

2 14.2. — 15.9. — 71.9.
2 20.2. — 18.9. — 102.9.

CHOSES

d'ALGEBRE

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	4	6	8
3	3	3	6	9	12
4	4	4	8	12	16

Below the table, the following numbers are written: 3, 3, 4, 6, 5, 6. These correspond to the products 3x0, 3x1, 3x2, 3x3, 3x4, and 3x5 respectively.

$$y^* \varphi 4 f f y y - 4 a a f f + 4 f f x x .$$

Ces documents de travail sont la propriété de l'I.R.E.M. de DIJON.

Les droits de reproduction et de traduction sont réservés pour tous pays. Toute reproduction par quelque procédé que ce soit constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

La couverture comporte les reproductions de :

- . Le texte de RECORDE introduisant le signe $\equiv$ (1557)
- . Une multiplication, dans un ouvrage de Carolus Bovillus (1509)
- . Une équation, dans un texte de Huygens (1690).

Le Groupe "Histoire des Mathématiques pour nos Elèves" est composé, en 1980-81, de :

BELLEMIN, COLLAS-PRADEL, CRETTEZ, LEMETTAIS (Lycée de Tonnerre) ;
GURGO (Collège de Migennes) ;
BATAILLE, HERNANDEZ, JAMBET, PLANE (Lycée Jacques Amyot à Auxerre).

Ces documents de travail sont la propriété de l'I.R.E.M. de DIJON.
Les droits de reproduction et de traduction sont réservés pour tous pays. Toute reproduction par quelque procédé que ce soit constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

La couverture comporte les reproductions de :

- . Le texte de RECORDE introduisant le signe $\equiv$ (1557)
- . Une multiplication, dans un ouvrage de Carolus Bovillus (1509)
- . Une équation, dans un texte de Huygens (1690).

Le Groupe "Histoire des Mathématiques pour nos Elèves" est composé, en 1980-81, de :

BELLEMIN, COLLAS-PRADEL, CRETTEZ, LEMETTAIS (Lycée de Tonnerre) ;
GURGO (Collège de Migennes) ;
BATAILLE, HERNANDEZ, JAMBET, PLANE (Lycée Jacques Amyot à Auxerre).

Les mathématiques, et l'algèbre en particulier, manipulent beaucoup d'outils, à commencer par des symboles et des mots.

Une de nos brochures a esquissé l'histoire de la numération écrite. Nous allons essayer maintenant d'évoquer d'autres participants du monde mathématique. On trouvera ici des études sur l'historique des sujets suivants :

- la technique des quatre opérations ;
- la notation des fractions ;
- l'apparition des symboles les plus simples ;
- sous le titre "les tribulations d'une équation" sont évoqués l'écriture et les mots qui entourent une équation du second degré. (Ceux que l'histoire de la notion d'équation algébrique intéresse se reporteront à notre brochure "Egale Zéro") ;
- enfin "trois mots de trigo" pour ne pas oublier le sinus et ses frères ;
- pour conclure un index des noms propres cités aidera à situer dans le temps les questions étudiées.

L'objectif de notre groupe n'est pas, on le sait, d'épuiser un sujet mais de permettre d'aborder ce sujet à qui en ignore à peu près tout. Inutile d'écrire que ce ne sont que quelques sujets qui sont traités ici mais nous espérons encore avoir montré tout le cheminement des hommes pour en arriver par combien de détours, de retours, au vocabulaire et à l'écriture des mathématiques dans la pratique actuelle.

Ce travail a réservé des surprises tout d'abord à ses auteurs. Ceux-ci espèrent maintenant en faire profiter élèves et collègues.

Le groupe "Histoire des Mathématiques
pour nos Elèves".

I.R.E.M. de DIJON

Janvier 1981

DE LA TECHNIQUE DES QUATRE OPERATIONS

Celui qui fait une opération, le crayon à la main, est généralement très surpris lorsqu'on lui dit que les divers procédés qu'il emploie, presque mécaniquement, ne sont pas très anciens et, qu'en tous cas, l'homme n'a pas toujours procédé de la sorte.

Les quelques notes qui suivent ont pour but de le montrer. Elles veulent également, une fois de plus, esquisser le lent cheminement fait d'hésitations, de fausses pistes, de progrès, d'astuces, avant de s'engager sur la grande route.

Sur ce point on peut difficilement nier que le débutant, aujourd'hui ne se mette en route avec un bagage sans commune mesure avec celui acquis seulement au cours de son existence par l'homme mûr d'hier.

Lorsque le calcul "à la main" a commencé à remplacer celui "au boulier" ou "à l'abaque" la grosse difficulté fut certainement celle de la retenue.

Ce n'est pas sans curiosité qu'on observe qu'à une époque grosse utilisatrice de la mémoire -celle qui précède l'imprimerie- la mémorisation temporaire d'une retenue a soulevé difficulté et qu'on préfèrait alors écrire tout le calcul. C'est ainsi qu'au 16e siècle Recorde conseillait pour mieux calculer : "keepe in mynde " (garde en mémoire).

L'addition, appelée "prothesis" chez Euclide puis "agrégat" au 13e siècle.

Elle s'est faite très longtemps avec des jetons -voir "Le malade imaginaire". En 1540 Gamma Frisius disposait ainsi une addition:

D'abord les sommes partielles, par colonnes, écrites en entier puis la somme de ces sommes.

137
212
95
14
13
3
444

La soustraction ou "subtractus", le résultat étant le "résiduus".

Il semble que la technique ait longtemps utilisé le "complément à dix", selon le principe suivant :

$$\begin{aligned} 15 - 7 &= 15 + (10 - 7) - 10 \\ &= 15 + 3 - 10 \\ &= 18 - 10 = 8 \end{aligned}$$

On trouve la disposition suivante au 14e siècle (dans un manuscrit de Planudes) pour 3517 - 2669.

Les retenues sont écrites mais l'ordre nous déconcerte aujourd'hui :

2669
3517
848
111

La multiplication

Elle fut d'abord "du"-plication ; en effet, une technique dont on trouve déjà trace chez les égyptiens notait que tout nombre peut être décomposé en une somme de puissances de deux (principe de la numération binaire). Aussi $23 = 16+4+2+1$. Il suffit alors de connaître ou de calculer les produits d'un nombre par les puissances de deux. Cela se fait aisément par des multiplications successives par deux .

$$\begin{aligned} 35 \times 23 &= 35 (1 + 2 + 4 + 16) \\ &= 35 + (35 \cdot 2) + (35 \cdot 4) + (35 \cdot 16) \\ &= 35 + 70 + (70 \cdot 2) + (70 \cdot 8) \\ &= 35 + 70 + 140 + (140 \cdot 4) \\ &= 35 + 70 + 140 + (280 \cdot 2) \\ &= 35 + 70 + 140 + 560 = 805 \end{aligned}$$

On proposait alors de disposer ainsi les calculs :
De ce procédé découle celui encore employé, par exemple en Chine et en URSS, qui trouve son application au boulier où la multiplication par deux est simple à faire.

$$\begin{array}{r} 35 \quad 1 \\ 70 \quad 2 \\ 140 \quad 4 \\ \hline 280 \quad 8 \\ 560 \quad 16 \\ \hline 805 \quad 23 \end{array}$$

En calcul écrit, on observe aussi la méthode suivante sur deux colonnes :

$$\begin{array}{r} 23 \quad 35 \text{ —} \\ 11 \quad 70 \text{ —} \\ 5 \quad 140 \text{ —} \\ 2 \quad 280 \\ 1 \quad 560 \text{ —} \\ \hline 805 \end{array}$$

A gauche on écrit les quotients successifs par deux, à une unité près, et à droite les produits par deux. On fait la somme des seuls multiples qui font face à un nombre impair. En voici une justification :

$$\begin{array}{r} 35 \times 23 = 35 (1+2 \cdot 11) \\ 35 + 70 \cdot 11 \\ + 70 (1+2 \cdot 5) \\ + 70 + 140 \cdot 5 \\ + 140 (1+2 \cdot 2) \\ + 140 + 280 \cdot 2 \\ + 280 \cdot 2 \\ + 280 (0+2 \cdot 1) \\ + 0 + 560 \cdot 1 \\ + 560 \\ \hline 35 \times 23 = 35 + 70 + 140 + 0 + 560 = 805 \end{array}$$

De même :

$$\begin{array}{r}
 41 \times 49 \\
 \begin{array}{r}
 41 \\
 20 \\
 10 \\
 5 \\
 2 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 49 \\
 98 \\
 196 \\
 392 \\
 784 \\
 1568
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}$$

2009

Au 16e siècle arrivent les livres imprimés. Ils fourmillent de procédés qui utilisent les tables de multiplication ; on a pu en imprimer. (Ce n'est que plus tard qu'elles recevront le nom de Pythagore). Mais, comme l'a écrit un auteur "de 1 à 12 la table retien, ainsi fera bon arithméticien" (1 à 12 pourquoi ?)

