle de leurs diametres. XXXVII.

QUATRIEME THEOREME.

LES triangles ſemblables inſcrits en des cercles ſont entr'eux en raiſon doublée des diametres de ces cercles : ou, ce qui eſt la même choſe, comme les cercles, ou comme les quarrez des diametres. XXXVIII.

Car les cordes de divers cercles qui ſoutiennent les angles inſcrits égaux, ſont entr'elles comme les diametres, par X. 24. & 25.

Donc les coſtez de ces triangles ſemblables qui ſoutiennent les mêmes angles (qui ſont ceux qu'on appelle homologues) ſont entr'eux comme les diametres.

Or ces triangles eſtant ſemblables, ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Donc ils ſont auſſy en raiſon doublée de ces diametres.

Donc ils ſont auſſy entr'eux comme les cercles & comme les quarrez des diametres.

CINQUIEME THEOREME.

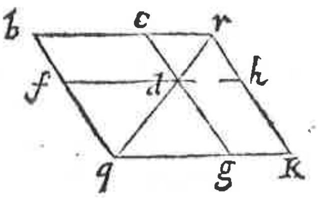
LES figures ſemblables inſcrittes dans les cercles ſont entr'elles en raiſon doublée des diametres. XXXIX.

Car comme il a eſté prouvé 5. & XIII. 26. ces figures ſemblables ſe peuvent reſoudre en triangles ſemblables, chacun d'une figure à chacun de l'autre, qui ſeront tous inſcrits dans le cercle.

Donc tous les triangles d'une figure ſont à tous ceux de l'autre (& par consequent une figure est à l'autre) comme un des triangles d'une figure à un semblable de l'autre. Or par le Theoreme precedent ces deux triangles semblables sont entr'eux en raison doublée des diametres. Donc les figures semblables inscrittes dans les cercles sont entr'elles en raison doublée des diametres. Donc aussy comme les cercles. Donc aussy comme les quarrez des diametres.

PREMIER PROBLEME.

XL. DECRIRE sur un costé donné le parallelogramme égal & equiangle à un parallelogramme donné.



Soit le parallelogramme donné *bcdf*. Soit continuée *cd* jusques à *g*, en sorte que *dg* soit égale au costé donné.

Soit aussy continuée *bf* jusques à ce que *fq* soit égale à *dg*. Soit menée de *q* par *d* une indefinie.

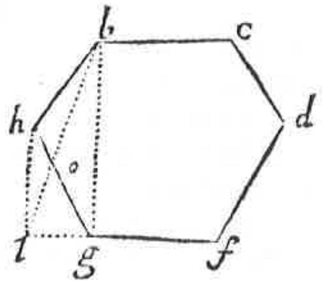
Soit prolongée *bc*, jusqu'à ce qu'elle rencontre en *r* cette indefinie.

Soit prolongée *qg* jusques en *k*, en sorte que *qk* soit égale à *br*, joignant les points *rk*, & prolongeant *fd* jusques en *h*, où elle rencontre *k*.

Le parallelogramme *dhkg* sera égal & equiangle au donné *bcdf*.

SECOND PROBLEME.

XLI. FAIRE une figure égale à une donnée qui ait moins d'un costé que la donnée. C'estadire que si la donnée en a 6, on en cherche une qui n'en ait que 5; & si elle en a 5, on en cherche une qui n'en ait que 4: de sorte que par là on pourra venir jusqu'au triangle.



Soit proposé de reduire l'exagone *bcdfgh* en un pentagone qui luy soit égal.

Ayant prolongé *fg*, je tire la ligne *bg*.

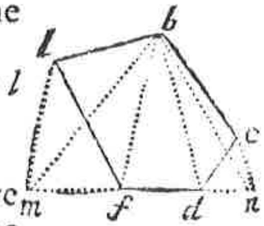
Puis de *h* je tire sur *g* prolongée *hl* parallele à *bg*.

Et de *b* je tire *bl*; Je dis que le pentagone *bcdfl* est égal à l'exagone donné.

Car les triangles *hlb* & *hlg* sont égaux, parcequ'ils sont sur la même base & entre mêmes paralleles.

Donc ostant *hlo*, commun à l'un & à l'autre, *hob* demeurera égal à *lgo*, tout le reste est commun à l'exagone & au pentagone.

On reduira de même le pentagone *bcdfl* à un trapeze.