Voici quelques uns de ces procédés :

— Méthode dite "des cellules" : $245 \times 175 = 42875$

On écrit tous les résultats partiels, inutile de mémoriser. Il serait même possible d'avoir ces résultats partiels écrits à l'avance sur des baguettes qu'on disposerait convenablement. Ceci fut même préconisé et s'appelait la rabdologie (Rabdo : la baguette).

	2	4	5	
	0	0	0	1
	2	4	5	
4	1	2	3	7
	4	8	5	
2	1	2	2	5
	0	0	5	
	8	7	5	

Les produits partiels peuvent se faire sans ordre. On achève en additionnant selon les bandes diagonales.

Cette méthode a été très certainement inspirée, au cours du Moyen-Age, par la méthode des astronomes persans (voir notre brochure Mathématiques et Islam).

De ce procédé dérive la

— Méthode dite "Vénitienne"

qui nécessite la retenue

$$245 \times 175$$

$$\begin{array}{r}
 245 \\
 1225 \\
 1715 \\
 245 \\
 \hline
 42875
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 \\
 7 \\
 1
 \end{array}$$

— Méthode dite "du Château"

qui permet de commencer les opérations par la gauche. La "silhouette" de l'opération évoque (?) le donjon d'un château-fort

$$\begin{array}{r}
 245 \\
 175 \\
 24500 \\
 17150 \\
 1225 \\
 \hline
 42875
 \end{array}$$

— Méthode "per copa"

On la trouve, en particulier dans un ouvrage paru en 1556 à Mexico et qui est peut être le plus ancien livre de Mathématiques du nouveau monde. Le détail des opérations successives, où tous les résultats partiels sont

écrits, permettra au lecteur de retrouver le fil directeur (345 x 427)

345	4(27)	345	42(7)	345	427
126	0	126	00	126	005
12		12	8	12	88
		06	1	06	13
		0		0	1
				2	2
				147	315

Le nom est dû à la forme finale : "Copa" coupe en Espagnol.

Mais notre disposition actuelle se trouve dès cette époque. Il semble que les procédés ici présentés aient vu le jour dans un souci de mettre à la portée du grand public, le calcul nécessaire, en particulier, au commerce. Vulgariser ("vulgus" le grand public) ne doit pas être pris dans un sens péjoratif même si l'homme de l'art usait d'une technique plus élaborée comme nous disons maintenant.

La division

Elle va constituer une opération où le spécialiste va régner jusqu'au 18e siècle. Un livre très répandu, écrit par Parent et daté de 1718 distingue :

— La méthode italienne
Elle se pose ainsi avec produits
et différences successives
(37587 : 153)

$$\begin{array}{r}
 \text{— } 375 \ 87 \quad 245 \\
 \bullet 153 \\
 \hline
 306 \\
 \hline
 698 \\
 153 \\
 \hline
 612 \\
 \hline
 867 \\
 153 \\
 \hline
 765 \\
 \hline
 102
 \end{array}$$

— La méthode française
Les places des diviseurs et du quotient ne sont pas encore les nôtres

$$\begin{array}{r}
 \bullet 153 \\
 \text{— } 375 \ 87 \quad (245 \\
 0698 \\
 0867 \\
 102
 \end{array}$$

— Mais la méthode la plus usitée paraît encore être, à l'époque, (lorsqu'on n'a pas recours à des tables de résultats) la méthode espagnole.

Les opérations partielles successives ont été séparément figurées pour aider à la compréhension :

On coche les chiffres chaque fois qu'ils sont utilisés

6	28	1
179	69	3
— 37587 (2	1796	280
• 153	37587 (24	691
	1533	17962
	• 15	37587 (245
		1533
		153
		• 1

La première étape est détaillée ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 375 \ 87 \quad (2 \\ \cdot 153 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ \hline 375 \ 87 \quad (2 \\ \cdot 153 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 179 \\ \cdot 375 \ 87 \quad (2 \\ \cdot 153 \end{array}$$

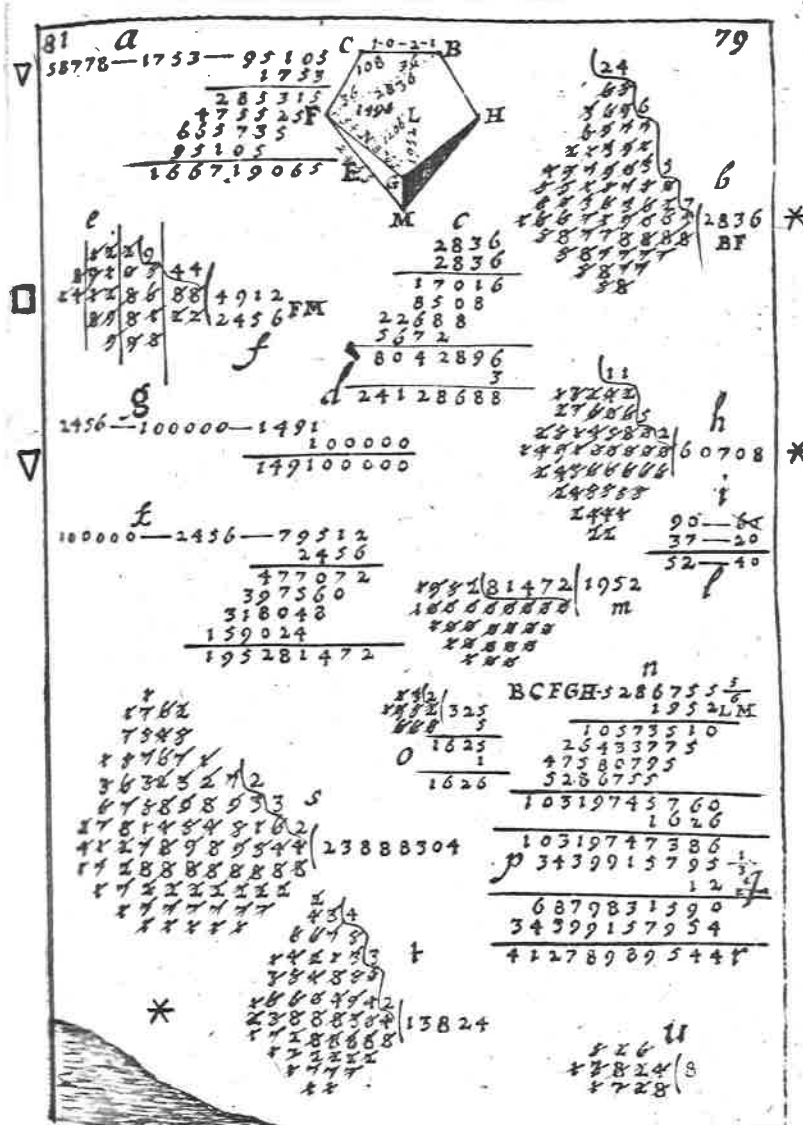
(En 1703, dans une communication à l'Académie, Leibniz dispose de la sorte une division).

- Enfin n'oublions pas qu'au 18^e siècle le système décimal est loin de s'être imposé. Le résultat de 37587 divisé par 153 est $245\frac{102}{153}$.

— Nous reproduisons maintenant une page d'un livre de 1704 en usage dans des écoles militaires du roy.

On y trouve outre des multiplications et des divisions* une racine carrée □ et des calculs de proportionnalité ∇.

On notera l'écriture des quotients . Le trait de fraction n'est pas sur la ligne mais à mi-hauteur des chiffres de l'entier. Cet usage graphique subsiste en Angleterre.



LA NOTATION DES FRACTIONS (1)

La façon de noter les fractions a suivi une histoire pleine de détours comme celle de la notion de fraction elle-même. Il n'est pas question de relater ici cette dernière mais on ne saurait oublier que, en gros, trois problèmes, sinon trois stades peuvent être distingués. Partager l'unité - Prendre plusieurs de ces parts - Exprimer le quotient exact d'un entier par un autre. Ainsi partager un en cinq parties égales, prendre trois de ces parties, diviser trois par cinq.

Les plus anciens hiéroglyphes égyptiens ont des symboles particuliers pour les partages les plus courants de l'entier: C pour $\frac{1}{2}$, X pour $\frac{1}{4}$, Q pour $\frac{1}{3}$. Ensuite la notation s'est affinée. Pour les fractions de l'entier on surmonte ce qui est notre dénominateur (2) de O ; III pour $\frac{1}{6}$; et plus tard seulement d'un point: = est 8 et = est $\frac{1}{8}$. (papyrus Ahmès).

Mais alors $\frac{5}{6}$? $\frac{5}{6}$ c'est: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. La décomposition d'un quotient en une somme de fractions de l'unité. (fractions archimédiennes) constitue une part très importante de l'arithmétique antique.

Chez les Grecs on rencontre la même idée :

$$'8 = 3 \quad ''8 = \frac{1}{3} \quad 'e = 5 \quad ''e = \frac{1}{5}$$

Chez les Romains on use essentiellement des fractions pour les paiements. La pièce de monnaie l'"as" se divise en douze "unciæ" (onces). Il suffit alors de donner un nom à tous les douzièmes (3). Pour ce qui n'est pas monnaie, on procédera par analogie. Les écoliers romains ne manquaient pas de travail!

Pour les grecs d'Alexandrie la notion a évolué $\frac{3}{5}$ s'écrit $'8''e$ (Héron). On en trouve encore trace à Byzance sous la forme 8^e . (le dénominateur en exposant).

Faisons un saut. Allons en Inde ; dès le 10^e siècle on trouve $\frac{3}{5}$ tout simplement. Les arabes apportent le principe et les copistes occidentaux transcrivent $\frac{III}{V}$. On trouve même vers le 11^e siècle $\frac{III}{V}$ pour ce que nous écrivons $2 + \frac{3}{5}$ qui déjà est le résultat de la division de 13 par 5 (4).

(1) Fraction, fractio du latin frangere, fractum (rompre). Mais sur le radical "ruptus" (même sens) on a utilisé en français : "nombre rompu" (16^e et 17^e siècle), en espagnol "rocto" (Ortega) et parallèlement "broken number" en anglais. Boèce et Adélarde de Bath usaient de "Minucia".

(2) Les termes "numerator" et "denominator" se trouvent dès le Moyen-Age chez les copistes latins des arabes. On trouve également "nominator" et "denominator" "numerus et base", etc...

Il semble que le plus ancien document où apparaisse le trait de fraction soit dû à Al Hâssar vers 1150, imité en cela par Leonardo de Pise vers 1200. Mais ceux-ci restent isolés et non suivis. Par ailleurs ce même Leonardo écrit $\frac{3}{5} 2$ (de droite à gauche comme ses maîtres arabes !).

Le trait ne va se généraliser qu'au 17e siècle malgré d'autres essais. (5)

Au 15e siècle on trouve encore des symboles pour les partages usuels. Par exemple, en Angleterre $\sim, \bullet, \curvearrowright$, respectivement pour $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

Et puis reparait le trait. Widman, fin 15e siècle écrit $\frac{3}{5}$ mais Nemorarius, à la même époque imprime ab pour $\frac{a}{b}$, car le problème s'est placé maintenant sur un plan technique. Si $\frac{3}{5}$ est bien devenu le quotient de 3 par 5, c'est-à-dire le résultat de l'opération qu'on va noter $3 : 5$ ou $3 \div 5$, il n'est pas commode pour l'imprimeur qui ne possède pas beaucoup de caractères de dimensions différentes, d'écrire $\frac{3}{5}$. En effet, cela l'oblige à sauter des lignes et le papier est cher. (La machine à écrire avec différents interlignes n'est pas née !). Il faut avoir recours à des caractères plus petits pour les fractions afin de rester dans la ligne.

Ainsi $2\frac{3}{5}$ et $2\frac{3}{5}$

On cherche autre chose : $\frac{3}{5}$, $3\overline{5}$ et $3/5$. Dans cette dernière écriture, d'aucuns voient l'abréviation d'origine italienne de 3 f 5 pour 3 fratto 5 (toujours le sens de rompu).

Les petits caractères se trouvent d'une façon assez usuelle dans les ouvrages actuels anglo-saxons, tant il est vrai que, dans ces pays, une longue dispute s'est établie entre les tenants du "solidus", la barre en diagonale, et ceux du "colon" ($\div$).

Morgan préconisait $3/5$ et Cayley usait de $3 \div 5$. En 1915, La London Mathematical society recommandait le "solidus".

On passera sur les arguments respectifs, nombreux, mais il faut retenir que le "solidus" est une pièce de monnaie romaine dans laquelle les anglais voyaient l'ancêtre de leur shilling (ancienne division de la livre sterling en 20 shillings notés justement 20/) et que le colon est le symbole anglo-saxon de la division (voir les machines à calculer). On retrouve donc là,

(3) Ainsi "deunx" : 11 onces, "dextans" : 10 onces mais "quadrans" : 3 onces car $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ et "sextans" : 2 onces ($\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$). Il y avait aussi "simuncia" (demi-douzième) et "sicilicus" (quart de douzième, $\frac{1}{48}$) ...

(4) Ne pas oublier que, tant que la division décimale ne l'emportera pas (fin du siècle) le résultat de la division de 23 par 7 est : $3\frac{2}{7}$.

(5) Tartaglia qui s'en sert vers 1556 l'appelle "virgoletta".

certainement la trace de deux conceptions de la notion de fraction mais traitées sous l'angle de la technique de l'impression.

Terminons cet article avec le symbole du pourcentage.

Un anonyme italien, en 1425, écrit P100 puis P C pour "per cento", ce qui est devenu C tout court, puis $\frac{o}{o}$ (en 1650) et de là %.



EVOLUTION DES SYMBOLES

ADDITION - SOUSTRACTION

Seuls dans l'Antiquité, les Egyptiens possédaient un symbole pour indiquer une addition (2 jambes tournées vers l'avant) et une soustraction (2 jambes tournées vers l'arrière).



pour l'addition

Longtemps on s'est contenté de juxtaposer les deux nombres à ajouter, tandis que divers signes indiquaient une soustraction. Le besoin ne se faisait pas sentir d'utiliser d'autres opérations.

A la fin du 15^e siècle, sont apparus simultanément plusieurs symboles :

En Italie et en France, Pacioli et Choquet utilisent $\tilde{p}$ et $\tilde{m}$ (ou $\overline{p}$, p , $\overline{m}$, m) pour l'addition et la soustraction

$\frac{30 \overline{m} 1^1}{1^2 \overline{p} 1^1}$ représentent la division de $30 - x$ par $x^2 + x$

En Allemagne Widmann préconise + et -

$\frac{360 \mathcal{R}}{144 \mathcal{Q} - 6 \mathcal{R}}$ pour $\frac{360 x}{144 - 6x}$

Après une compétition entre les deux types de notation, Viète en France (1591) et Calvius en Italie (1608) imposent le + et -.

Dès leur apparition, ces symboles + et - auront un double emploi : les opérations d'addition et soustraction, mais aussi en algèbre l'indication du signe des nombres. L'opposition faite par certains au double emploi des symboles conduira aux propositions

+ et - pour les opérations

$\oplus$ et $\ominus$ pour les signes des nombres.

Et d'autres projets qui seront tous rejetés.

On cherchera, sans succès, à remédier à la confusion due à cette double signification.

Divers aspects des symboles :



MULTIPLICATION

On rencontre très tôt un symbole ou un mot pour indiquer une multiplication. Les premiers symboles vraiment utilisés seront "M" par Stifel et "in" par Viète durant le 16e siècle.

Stifel écrira 3 ① M sec ① M ter ② pour $3xyz^2$
et Viète A in B pour AB

Ce "in" sera traduit par "en" par Pascal et Fermat. La croix de Saint André, le symbole X, a tout d'abord été utilisé dans des résolutions de problèmes par deux fausses positions, ou dans les preuves par 7, 9, 11.

C'est Oughtred, dans la première moitié du 17e siècle, qui l'utilise pour la multiplication. Il trace, d'ailleurs, des symboles x plus petits que ses symboles + et - .

Il sera concurrencé par le point, que préférera Leibniz, à la fin du 17e siècle, à cause de la confusion entre le x de la multiplication et le x de l'inconnue. L'emploi s'en était déjà un peu répandu auparavant. Ce n'est pas le premier symbole que Leibniz utilise pour la multiplication. Pendant des années, la lettre C placée  signifiera qu'il y a produit entre 2 quantités.

L'adoption générale de la notation "point" en Europe se fera au 18e siècle grâce à Euler et Stirling.

DIVISION

Les Hindous avaient l'habitude d'écrire le diviseur sous le dividende, le dénominateur sous le numérateur, sans lien entre eux.

Les Arabes, dès le 12e siècle, possédaient le trait de fraction. Pourtant Stifel, au 16e siècle, emploie D pour marquer une division.

$\frac{5x^2}{y} z^2$ s'écrit 5 ② D sec ① M ter ②

Chuquet, puis Rahn en 1659, se serviront de . Mais ce symbole étant beaucoup utilisé pour la soustraction, il ne sera pas retenu.

En 1668, Leibniz essayera la lettre C placée , qu'il abandonnera pour : (vers 1684) et enfin — vers 1710.

EGALITE

Le trait entre 2 quantités qui représentait l'égalité chez les Egyptiens, a été longtemps remplacé par un mot ou une abréviation (ae ou aeq) d'origine latine (aequus signifiant égal à).