Ayant mené la ligne *bf*, mener de *l* sur *df* prolongée *lm* parallele à *bf*.

Puis tirer *bm*.

On prouvera de la même maniere que l'on vient de faire, que le trapeze sera égal au pentagone.

Que si de *bd* on tire une ligne.

Et de *c* sur *fd* prolongée de ce costé là *cn*, paralle à *bd*.

Et tirant *bn*, le triangle *bmn* sera égal tant au trapeze *bcdm*, qu'au pentagone *bcdfl*. Et ainsy l'exagone aura esté reduit en un pentagone, & le pentagone en un trapeze, & le trapeze en un triangle.

AVERTISSEMENT ET CONCLUSION.

Je laisse d'autres Problemes qui sont tres faciles à resoudre par les principes qui ont esté établis. Outre que n'ayant entrepris ces Elemens que pour donner un essay de la vraie methode qui doit traitter les choses simples avant les composées, & les generales avant les particulieres, je pense avoir satisfait à ce dessein, & avoir montré que les Geometres ont eu tort d'avoir negligé cet ordre de la nature en s'imaginant qu'ils n'avoient autre chose à observer, sinon que les propositions precedentes servissent à la preuve des suivantes: au lieu qu'il est clair, ce me semble, par cet essay que les elemens de Geometrie estant reduits selon l'ordre naturel, peuvent estre aussy solidement demonstrez, & sont sans comparaison plus aisez à concevoir & à retenir. XLII.

FIN.

SOLVTION
D'UN DES PLUS CELEBRES
ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE,
APPELLE' COMMUNEMENT
LES QVARREZ
MAGIQUES.

SOLUTION D'UN DES PLUS CELEBRES ET DES PLUS DIFFICILES PROBLEMES D'ARITHMETIQUE, APPELLÉ COMMUNEMENT LES QUARREZ MAGIQUES.

§. 1. CE QUE C'EST QUE CE PROBLEME.

AYANT un quarré de cellules pair ou impair. I.

Et l'ayant remply de chiffres ou selon l'ordre naturel des nombres 1. 2. 3. 4. &c.

Ou de quelqu'autre progression arithmetique que ce soit, comme 2. 5. 8. 11. 14. &c.

Disposer tous ces chiffres dans un autre quarré de cellules semblables à celuy là, en sorte que tous les chiffres de chaque bande soit de gauche à droit, soit de haut en bas, soit mesme les deux diagonales, fassent toujours la mesme somme.

Soient pris pour exemples les quarrez d'onze pour les impairs; & de douze pour les pairs, comme on les peut voir dans les figures qui sont à la fin de ce Traitté.

§. 2. CONSIDERATIONS SUR LES QUARREZ NATURELS.

J'APPELLE quarrez naturels ceux où les chiffres sont II.
disposez en progression arithmetique en commençant par les plus petits.

SUR LES QUARREZ IMPAIRS.

DANS le milieu du quarré impair il y a une cellule qui III.
en est le centre. Le chiffre qui est dans cette cellule soit nommé centre & marqué par *c*.

IV. De tous les autres chiffres la moitié sont plus petits & les autres plus grands que le centre. Les uns soient appellez simplement *petits* & les autres *grands*.

V. Les cellules autour du centre soient appellées 1re enceinte.

Autour de la premiere enceinte, 2e enceinte.
Autour de la seconde enceinte, 3e enceinte.
Et ainsy de suite.

VI. Les enceintes 1. 3. 5. 7. 9. &c. soient appellées *enceintes impaires*.

Les 2. 4. 6. 8. 10. &c. *enceintes paires*.

VII. Il est important de considerer dans chaque enceinte où sont les petits chiffres, & où sont les grands.

Les petits sont premierement dans toute la bande d'enhaut, qui est de 3. dans la 1re enceinte, de 5 dans la 2e, de 7 dans la 3e &c.

Secondement dans la bande à gauche les plus hauts jusques à celuy qui est vis à vis le centre *inclusive*.

Troisiêmement dans la bande à droit les plus hauts jusques à celuy qui est vis à vis le centre *exclusive*.

Sur les Quarrez pairs.

VIII. Il n'y a point de cellule qui soit au centre. Mais on doit prendre pour centre la moitié de la somme que font le premier & le dernier chiffre.

Et cette somme entiere s'appellera *2. c.*

IX. La moitié des bandes, sçavoir celles qui sont les plus hautes contiennent les petits chiffres, & les plus basses les grands.

X. Les quatre cellules du milieu sont la 1re enceinte.
Les cellules autour de ces quatre, la 2e enceinte.
Celles autour de la seconde, la 3e enceinte.
Et ainsy de suitte.

XI. Les enceintes 1. 3. 5. 7. 9. &c. soient aussy appellées les enceintes impaires.

Et les 2. 4. 6. &c. les paires.

XII. Les petits chiffres sont,

1. Dans la bande d'enhaut de chaque enceinte.

2. Au

2. Au costé gauche depuis la bande d'enhaut jusqu'à la bande où commencent les grands chiffres.

3. Et de même au costé droit.

§. 3. PREPARATION.

LE plus grand mystere de la solution de ce Probleme consiste à marquer par lettres quelques uns des petits chiffres de chaque bande. XIII.

QUARREZ IMPAIRS.

DANS toutes les enceintes generalement marquer le coin à gauche de la bande d'enhaut par *e*. XIV.

Le coin à droit de la même bande par *o*.

Le milieu de cette bande par *m*.

La cellule à gauche qui est vis à vis le centre par *α*.

MARQUER de plus dans les enceintes impaires XV.

Deux cellules dans la bande d'enhaut également distantes, l'une d'*e*, l'autre d'*o*, par les mêmes lettres accentüées.

L'une par *è*.

L'autre par *ò*.

Et la cellule à gauche au dessous d'*e* par *ω*.

Et au costé droit celle qui est au dessus de la cellule qui est vis à vis le centre par *β*.

DANS LES QUARREZ PAIRS.

NE rien marquer dans les premieres & secondes enceintes. XVI.

DANS toutes les autres generalement marquer XVII.

Le coin à gauche d'enhaut par *e*.

A droit par *o*.

Le plus bas des petits nombres à droit par *α*.

Le plus bas des petits nombres à gauche par *β*.

MARQUER de plus dans les enceintes impaires, à commencer par la 3e (qui est celle qui a 6 cellules dans la bande d'enhaut) XVIII.

4 cellules dans la bande d'enhaut, deux par $\left\{\begin{array}{l} é. \\ ó. \end{array}\right.$

& deux par $\left\{\begin{array}{l} ê. \\ ô. \end{array}\right.$

selon ce qui a esté dit §. 15.

A gauche marquer la cellule au dessous d'*e* par *ω*.

Et à droit celle au dessus d'*α* par *γ*.

§. 4. MAXIMES

POUR LA DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

XIX. DEUX chiffres, l'un *petit*, l'autre *grand*, également distans du centre, & qui se joignent par une ligne passant par le centre font une somme égale à deux fois le centre.

XX. QUAND un *petit* chiffre est marqué par une lettre, son *grand* soit nommé (quand on le voudra exprimer) par la majuscule de la même lettre, quoiqu'elle ne soit pas marquée.

Ainsy *e E* font deux fois le centre.

Et de même *α. A*, ou *β. B*; ou *o. O*.

SECONDE MAXIME.

XXI. QUATRE chiffres dans la même bande, dont le premier est autant distant du 2, que le 3 du 4 sont en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

XXII. *e. è :: ò. o.* Donc *e. o* = *è. ò*.

D'où il s'ensuit que partout où sont ensemble *è. ò*, ou bien *é. ó*, ou leurs majuscules *È Ò*, on peut supposer, lorsqu'il s'agit de trouver des égalitez avec d'autres chiffres, que c'est comme si c'estoit *e. o*, *E. O*, parceque si l'égalité s'y trouve en supposant que c'est *e. o*, elle ne sera pas troublée en remettant *è. ò*, en leur place, qui valent autant que *e. o*.

XXIII. *e. m :: m. o.* Donc *e. o* = *m. m*.

DANS LES QUARREZ PAIRS.

XXIV. *e. ω :: β. A.* Donc *e. A* = *ω. β*.

Pour trouver *A.* voyez §. 20.

TROISIEME MAXIME.

XXV. LORSQUE 4 cellules font un parallelogramme, rectangle ou non rectangle, leurs 4 chiffres sont en proportion arithmetique. Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

DANS LES QUARREZ IMPAIRS.

$e.\ m :: a.\ c.$ Donc $e.\ c = m.\ a.$ XXVI.

$m.\ o :: a.\ c.$ Donc $m.\ c = o.\ a.$ XXVII.