A la fin du 15e siècle, plusieurs mathématiciens, dont Regiomontanus

et Pacioli, reprennent le trait en augmentant sa longueur. Notre symbole = apparaît grâce à Recorde vers 1557, les deux traits ayant une longueur beaucoup plus importante qu'aujourd'hui. Il n'est pas adopté de façon générale. Descartes lui préfère le symbole ∞ qui tirerait son origine de sa ressemblance avec æ.

La compétition entre les deux symboles durera jusqu'à la fin du 17e siècle où le symbole = triomphera grâce à Newton et Leibniz.

Sa forme variera du $\equiv$ de Recorde
au = de Weiger

en passant par toutes les longueurs.

On imprimera le signe d'égalité sous la forme $\rightleftharpoons$ ou $\rightleftarrows$.

Ce symbole possède d'ailleurs dans certains manuscrits, une autre signification : celle de la différence arithmétique

$x = y$ voulant dire $|x - y|$

PUISSANCES

Après un emploi fréquent de Cosa (co) pour x , censo (ce) pour x^2 , etcubo (ω) pour x^3 , deux options se dégagent :

-. Ceux qui n'élèvent à une puissance qu'un seul élément : ils omettent alors d'écrire cet élément et ne signalent que la puissance à laquelle ils l'élèvent.

Choquet écrit 1^1 pour x , 1^2 pour x^2 , 1^n pour x^n

Bombelli écrit 10^2 pour $10x^2$

Stevin écrit 5^2 pour $5x^2$

-. Ceux qui élèvent plusieurs éléments à des puissances différentes et qui désignent donc ces éléments

$A(4) + B(4) + 4A(3) \text{ in } B + 6A(2) \text{ in } B(2) + 4A \text{ in } B(3)$

représente

$$A^4 + B^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3$$

C'est Descartes qui créera la notation en position élevée des exposants positifs (bien qu'il continue à employer aa à la place de a^2).

Il écrit vers 1620 $36 - 3x - 6x^2$ aequ $1x^3$ pour $36 - 3x^2 - 6x = x^3$
mais vers 1637 $y^3 - 9y^2 + 13y - 12\sqrt{2} + 15\infty 0$

Stifel utilisera la notation exponentielle même pour des quantités connues et remarquera que $a^0 = 1$.

Les exposants négatifs et irrationnels en position élevée sont dus à Newton.

La notation exponentielle permettra à l'algèbre des progrès rapides.

RADICAUX

Il y a eu trois tendances pour la racine carrée.

Un groupe $\mathcal{R}$, symbole provenant de la première lettre du mot radix (qui en latin signifie la racine d'un arbre). Il sera beaucoup utilisé au 16e siècle avant de tomber dans l'oubli.

$\sqrt{14 + \sqrt{180}}$ s'écrira $\mathcal{R}. 14 . \tilde{\mathcal{P}} \mathcal{R}. 180$.

Un groupe ℓ symbole provenant de la première lettre du mot latus (qui en latin signifie côté; possédant la surface a^2 d'un carré on cherche la longueur a du côté). Ce symbole ne sera jamais très populaire, surtout après l'introduction des logarithmes qui utilisent la lettre L . De plus, il faudra constamment faire la différence entre $\ell 5$, qui signifie $\sqrt{5}$, et 5ℓ qui représente pour certains, 5 fois une quantité inconnue.

Un groupe $\sqrt{\quad}$ provenant de wursel (qui en allemand signifie racine). Il évoluera en $\sqrt{\quad}$

(le trait horizontal regroupant tous les termes figurant au radicande) (1)

puis en $\sqrt{\quad}$

Il est à remarquer que Descartes préférera $\sqrt{a}$ à la notation $a^{1/2}$ qu'il a pourtant introduite.

(1) Le trait horizontal a précédé nos parenthèses $a.\overline{b+c}$ signifiait $a(b+c)$

Époque	Addition soustraction	Multiplica- tion	Division	Fraction	Égalité	Inégalité $A > B$	Puissances	Racine carrée cubique	Inconnue
Antiquité					$\parallel$ aeg		puissances fractionnai- 1^m pour a^m	$\sqrt{\quad}$	x
12 ^e -14 ^e s	$\approx$ $\approx$				---			$\sqrt[3]{\quad}$	∞
1500	$+$	$\times$	$\div$	trait de fraction	$\equiv$ $\sqsubset$		$\frac{1}{2}$ pour $a^{\frac{1}{2}}$ $\frac{2}{3}$ pour $a^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{\quad}$	x
1550					∞	$A > B$ $A \sqsubset B$	notation exponentielle	$\sqrt[4]{\quad}$	a ①
1600								$\sqrt[11]{a^{11}}$	z, y, ∞
1650									
1700		$\cdot$	$\div$		$=$	$A \equiv B$	exposants négatifs-	$\sqrt[3]{\quad}$	

LES TRIBULATIONS D'UNE EQUATION

Si en 1978 on demande à l'élève Dubois d'étudier l'ensemble des réels racines de l'équation $4x^2 + 3x - 10 = 0$ il écrira, car c'est un élève appliqué :

$$\{x : x \in \mathbb{R}, 4x^2 + 3x - 10 = 0\}$$

Sait-il que ce problème, classique, ne s'est ni toujours ainsi présenté, ni ainsi écrit ?

L'histoire de la résolution des diverses équations algébriques a été relatée dans la brochure "Egale Zéro". Dans ces pages sera évoquée la formulation même du problème posé par la recherche d'un nombre possédant certaines qualités décrites dans un énoncé.

Voyons d'abord un peu de vocabulaire :

- Problème vient du grec "**Προβλημα**" qui est "la question à résoudre"

- Cicéron parle de "*pecunias aequari*" pour "égaler les fortunes", Tite-Live de "*aequatio juris*" pour "l'égalité des droits" et César de "*aequato periculo*" pour "à péril égal". On trouve ainsi l'origine commune des mots égal et équation. Le sens d'"égalité à établir" pour équation est assez récent. Arnauld parle de "la solution d'un problème par équations" et Fermat de grandeurs "à comparer par adéquation".

- Pour les romains "*solutio, solutus*" évoquent l'idée de "ce avec quoi on est quitte" (le paiement d'une dette pour Cicéron). Ensuite le mot a pris le sens d'explication. La solution d'un problème tient de tout cela.

- Mais l'inconnue ? La racine d'une équation ?

Voyons d'abord racine. Le mot vient-il de "ratio" ? Certes ratio c'est la raison, le raisonnement : "*necessaria mathematicorum ratione*" -par la rigueur du raisonnement mathématique- écrit Cicéron (1). Mais "ratio" a d'abord été le résultat du calcul "*ratione inita*" -tout compte fait- écrit César. Or la racine d'une plante est "*radix*" qui a donné radical. On peut, peut être, trouver l'idée directrice dans le choix de ces vocables à l'aide des faits suivants : Si pour les grecs 7 est le côté d'un carré d'aire 49, pour les indiens et, après eux, les arabes 49 "apparaît comme un nombre qui éclate au delà de 7 tel un arbre au dessus de sa racine" (2). De ces

(1) Mathematica, **Μαθηματικός** est un mot grec; **Μαθημα** : l'étude

(2) Image évoquée par Cecil B. Read d'après l'ouvrage du mathématicien arabe Abu Kamil (vers 900).

deux conceptions a pu naître "racine carrée". Alors l'inconnue ? C'est un substantif récent mais dès le 17e siècle Arnauld parle du "nombre inconnu".

Au Moyen-Age le nombre à chercher est souvent appelé "res". Res c'est l'objet, l'être, l'avoir -et beaucoup de problèmes consistent à déterminer un avoir, une chose possédée- Or le calcul raisonné commençant à sortir des universités, le discours ne se fait plus uniquement en latin. En Italie on parle de "cosa" et ceux qui font ce que nous appelons du calcul algébrique sont, un temps, désignés sous le vocable de "cosistes" -Cosa dérive du latin "causa" qui est tout à la fois la cause, la position, le cas(3).

Peut être ne faut-il pas trop vite penser qu'il s'agit là simplement d'une autre traduction de la même idée.

Avant le calcul algébrique, la grande méthode de recherche était la supposition. "Le triple d'un nombre vaut autant que sa moitié plus vingt. Quel est-il ?"

On disait : Posons que ce nombre soit dix. Or trois fois dix dépasse cinq plus vingt. Posons un nombre plus petit etc... et toutes les règles du calcul avaient pour rôle de diminuer le nombre d'essais à faire, de "faux-nombres" à étudier. Ne dit-on pas les fausses positions ? La méthode s'appelle, en français, "la false".

Par contre, les cosistes n'étudient qu'un cas, ils ne font des calculs qu'à partir d'un cas réputé vrai par avance : le triple vaut autant que la moitié plus vingt, donc six fois le "cas" - la bonne position -vaut autant que ce "cas" plus quarante, donc cinq fois le "cas" vaut autant que quarante, donc le cas vaut huit.