$\omega.\ m :: c.\ \beta.$ Donc $\omega.\ \beta. = m.\ c.$ XXVIII.

DANS LES PAIRS.

$e.\ o :: \beta.\ a.$ Donc $e.\ a = o.\ \beta.$ XXIX.

$a.\ \beta :: o.\ \gamma.$ Donc $\omega.\ \gamma = \beta.\ o.$ XXX.

§. 5. METHODE POUR DISPOSER MAGIQUEMENT LE QUARRE' NATUREL.

CETTE methode consiste en fort peu de regles ; les unes generales, les autres particulieres, selon lesquelles il faut transposer les chiffres du quarré naturel dans le magique. XXXI.

PREMIERE REGLE GENERALE.

IL faut disposer les chiffres par enceintes, ceux d'une enceinte en l'enceinte semblable, & tout le soin qu'on doit avoir d'abord, est de sçavoir où l'on doit mettre les petits nombres de l'enceinte, parceque la situation des *petits* donne celle des *grands* selon les deux regles suivantes. XXXII.

SECONDE REGLE GENERALE.

QUAND on a placé un *petit* chiffre dans un coin, il faut placer son *grand* dans le coin diagonalement opposé. XXXIII.

Ainsy a estant placé dans le coin gauche de la bande d'enhaut, il faudra mettre A dans le coin droit de la bande d'embas.

TROISIEME REGLE GENERALE.

HORS les coins il faut placer les grands vis à vis des petits de la bande opposée. XXXIV.

C'estpourquoy il faut observer de ne mettre jamais deux petits en des bandes opposées vis à vis l'un de l'autre.

COROLLAIRE DE CES REGLES.

LES chiffres estant disposez selon ces regles,

Il s'ensuit, 1. Que les chiffres de deux bandes opposées pris ensemble, valent autant de fois c qu'il y a de chiffres XXXV.

dans les deux bandes. Car un petit & un grand valent deux fois *c*. Or il y a autant de *petits* que de *grands*. Donc

XXXVI. Il s'ensuit, 2. Que lorsqu'on a prouvé que les chiffres d'une bande aprés cette disposition valent autant de fois le centre qu'il y a de chiffres, cette bande est égale à son opposée.

XXXVII. Il s'ensuit, 3. Que quand il y a autant de petits chiffres dans une bande que dans l'opposée, & que la somme des uns est égale à la somme des autres, c'est une marque asseurée que la bande est égale à la bande.

La preuve en est facile sans que je m'arreste à l'expliquer.

QUATRIEME REGLE GENERALE.

XXXVIII. Il ne faut se mettre en peine d'abord que de placer les petits chiffres qui sont marquez par des lettres : car cela fait, le reste se trouve sans peine par cette raison.

Dans la bande d'enhaut, dans quelques quarrez & quelques enceintes que ce soit, outre les cellules marquées par des lettres :

Ou il ne reste rien,

Ou il reste toûjours des cellules non marquées en nombre pairement pair ; C'estadire 4. 8. 12. 16. &c.

Et de plus, ils sont toujours 4 à 4 en proportion arithmetique.

Donc prenant les extrêmes & les mettant dans une bande, & ceux du milieu dans l'opposée, ils ne troubleront point l'égalité qui y estoit déja par les chiffres marquez de lettres.

XXXIX. Il en est de même des deux costez droit & gauche. Car les petits chiffres qui restent (s'il en reste outre les marquez) sont toûjours en nombre pairement pair 4. 8. 12. 16. &c. & de 4 en 4 en proportion arithmetique.

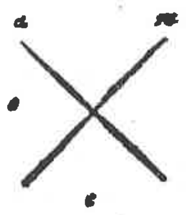
Donc comme cy dessus.

Il n'y a donc plus à se mettre en peine que de disposer les lettres. Ce qui se fait par les regles particulieres.

§. 6. REGLES PARTICULIERES POUR LES QUARREZ IMPAIRS.

Il y a deux regles pour ces quarrez, l'une pour les enceintes impaires, & l'autre pour les paires. XL.

POUR LES ENCEINTES IMPAIRES.



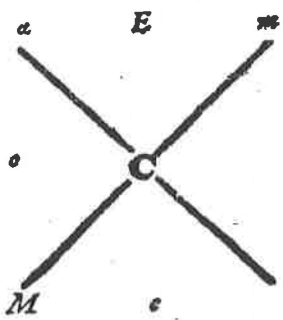
Au coin gauche de la bande d'enhaut mettre α.

Au coin droit de la même bande, m.

A la bande d'embas en quelque cellule hors les coins, e.

A la bande de costé du costé d'α, o.

DEMONSTRATION.



Il est requis premierement à demonstrer que dans la bande d'enhaut $\alpha.\ E.\ m.$ valent trois fois le centre. D'où il s'ensuivra qu'elle sera égale à la bande d'embas par 36. XLI.

Or par (26.) $e.\ c = \alpha.\ m.$

Donc $e.\ c.\ E = \alpha.\ E.\ m.$

Or $e.\ c.\ E = 3\ c.$ par 20.

Donc $\alpha.\ E.\ m = 3\ c.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

Requis secondement à demonstrer que $\alpha.\ o.\ M$ valent 3 c. D'où il s'ensuivra que cette bande sera égale à l'opposée par 36. XLII.

Or par (27) $\alpha.\ o = m.\ c.$

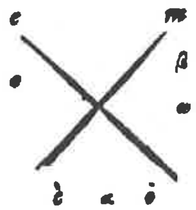
Donc $m.\ c.\ M = \alpha.\ o.\ M.$

Or $m.\ c.\ M = 3\ c.$ par 20.

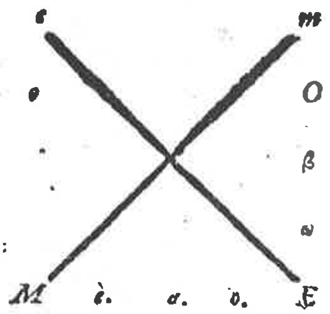
Donc $\alpha.\ o.\ M = 3\ c.$

POUR LES ENCEINTES [redacted]PAIRES.

Il suffira de les figurer tout d'un coup. XLIII.



DEMONSTRATION.



XLIV. REQUIS premierement à demonſtrer que la bande d'embas $M.\ \grave{e}.\ \alpha.\ \grave{o}.\ E = 5\ c.$ C'eſtadire qu'elle vaut enſemble cinq fois le centre.

Ce qui ſe prouve ainſy.

Par (27) $\alpha.\ o = m.\ c.$
Donc $e.\ \alpha.\ o = e.\ m.\ c.$
Donc $e.m.c.\ M.\ E. = \grave{e}.\ \alpha.\ \grave{o}.\ M.\ E.$ par (22.)
Or $e.m.c.\ M.\ E. = 5\ c.$ par 20.
Donc $M.\ \grave{e}.\ \alpha.\ \grave{o}.\ E. = 5\ c.$ Ce qu'il falloit demonſtrer.

XLV. REQUIS ſecondement à demonſtrer que dans la bande droitte $m.\ O.\ \beta.\ \omega.\ E = 5\ c.$

Ce qui ſe prouve ainſy.

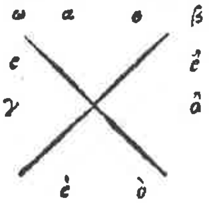
$e.\ o = m.\ m.$ par (23)
Donc $e.\ o.\ c = m.\ m.\ c.$
Or $m.m.\ c = m.\ \omega.\ \beta.$
Parce que $m.\ c = \omega.\ \beta.$ par 28.
Donc $e.\ o.\ c = m.\ \omega.\ \beta.$
Donc $e.\ o.\ c.\ E.\ O = m.\ \omega.\ \beta.\ E.\ O.$
Or $e.\ o.\ c.\ E.\ O = 5\ c.$ par 20.
Donc $m.\ O.\ \omega.\ \beta.\ E = 5\ c.$ Ce qu'il falloit demonſtrer.

§. 7. POUR LES QUARREZ PAIRS.

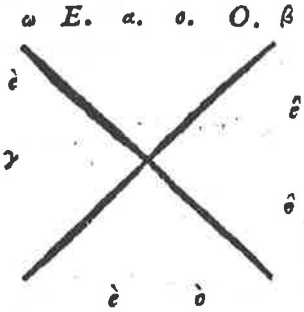
XLVI. ON laiſſe à part les deux premieres enceintes, qui ont leur regle particuliere.

POUR LES AUTRES ENCEINTES IMPAIRES.

XLVII. LA diſpoſition s'en figure ainſy.



DEMONSTRATION.