Il y avait une situation nouvelle. Il fallait sûrement un mot nouveau. En Italie on employa "cosa", en Allemagne et en Angleterre "Coss" (4) (5).

Nous avons déjà vu que 49 est le "carré" de 7, c'est-à-dire un être géométrique. Au reste 7 a longtemps été le "latus" (côté d'un terrain) de 49. Toujours des grandeurs concrètes. Ne parle-t-on pas encore de terme "rectangle" pour désigner un produit tel que ab ?

-
- (3) Pour Cicéron "Causam fingere" signifie : prendre comme prétexte et "causam agere" : défendre une thèse. La différence entre res et causa apparaît dans "de re et de causa judicavit" : il a prononcé sur le fait et sur la cause. C'est au 10e siècle que dans les textes juridiques causa prit définitivement la place de res ; et, de là : chose.
- (4) Le mot "coss" est étranger à l'allemand. Ding (chose) ne paraît pas avoir été employé.
- (5) Pour ne pas voir uniquement une chose dans cosa, il faut penser que Recorde écrivit en 1557 un des premiers livre d'algèbre en anglais et le nomma "The whetstone of witte" c'est-à-dire "La pierre à aiguiser l'esprit" or une pierre à aiguiser se dit en latin "cos".

Enfin, Algèbre vient d'un terme arabe "al gabr" provenant lui-même de l'assyrien "gabru" qui désigne un moyen de calcul.

En s'en tenant là, dans cette vie du langage mathématique, ces quelques exemples évoqueront quand même tous les problèmes rencontrés, toutes les difficultés qui ont dû être résolues, tous les essais, toutes les hésitations sur le chemin qui a mené à l'outil solide. Mais tout cela n'est-il pas justement la vie ?

Revenons maintenant à l'équation de l'élève Dubois et, en remontant le cours des ans voyons comment ses ancêtres, et les nôtres, abordaient le problème.

Le père de Dubois ne parlait sans doute que de l'équation E : $4x^2 + 3x - 10 = 0$. On peut dire qu'il en était ainsi dans la famille depuis le 18^e siècle.

Descartes, lui, vers 1640 notait : $4xx + 3x \infty 10$.

L'habitude d'écrire "zéro" comme second membre, préconisée dès 1600 par l'anglais Harriot n'était pas encore coutumière.

Si on écrivait x^3 , x^4 , l'usage de xx à la place de x^2 se retrouve encore au 18^e siècle dans l'Encyclopédie par exemple (Pour quelle raison ?)

Huygens à la fin du 17^e siècle n'avait, non plus pas encore adopté le symbole = que Recorde en 1557 préconisait dans le texte suivant :

"Pour éviter la répétition des mots "est égal à" j'userai d'une paire de parallèles ou lignes jumelles d'une certaine longueur, ainsi : $\equiv$ parce que rien n'est plus pareil que deux jumeaux."

Et pourquoi l'inconnue par x ? On a dit que Descartes estimait qu'il suffisait de trois dimensions pour étudier le monde alors il faisait, dans ce but, usage des trois dernières lettres de l'alphabet, en commençant par x (?)

Harriot en 1631 écrit : $4aa + 3a = 10$. En cela il suit l'idée du français Viète qui réserve les voyelles pour les termes inconnus et les consonnes pour les termes connus. (où nous écrivons $2mx$ il écrit $2ba$).

A la même époque le flamand Stevin note : $4 \textcircled{2} + 3 \textcircled{1} \text{égales } 10$, et son disciple Girard $4(2) + 3(1) = 10$. Rien n'est encore fixé. Alors pourquoi un second membre non nul ?

C'est tout simplement que les nombres négatifs n'ont pas encore pleinement droit de cité. On est bien obligé de s'en servir mais avec réserve (6). Viète qui est pourtant considéré comme un des pères, sinon le père,

(6) La terminologie positif, négatif serait apparue pour la première fois en 1500 chez un certain Widdmann.

de l'algèbre moderne avec l'usage des lettres pour désigner des grandeurs (7) disait que notre équation n'avait qu'une racine : $\frac{5}{4}$ (qu'il appelle nombre "rompu"-fractionnaire). Quant à "notre" autre racine (-2) c'est un "nombre impossible", une "racine renversée" ou un "moindre que rien" selon les auteurs. Dans sa géométrie Descartes dit une "racine fausse".

Donc notre équation possède une racine vraie rompue ($\frac{5}{4}$) et une racine fausse (-2). (8)

On insistera encore, en notant qu'il n'est pratiquement pas dans les habitudes de rechercher un nombre pour lui-même. On recherche la longueur d'une ligne, le poids d'un sac de grains, le prix d'une étoffe et bien sûr "moins deux pieds", "moins deux livres", "moins deux écus" cela n'a pas de sens comme cinq quarts de livre. On écarte donc les nombres négatifs. L'équation $4x^2 - 3x - 10 = 0$ se serait écrite $4x^2 = 3x + 10$ et $4x^2 - 3x + 10 = 0$, $4x^2 + 10 = 3x$.

Contemporain de Harriot, l'anglais Oughtred (un des créateurs de la règle à calculs (9) écrit encore vers 1630: $4Zq + 3Z = 10$.

Viète, vers 1600 : $4 \text{ in } Aq + 3 \text{ in } A \text{ aequatur } 10$ (10). Pierre de la Ramée, premier professeur de Mathématiques au Collège Royal (ancêtre du Collège de France) notait vers 1570: $4 q + 3 \ell \text{ aequatus } 10$. On voit ainsi que "la chose" et son carré sont des êtres en quelque sorte différents. Pour La Ramée q c'est le carré "quadratus" et ℓ son côté "latus". Chez Oughtred comme chez Viète un mélange subsiste. En effet l'idée des puissances d'un nombre si elle est envisagée et comprise continue à poser des difficultés quand il s'agit d'une grandeur. IL faut donc préciser cette somme de longueur et de carrés voire de cubes et de surcubes à côté des nombres non "dénommes" ou non "dénominés". (voir les documents A et B).

Vers 1530-1590 notre équation s'écrivait alors :

$$4z + 3x \text{ esgault } 10 \quad \text{Léon d'Anvers (11)}$$

-
- (7) Il importe de bien noter ici que, avant Viète on usait déjà de symboles pour désigner les inconnues mais que la grande idée de celui-ci fut de désigner également les nombres connus par des lettres ce qui simplifiait l'écriture en généralisant le discours et facilitait les discussions.
- (8) De même le vocable "nombre sourd" au sens de nombre qu'on n'entend pas, qu'on ne comprend pas, désignera longtemps encore les irrationnels. Fermat écrit en 1638 : "Des nombres ou sourds ou rationaux".
- (9) En fait Oughtred inventa un cercle à calculs décrit dans un ouvrage de 1632. "Cercle of proportions" et perfectionna en 1622 la règle ébauchée par Gunter deux ans auparavant.
- (10) "in" pour noter la multiplication.
- (11) x ne serait-il pas l'ancêtre du x de Descartes ? On remarque aussi que certains éprouvent le besoin de préciser les nombres connus, non liés à "la chose" (voir également le document B).

4 $\tilde{p}$ 3 γ ——— 10 α	De la Roche de Lyon
4 $\tilde{p}$ 3 R m 10	Peletier du Mans
4 $\diamond p$ 3 p L 10	Butéon du Dauphiné

pour ne parler que d'auteurs de langue "françoise" (12).

Il apparaît alors assez que l'écriture de l'équation est presque ce que nous appellerions une sténographie.

x^2 est un symbole mais γ est une sténographie.

Sont aussi des sténographies (vers 1515):

4 Se + 3 Pri is ghelijc 10 (Flandres)

4 $\square e$ 3 C^o ——— 10 numeri (Italie)

En 1499 Pacioli écrivait :

"quattro $\bar{q}$ drat° che $\bar{g}$ ioto agli tre n° facia 10"

(4 carrés joints à 3 nombres font 10)

Et, bien sûr, à l'Université de Paris, fidèle au latin on eût écrit

"Si tres res et quattuor censi coequentur decem numeris..."

La place est entièrement au discours et du reste, en l'absence de livre il faut apprendre par coeur et la mémoire retient mieux une phrase bien balancée (13).

Ces lignes ont voulu montrer combien l'évolution s'est faite pas à pas même si, après coup, on découvre certains précurseurs franchissant d'un coup des étapes, mais qui n'ont pas été entendus, tel Nicolas Chuquet qui en 1490 aurait transcrit notre équation :

4^2 p 3^1 égault 10^0

Mais, est-on, alors en possession d'un outil de calcul, ou seulement, d'une abréviation commode pour bien énoncer un problème ? Entre 3^1 in 4^1 et 12^2 il y avait toute une prose (14).

(12) Les signes + et - ne sont pas encore partout apparus- voir les articles correspondants aux signes des opérations.