REQUIS I. à demonſtrer que les ſix chiffres de la bande d'enhaut dont quatre ſont *petits*, & deux *grands* qui viennent de *è* & *ò* qu'on a mis embas, valent ſix fois le centre. Ce qui ſe prouve ainſy. XLVIII.

$\alpha.\ A.\ o.\ O.\ e.\ E = 6\ c.$ par (20)

Or ces ſix lettres ſont égales aux ſix, $\omega.\ E:\ \alpha.\ o.\ O.\ \beta.$

Car oſtant les mêmes qui ſe trouvent de part & d'autre, ſçavoir $\alpha.\ o.\ O.\ E.$ il ne reſtera d'un coſté que $A.\ e$: & de l'autre que $\omega.\ \beta.$

Or par (24) $A.\ e = \alpha.\ \beta.$

Donc les ſix lettres $\omega.\ E.\ \alpha.\ o.\ O.\ \beta = 6\ c.$

REQUIS 2. à demonſtrer que $\omega.\ e.\ \gamma = \beta.\ \grave{e}.\ \grave{o}.$ Car ſi cela eſt, les grandes ſeront auſſy égales aux grandes, & le tout au tout par (37.) XLIX.

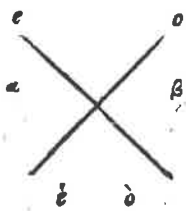
Suppoſant donc que $\grave{e}.\ \grave{o}$ ſoient $e.\ o.$ (S. 22.) & oſtant e & e de part & d'autre, reſte d'une part $\omega.\ \gamma.$ & de l'autre $\beta.\ o.$ qui font des ſommes égales par (30)

Donc $\omega.\ e.\ \gamma = \beta.\ \grave{e}.\ \grave{o}.$

Donc la bande égale à la bande par (37)

POUR LES ENCEINTES PAIRES.

LA diſpoſition en eſt tres facile, & ſe figure ainſy. L.



DEMONSTRATION.

ELLE eſt ſi facile par 22. 29. & 37. que je ne m'amuſe pas à l'expliquer. LI.

Cette enceinte ſe peut encore faire en tranſpoſant les coins &c.

§. 8. REGLE PARTICULIERE POUR LA PREMIERE ET SECONDE ENCEINTE DES QUARREZ PAIRS.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

LII. Ces deux enceintes ne ſont autre choſe que le quarré de 4 qui fait 16, dans lequel il y a deux ſortes de bandes. Quatre qui ſont la ſeconde enceinte, & qu'on peut appeller les bandes *exterieures*. Et quatre autres qui coupent le quarré, & qu'on peut appeller *tranſverſales*: ſçavoir la 2ᵉ & la 3ᵉ de haut en bas.

Et la 2ᵉ & la 3ᵉ de gauche à droit.

LIII. Ce qui eſt cauſe que ces deux enceintes ne ſe peuvent pas diſpoſer par les regles des autres, c'eſt que les 4 chiffres du milieu faiſant en divers ſens quatre bandes de deux chacune en ligne droitte, & deux en diagonale, les bandes droittes ne ſçauroient faire des ſommes égales, mais ſeulement les diagonales.

LIV. Or ces 16 chiffres ſe pouvant diſpoſer en tant de manieres que cela eſt preſque incroyable; ſçavoir en plus de 20 millions de millions.

20:922:789:872:000.

Il n'y en a proprement que 16 qui ſoient magiques, c'eſtadire où toutes les bandes faſſent des ſommes égales (car je ne compte pas pour differentes diſpoſitions celles qui ne viennent que de la differente ſituation du même quarré.)

LV. Et voicy comme on les trouve.

Il faut prendre toujours les chiffres 4 à 4 en cet ordre.

1. Les quatre du dedans ou interieurs.
2. Les quatre coins exterieurs.
3. Les deux du milieu de la bande d'enhaut, avec les deux du milieu de celle d'embas.
4. Les deux du milieu de la bande à gauche, avec les deux du milieu de celle à droit.

Or chacun de ces chiffres pris ainſy 4 à 4 (& qu'on nommera dans la ſuite par 1. 2. 3. 4.) peuvent

Ou estre laissez en leur même place ; ce qui se marquera par *o*.

Ou estre transportez en croix S. André ; ce qui se marquera par *c*.

Ou directement de gauche à droit ; ce qui se marquera par *g*.

Ou directement de haut en bas ; ce qui se marquera par *h*.

SUIVANT ces remarques, & se souvenant de ce que signifient les 4 nombres (1. 2. 3. 4.) & les 4 lettres (*o. c. g. h.*) les deux tables suivantes feront trouver sans peine les 16 dispositions magiques du quarré de 4 : ou ce qui est la même chose des deux premieres enceintes de tous les quarrez pairs. LVI.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1.	*o*	*o*	*o*	*o*	*c*	*c*	*c*	*c*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*c*	*g*	*c*	*g*	*h*	*o*	*h*	*o*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.
1.	*g*	*g*	*g*	*g*	*h*	*h*	*h*	*h*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*h*	*o*	*h*	*o*	*c*	*g*	*c*	*g*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

De ces 16 dispositions magiques du quarré de 4. il y en a deux, sçavoir la 1re & la 6e, où on ne change que 8 chiffres. LVII.

Deux, sçavoir la 11e & la 16e, où on les change tous 16.

Et 12 où on en change 12.

LVIII. Voicy un exemple de la 6ᵉ disposition, & un autre de la 16ᵉ. On laisse à trouver les autres.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

DEMONSTRATION.

LIX. Chaque bande tant exterieure que transversale du quarré de quatre (ou du quarré composé des 2 premieres enceintes de tous les quarrez pairs) est de 4 chiffres en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

Soit donc, par exemple, la somme des extrêmes de la bande d'enhaut appellée b, la somme des moyens qui luy est égale pourra estre aussy appellée b, & ainsy toute la bande sera $b + b$.

Et par la même raison la bande d'embas pourra estre $f + f$.

Cela estant on peut faire ces bandes égales par deux voies.

La 1ʳᵉ en transposant les extrêmes de l'une à l'autre sans changer les moyens. Car alors l'une deviendra $f + b$.

Et l'autre $b + f$. & ainsy seront égales.

La 2ᵉ en transposant les moyens sans changer les extrêmes. Car alors l'une deviendra $b + f$. & l'autre $f + b$. & ainsy seront encore égales.

Il ne faut qu'appliquer cecy à chacune de ces 16 dispositions, & l'on verra que les transpositions que l'on y fait les doivent rendre magiques.

§. 9. DIVERS MOYENS DE VARIER LES QUARREZ MAGIQUES.

De ces moyens j'omets ceux qui sont trop faciles à trouver, & je n'en marqueray que deux qui sont plus importans, & qu'on a pratiquez dans les deux exemples qu'on a donnez de quarrez magiques.

PREMIER MOYEN.

Nous avons ſuppoſé qu'on tranſporteroit les chiffres de la premiere enceinte du quarré naturel dans la 1re enceinte du quarré magique; & ceux de la 2e dans la 2e; & de la 3e dans la 3e &c. Mais cela n'eſt pas neceſſaire. Car pour les chiffres marquez de lettres, il ſuffit de ne les tranſporter que d'une enceinte impaire à une autre quelconque qui ſoit impaire, comme de la 5e à la 1re; & d'une enceinte paire à une paire, comme de la 6e à la 4e. LX.

SECOND MOYEN.

Et pour tous les autres chiffres non marquez de lettres, on les peut tranſporter de quelque enceinte que ce ſoit à quelque autre enceinte que l'on voudra; pourvu qu'on en prenne quatre enſemble qui ſoient en proportion arithmetique, & qu'on ait ſoin de mettre les extrêmes dans une bande, & les moyens dans la bande oppoſée. LXI.

CONCLUSION.

Je penſe pouvoir conclure de tout cecy, qu'il n'eſt pas poſſible de trouver une methode plus facile, plus abregée & plus parfaitte pour faire les quarrez magiques, qui eſt un des plus beaux Problemes d'Arithmetique. LXII.

Ce qu'elle a de ſingulier, c'eſt 1. qu'on n'écrit les chiffres que deux fois.

2. Qu'on ne tâtonne point, mais qu'on eſt toujours aſſuré de ce que l'on fait.

3. Que les plus grands quarrez ne ſont pas plus difficiles à faire que les plus petits.

4. Qu'on les varie autant que l'on veut.

5. Qu'on ne fait rien dont on n'ait demonſtration.

6. A quoy on peut ajoûter, que cette methode eſt ſi generale que ſans y rien changer on pourroit reſoudre ſans aucune peine par la même voie cet autre Problême qui paroiſt encore plus merveilleux.