(13) En 1447 Gensfleisch dit Gutenberg a imprimé un calendrier astronomique mais il a fallu attendre 1482, à Venise, pour voir l'impression d'un texte scientifique : les éléments d'Euclide.

(14) De même au 3e siècle près de Diophante on aurait écrit :

$\Delta^r \gamma$ $\epsilon \delta$ $\epsilon \sigma \tau \epsilon$ ϵ

C'est-à-dire trois dynamis quatre arithmos sont dix. On trouve également des abréviations chez les indiens.

Pour achever ce survol il faut également rappeler que le fait même de symboliser une résolution a été source de discussions dès l'origine.

Hérigone vers 1635 écrit :

"J'ai inventé une nouvelle méthode pour formuler les démonstrations, résumée et intelligible, sans usage de quelque langage".

Mais Hobbes, le philosophe, rétorque vers la même époque :

"Les symboles sont pauvre mesquinerie, même en tant que nécessaire échafaudage de démonstration. Les symboles, même s'ils raccourcissent l'écriture, ne font pas comprendre plus vite que si c'était écrit en mots... car il y a un double travail de l'esprit, l'un de réduire les symboles en mots, si sont eux-mêmes symboles, l'autre d'attendre aux idées dont elles sont le signe."

—./—

Document A :

Page extraite du livre

livre de Léon

d'Anvers (1586)

où l'on voit ap-

paraître, à côté

des abréviations

de mesure des

grandeurs, des

notations

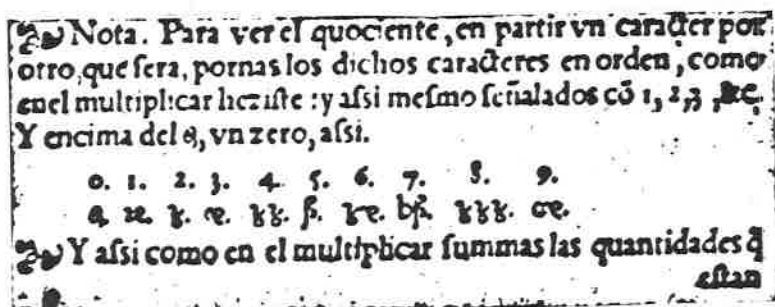
opératoires.

LES CARACTERES DE CE VOLVME PAR LEURS ABBREVIATIONS.

℥. dal. Δ. fo. pat. ℥. g. X. hell. m. g. de Holl.	denote	1. liure de gros, ou de flandre de 20. ℥ . ou de 240. g .
		1. daler de 30. patars dont les 4. font 1. ff .
		1. escu d'Italie ou de France.
		1. florin de 20. patars au pays bas. (fait 2. g .
		1. patar dont les 20. font 1. ℥ . ou les 6. 1. ℥ & 1. patar
		1. folz, dont l'un vaut 6. patars ou 12. g .
		1. gros ou denier, dût les 12. font 1. ℥ . ou les 2. vn pat.
		1. creutier, dont en Allemagne les 60. font 1. fo .
		1. heiler, dont les 2. font 1. g . en Allemagne.
		1. maille, de lesquels les 24. font 1. pat. ou les 12. vn g .
1. denier de Hollâde, dût les 16. font 1. pat. ou 8. au g .		
℥. ℥. lot. g. q.	signifie	1. centnier ou quintial, ou bien 100. ff . de poids.
		1. liure de poids, de 16. onces, ou de 32. lots.
		1. lot, ou demy once, dont les 2. font 1. once, ou 32. en 1. ff .
		1. denier de poids, dont on use en Allemagne de 4. au lot.
		1. quintlin, dont les 4. font 1. demy once.
Les grans & grens au poids d'or, font aussy ainsi notez.		
℥. ℥. ℥. ℥. ℥. ℥. b.℥.	vaut	1. dragme, ou nombre non dénommé.
		Première position, ou vne chose.
		1. quarré, ou ℥ . multiplié par ℥ .
		1. cube, ou 1. ℥ par 1. ℥ . ou 1. ℥ . 2. fois en soy multiplié.
		quarré de quarré, ou ℥ . par 1. ℥ . multiplié.
		surfolide, ou nombre 5. fois en soy multiplié.
		quarré multiplié par 1. ℥ .
bisurfolide, ou nombre 7. fois en soy multiplié.		
+. denote plus. & - signifie moins.		
✓ est signe d'extraction de quelque racine. Comme la ✓ de 100. est 10. Et ✓ de 125. est 5. Item ✓ de 1296. est 6. Aussy ✓ de 16807. est 7. Finalement ✓ de 117649. est 7. aussy, & ainsi de tous autres.		

Document B :

Extrait d'un livre d'"arithmétique algébrique" de Marco Aurel (Valencia 1552) où pour faciliter les opérations sur les "puissances" d'un nombre on trouve la liste des caractères utilisés



Pour trouver le quotient en divisant un caractère par un autre, mets ces caractères en ordre, de même pour la multiplication. Tu écris ainsi 1, 2, 3 etc avec zéro au dessus de Q. Alors, de même que pour multiplier tu ajoutes les nombres (au dessus), ...

TROIS MOTS DE TRIGO

Sinus :

Il semble que ce soit sous l'influence des arabes, eux-mêmes à l'imitation des indiens que, au lieu de considérer la mesure de la corde d'un arc de cercle on ait utilisé celle de la demi-corde : "jaib" qui a été traduit par "sinus" (pli) ou "sine".

Comme abréviation Cavalieri écrit : si, Oughtred : S, sin apparaît chez Herigone (1634).

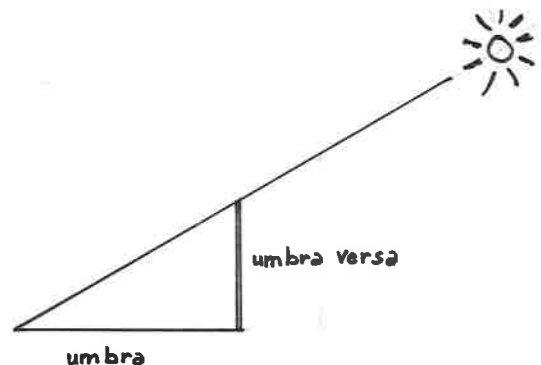
Cosinus :

On trouve chez Regiomontanus "sinus rectus complementi", Viète "sinus residuae", chez Gunter "co-sinus" et enfin "cosinus" chez un certain John Newton (1658). Leibniz parle encore du "sinus du complémentaire".

Abréviation : sco (Oughtred), Σ (Wallis) et cos vers 1674.

Tangente :

Très tôt les astronomes paraissent avoir beaucoup plus utilisé la notion de tangente que celle de sinus. En effet pour mesurer la hauteur du soleil dans le ciel, le plus ancien procédé fut celui de la mesure de l'ombre portée par un bâton, sur le sol. On trouve un usage des "ombres" dès avant la période grecque. Du reste les géomètres grecs, sauf dans la mesure des pyramides attribuée à Thalès, ne firent pratiquement pas usage de ces notions. Les termes "umbra" et "umbra versa" furent encore en usage au 18^e siècle en particulier dans les traités relatifs aux cadrans solaires (gnomonique). Mais Viète nomme "sinus foecundarum" puis "foecundus" (surabondant) le segment "tangens peripheriae" qui est devenu "tangens" puis "tangente".



Abréviations : T, ta. En France on utilise tg mais les anglo-saxons conservent tan comme Girard (1626).

On notera que Copernic use souvent de la notion de "sécante" qui est l'inverse du cosinus.

Ptolemée vers 150 avait une table des cordes.

Les indiens vers l'an 1000 disposaient de tables des "ombres" puis des sinus.

On s'accorde à penser que le premier ouvrage de trigonométrie plane, science détachée de l'astronomie et de l'arpentage est celui du persan Nasî ed din vers 1250.

En Europe on attendra Regiomontanus (1460) pour avoir un traité complet.

Henrion qui introduisit les logarithmes en France, en 1626, a publié en 1623 un ouvrage consacré aux règles pratiques de trigonométrie.

Le livre a un format de 5,5 x 10,5 cm et est épais de 2cm ! En voici la reproduction de quelques pages.

**SIN VVM,
TANGENTIVM,
ET SECANTIVM,
Canon manualis,**

Suppletur à B. PIRISCO, & emendatus in hac Editione, in qua adduntur omnia præcipua ac necessaria, quæ ad Trigonometriam spectant, de prompta ex radiis, & doctrinæ triangulorum tam rectilineorum, quàm sphericorum

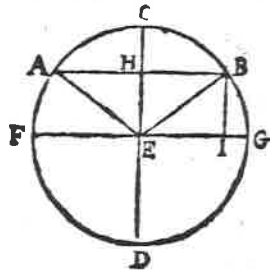
**DESIDERII HENRIONI
Mathematicæ Professoris.**



**PARISIIS,
Apud Melchiorum Mondicre.
M. DC. XXIII.
CVM PRIVILEGIIS.**

6. Arcus ipsius anguli BAC.
6. **Chorda arcus** (quæ Magistro subtenſa, alijs inſcripta dicitur) eſt linea recta ab vno extremorum arcus ad alterum ducta.

In hac appoſita figura recta linea



AB chorda dicitur, tam arcus ACB quam arcus ADB.

7. **Sinus rectus arcus** (qui alijs ſinus primus) eſt dimidiũ chordæ ſubtendens duplum illius arcus, vel aliter. Eſt linea recta perpendicularis cadens ab vno

extremo arcus illius, cuius dicitur ſinus rectus, in diametrum circuli ab altero extremo eiſdem arcus ductam.

Vi in precedenti figura linea recta
BH dicitur ſinus rectus arcus BC, quia eſt dimidiũ chordæ AHB, ſubtendens arcum ACB, duplum illius arcus BC: ſive quia linea illa BH ducitur ab vno extremo ipſius arcus, nempe ab extremo B, perpendiculariter ad diametrum circuli CD ductam per C alterum extremum eiſdem arcus. Et videri de cauſis, eadem linea BH dicitur ſinus rectus arcus BD. Sic etiam linea recta BI dicitur ſinus rectus, tam arcus BG, quam arcus FAB.

8. **Sinus verſus arcus** (nonnulli ſagittam vocant) eſt pars diametri circuli inter extremum illius arcus, & ſinum rectum eiſdem arcus intercepta.

Vi CH, quæ eſt pars diametri CD

ſecundus) eſt ſinus rectus arcus, qui complementum eſt illius.

Sic recta linea BI eſt ſinus complementi arcus CB, quia eſt ſinus rectus arcus BG, quæ eſt complementum arcus BG.

13. **Sinus anguli**, tam rectus, & verſus, quam complementi eſt ſinus arcus illius anguli.

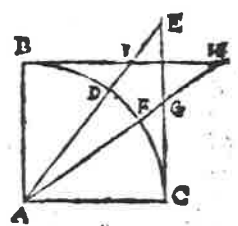
Quia linea recta BH eſt ſinus rectus arcus BC, qui eſt arcus anguli CEB, eadem eſt etiam ſinus rectus illius anguli: & CH ſinus verſus arcus BC, dicitur ſinus verſus eiſdem angulo CEB: Sed BI ſinus complementi dicti arcus BC, eſt etiam ſinus complementi ſupradicti anguli CEB.

14. **Tangens alicuius arcus** (nonnulli proſinum vocant, alijs adſcriptam) eſt linea recta quæ tangens extremum illius arcus, concurrens cum ſemidiametro circuli producta per alterum

extre-

extremum eiſdem arcus ultra circulum.

Vi in hac figura recta linea BH



dicitur tangens arcus BF, quia tangit eum in extremitate B, & terminatur à ſemidiametro AE, quæ tranſiens per extremum arcus F producit extra circulum & ſequitur ad H. Sicut etiam recta linea CE dicitur tangens arcus CD. Apparet vero eandem tangentem referri ad arcum, & ad angulum ei reſpondentem.

B

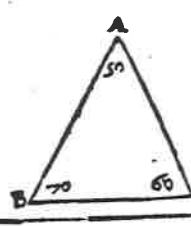
15. **Secans alicuius arcus**, (nonnulli appellans hypotenſam, alijs tranſſinuoſam) eſt recta linea ducta à centro circuli per extremum illius arcus vſque ad ſummum tangentis eiſdem arcus.

Vi in figura ſupradicta recta linea AH dicitur ſecans arcus EF, quia ducitur à centro A per extremum arcus E vſque ad H ſummam tangentis illius arcus BF. Sic etiam linea recta AE eſt ſecans arcus CD. Quemadmodum autem angulus habet eundem ſinum & eandem tangentem quam arcus eum, habet etiam eandem ſecantem. Sic linea recta AG dicitur ſecans tam arcus CE, quam anguli CAG. Item recta linea AL eſt ſecans non tantum arcus BD, ſed etiam anguli BAD.

23	Sinus	Tangens	Secans		Sinus	Tangens	Secans
1	39099	42482	108642	59	92039	235395	255755
2	39127	42516	108663	58	92028	235205	255580
3	39153	42551	108675	57	92016	235015	255405
4	39180	42585	108690	56	92005	234825	255231
5	39207	42619	108703	55	91994	234636	255057
6	39234	42654	108717	54	91982	234447	254883
7	39260	42688	108730	53	91971	234258	254709
8	39287	42722	108744	52	91959	234069	254536
9	39314	42757	108757	51	91948	233881	254361
10	39341	42791	108771	50	91936	233693	254190
11	39367	42826	108784	49	91925	233505	254017
12	39394	42860	108798	48	91914	233317	253846
13	39421	42894	108811	47	91903	233130	253672
14	39448	42929	108825	46	91891	232943	253500
15	39474	42963	108839	45	91879	232756	253329
16	39501	42998	108852	44	91868	232570	253157
17	39528	43032	108866	43	91856	232383	252986
18	39555	43067	108880	42	91845	232197	252815
19	39581	43101	108893	41	91833	232012	252645
20	39608	43136	108907	40	91822	231826	252476
21	39635	43170	108920	39	91810	231640	252304
22	39661	43205	108934	38	91799	231456	252134
23	39688	43239	108948	37	91787	231271	251965
24	39715	43274	108962	36	91776	231086	251795
25	39741	43308	108975	35	91764	230902	251626
26	39768	43343	108989	34	91753	230718	251457
27	39795	43378	109003	33	91741	230534	251289
28	39822	43412	109017	32	91729	230351	251123
29	39848	43447	109030	31	91718	230167	250952
30	39875	43481	109044	30	91706	229984	250784

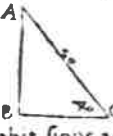
Deux pages du "Canon" des sinus de Henrion (1623)

TRIANGVLA
portionalis iuxta modum de: lava
in num. 1. & 4.
 His expositis, nunc docebitur paucis
Calculus & supputatio triangulorum planorum, vel rectilineorum; & primum rectangulorum.
 1. *Datu tribus angulis cuiuscunque trianguli rectilinei, datur proportio laterum.*
 Nam latera trianguli se habent ad invicem, vt sinus angulorum ipsis oppositorum. Quare si anguli trianguli ABC sint gradus 70, gradus 60, & gradus 50, latera AC, AB, & BC habebunt



RECTILINEA.
 eandem proportionem quam 93669, 86603, & 76604, qui sunt sinus angulorum oppositorum ipsis lateribus, hoc est AB erit ad BC, vt 86603 ad 76604, & AB ad AC, vt 86603 ad 93669, & AC ad BC, vt 93669 ad 76604.
 2. *Dato uno latere, cum uno angulo acuto triangulo plani rectangulo, reliqua duo latera cognoscere.*
 Cum alter angulorum acut, sit alterius complementum, noscuntur omnes anguli. Fiat autem, vt sinus anguli dato lateri oppositi ad latus datum, ita sinus cuiuslibet reliquorum angulorum ad aliud: prodibitque latus huic angulo accepto oppositum. Itaque in triangulo ABC, cuius angulus B rectus est, dato latere AC hexapodum 50, angulo

TRIANGVLA
 vero C gr. 40. ita vt alter angulus sit grad. 50: A
 per regulam auream dicemus, si sinus anguli B 100000 dat AC B hexap. 50, quid dabit sinus anguli A 76604, & quid sinus anguli C 64179? inueniemusque latus BC hexap. 38 1/2, & AB hexap. 32 1/2, ferè.
 3. *Datu duobus lateribus circa angulum rectum triangulo plani, inuenire duos angulos acutos, & hypotenusam.*
 Hypotenusa, aut basis trianguli rectanguli est latus recto angulo oppositum. Quadratis laterum datorum additis simul, radix quadrata huius aggregati erit hypotenusa quaesita: deinde fiat, vt hypot. ad sin. tot. ita alterutrum datorum laterum ad



Deux problèmes où sont utilisés ce que nous formulons

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{et} \quad b = a \sin B$$

On notera que la division en 90 parties de l'angle droit est appelée "gradus".

INDEX DES NOMS PROPRES

On a voulu regrouper ici tous les noms propres cités dans cette brochure. La date en regard indique celle de la mort du personnage. Certains noms ne figurent que pour mémoire de date (Leibniz, Cicéron...); pour d'autres, moins connus, on a seulement voulu les situer brièvement mais on a dû parfois se contenter de citer la seule oeuvre qui nous soit parvenue.

Les abréviations suivantes renvoient à nos autres brochures :

= G = : Glanes ; = S = : Notes biographiques pour élèves entrant en seconde ;
= Z = : Egale zéro.

Abu Kamil : Algébriste égyptien (900)

Adelard de Bath : Philosophe et mathématicien anglais. A vécu en Orient et en France, traducteur de textes arabes (1142 ?)