Ayant mis dans un quarré naturel tous les nombres que *l'on voudra en progreſſion geometrique, comme 1. 2. 4. 8. 16. &c. les diſpoſer de telle ſorte dans un quarré ſemblable, que tous les nombres de chaque bande multipliez les uns par les autres faſſent une ſomme égale à celle que font les nombres de toute autre bande multipliez auſſy les uns par les autres.*

En voicy un exemple dans le quarré de trois.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

FIN *de l'Explication des Quarrez Magiques.*

QVARRÉ NATVREL DE XI.

1 e	2	3	4	5	6 m	7	8	9	10	11 o
12	13 e	14 è	15	16	17 m	18	19	20 ò	21 o	22
23	24 w	25 e	26	27	28 m	29	30	31 o	32	33
34	35	36	37 e	38 è	39 m	40 ò	41 o	42	43	44
45	46	47	48 w	49 e	50 m	51 o	52 β	53	54 β	55
56 α	57 α	58 α	59 α	60 α	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

QVARRÉ MAGIQVE DE XI.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

QVARRÉ NATVREL DE XII.

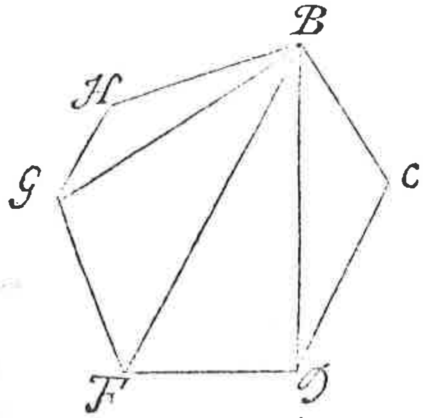
e 1	ì 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ò	12 o
13	e 14	è 15	ê 16	17	18	19	20	21 ô	22 δ	23 o	24
25	ω 26	e 27	è 28	29	30	31	32	33 δ	34 o	35	36
37	38	39	e 40	è 41	ê 42	43 ô	44 ò	45 o	46	47	48
49	50	51	ω 52	53	54	55	56	57 γ	58	59 γ	60
3 61	3 62	β 63	β 64	65	66	67	68	69 α	70 α	71 α	72 α
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

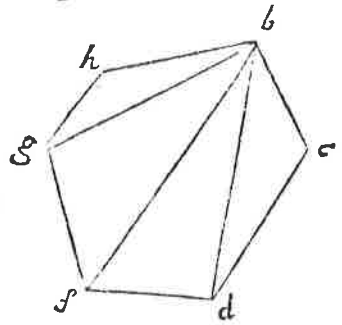
QVARRÉ MAGIQVE DE XII.

118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	70
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27

L'AUTEUR DE CES ELEMENS *n'y ayant point fait de figures que grifonnées, on excusera s'il y en a quelques-unes qui n'ont pas esté bien faites, ou qu'on a manqué de mettre; & on y supléera par celles-cy.*

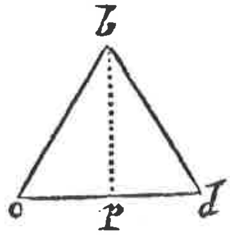
Pour le Livre XIII. n. 26.





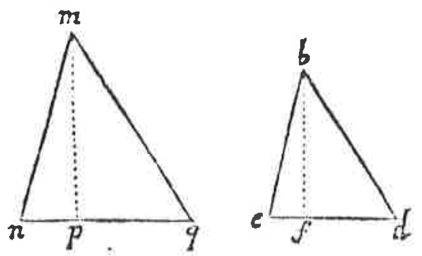
Pour le Livre XIV. n. 30.

Au lieu de la figure qui est mal faite.



Pour le Livre XV. n. 27.

Au lieu des deux figures qui ne sont pas bien.



Pour le Livre XIV. n. 12.

	b	*c*	*d*	*f*	*g*
b	*b b*	*b c*	*b d*	*b f*	*bg*
c	*c b*	*c c*	*c d*	*c f*	*cg*
d	*d b*	*d c*	*d d*	*df*	*dg*
f	*f b*	*f c*	*f d*	*f f*	*fg*
g	*gb*	*g c*	*g d*	*g f*	*gg*

FAUTES A CORRIGER.

Au titre de la Table ligne 3. *lisez*, qu'aucun autre ait jamais observé.

Groupe inter-I.R.E.M. "Epistémologie"

Reproduit par l'I.R.E.M. de Dijon