Ahmès : Voir Rhind

Al Hâssar : Arabe d'Occident dont l'oeuvre arithmétique eut une grosse influence (1175 ?)

Al Tusi : Voir Nasir ad dîn

Arnould : = Z = (1694)

Boèce : Erudit romain commentateur de textes anciens en particulier scientifiques (524)

Bombelli : = Z = (1572 ?)

Bouguer Pierre : Géodésiste français (1758)

Butéon du Dauphiné : Nous a laissé des ouvrages de géométrie et d'arithmétique (16e siècle)

Cavalieri : Voir "Pages et Calculs choisis de Blaise Pascal" (1647)

Cayley : = S = (1895)

César : Imperator romain (-44)

Chuquet Nicolas : = S = (1500 ?)

Cicéron : (-43)

Copernic : Voir "Documents relatifs au 17e siècle" (1543)

Descartes : = S = (1650)

Diophante : = Z = et = G = (409 ?)

Euclide : = S = (-275 ?)

Fermat : = G = (1665)

Galilée : Voir "Documents relatifs au 17e siècle" (1642)

Gemma Regnier dit Frisius : Ses oeuvres vulgarisèrent les découvertes mathématiques de l'époque (1555)

Gensfleisch dit Gutenberg Johannes : Imprimeur rhénan qui inventa vers 1440 les caractères mobiles (1468)

Girard : = Z = Lorrain, vulgarisateur des oeuvres de Stevin. Conjectura le premier qu'une équation de degré n avait n racines (1633)

Gunter : Anglais, professeur d'astronomie publia la première table des logarithmes des sinus et tangentes (1626)

Harriot : = Z = mathématicien et astronome anglais (1621)

Henrion : On lui doit la première table de logarithme parue en France (1640)

Herigone : Encyclopédiste publia un cours de mathématiques en 6 volumes (début 17e siècle)

Héron d'Alexandrie : Ingénieur et mathématicien (1e siècle après Jésus Chris)

Hobbes : Philosophe anglais (1679)

Huygens Christians : = G = Voir également notre brochure consacré à un de ses textes (1695)

Leibniz : = G = Voir également notre brochure "Pages et Calculs choisis de Blaise Pascal" (1716)

Léon d'Anvers : Flamand, nous a laissé une arithmétique pratique éditée en 1586. Voir notre brochure consacrée à cet ouvrage

Léonardo Fibonacci : Mathématicien italien, initié à la pensée scientifique islamique, il contribua à la propager en Occident = Z = (1250 ?)

Marco Aurel : Allemand établi en Espagne, publia en 1552, en espagnol une "aritmética algébrica" usant de nombreux symboles

Montucla : Mathématicien français historien des Mathématiques (1799)

de Morgan : Mathématicien et logicien anglais (1871)

Nasīr ad Din al Tusi : Géomètre persan de Bagdad dont les travaux sur Euclide et le postulat des parallèles furent longtemps ignorés en Occident (1274)

Némorarius : A laissé plusieurs ouvrages mathématiques (15e siècle)

Newton Isaac : = G = (1727)

Newton John : Anglais, publia en 1658 le traité de trigonométrie le plus complet de l'époque (1678)

Oresme Nicolas : = G = Evêque de Lisieux, un grand précurseur (1382)

Ortega : Dominicain aragonais dont l'oeuvre très répandue à son époque fut imprimée tant à Paris, Rome, Lyon que Séville (16e siècle)

Oughtred William : Anglais. N'enseigna jamais les mathématiques mais leur consacra sa vie. Un des pères de la règle à calcul (1660)

Pacioli : = Z = Remarquable compilateur, il contribua beaucoup à faire connaître les auteurs anciens et du Moyen-Age (1509)

Parent Antoine : Membre de l'Académie des Sciences, un des premiers ayant travaillé la géométrie analytique à trois dimensions (1716)

Pascal : = S = et "Pages et calculs choisis de Blaise Pascal" (1662)
Pelletier du Mans : Contribua à répandre l'algèbre (1582)
Planudes Maxime : Moine grec compilateur de l'anthologie grecque (1330)
Ptolémée Claude : Astronome grec d'Egypte (2e siècle)
Pythagore : = S = (- 500 ?)
Rahn : Auteur d'une algèbre publiée à Zurich en 1659
Ramus - Pierre de la Ramée : Humaniste, professeur au collège royal, fut massacré à la Saint Barthélemy (1572)
Recorde : Le premier grand mathématicien anglais. Son oeuvre eut une grande influence (1558)
Regiomontanus : = S = est surtout connu par un ouvrage sur le triangle où (Johannes Müller) l'on trouve pratiquement toute la trigonométrie plane (1476)
Rhind : Egyptologue anglais qui découvrit un papyrus dû au copiste Ahmès, papyrus plein d'enseignements mathématiques, de datation controversée entre le 16e et le 18e siècle avant Jésus Christ (1863)
De la Roche de Lyon (Jean Borrel) : publia en 1520 "L'arithmétique" livre d'algèbre usant de nombreux symboles.
Stévin Simon : Ingénieur et mathématicien flamand = S = (1620)
Stifel : Moine augustin allemand qui dès 1554 représente systématiquement les inconnues par des lettres. Devenu disciple de Luther, celui-ci dut le faire enfermer pour cause de fanatisme (1567)
Stirling : Mathématicien anglais (1770)
Tartaglia = G = Z = (1557)
Tite Live : Historien latin (19)
Viète : = Z = S = (1603)
Wallis John : professeur de géométrie à Oxford, un des fondateurs de la "Royal Society", a laissé une oeuvre considérable dans de nombreux domaines mathématiques, il s'intéressa également à leur histoire (1703)
Widman : Allemand, auteur d'une arithmétique, en 1489, où l'on trouve les premiers signes + et -.

BIBLIOGRAPHIE

- Histoire des Mathématiques, Becker et Hofmann (Lamarre 1956)
- Histoire de la science, La Pléiade (NRF 1957)
- Histoire des Mathématiques, Hard (Larousse - Encyclopoche 1977)
- Egalé Zéro - Aperçu historique de la notion d'équation (I.R.E.M. de Dijon 1977)
- Histoire des Mathématiques - Montucla (1798)
- Histoire des Mathématiques - Marie (1883)
- History of Mathematics, Smith (Doover 1958)
- History of Mathematical notations, Cajory (Open court publishing company 1951)
- Historical topics for mathematics classroom of the national council of teachers of mathematics, (Washington 1969)
- A source book in mathematics, Struick (1967).
- Histoire des Mathématiques, J.P. Collette (1976)

groupe d'HISTOIRE des
MATHEMATIQUES
pour nos **ELEVES**

Howbeit, for ease alteration of equations. I will propose
poinde a fewer examples, because the extraction of these
rootes, make the more aptly be woughte. And to avoid
the tedious repetition of these wordes: use
qualls to: I will sette as I doe often in booke use, a
paire of paralleles, or Centow line of one lengthe,
thus: =——, because noe. 2. thynges, can be more
equalle. And now make these numbers.

1. 14.2. —+—. 15.9. ——— 71.9.

2. 20.2. ———. 18.9. ———. 102.9.

CHOSSES

d'ALGEBRE

Multiplicans					Multiplicatus				
0	2	3	2	4	1	1	1	1	1
1	2	3	2	4	1	1	1	1	1
4	8	12	8	16	1	1	1	1	1
4	8	12	8	16	1	1	1	1	1

Laquelle Equation, en supposant $x = y$, revient à celle-cy,

$$y^4 - 4fyy - 4a^2ff + 4ffx^2 - 4afyy + 4a^2f + 2a^2y - a^4$$

groupe d'HISTOIRE des
MATHEMATIQUES
pour nos ELEVES

Howbeit, for ease alteration of equations. I will propose
pouinde a selue crâples, bicaufe the extraction of theire
rootes, maie the more aptly bee woughte. And to a-
uoid the tedious repetition of these wordes: is es-
qualle to: I will sette as I doe often in woorke use, a
paire of parallelles, or Centowbe lines of one lengthe,
thus: ———, bicaufe noe. 2. thynges, can be moare
equalle. And now make these numbers.

1. 14.2e. — 15.9. — 71.9.
2. 20.2e. — 18.9. — 102.9.

CHOSES

d'ALGEBRE

Multiplicatus					1	1
0	2	3	2	4	1	1
1	2	3	2	4	1	1
4	8	1	2	8	1	6
4	8	1	2	8	1	6
3	3	4	6	5	6	

Laquelle Equation, en supposant $af \neq 0$, revient à celle-ci.

$$y^2 - 4ffyy - 4a^2ff + 4ffxx - 4afyy + 4a^2f + 2a^2yy - a^2$$

Document A

Page extraite
du livre de Leon d'Amers
(1586)
où l'on voit apparaître,
à côté des abréviations
de mesure des
grandeurs, des
notations opératoires

regrouper ici tous les noms propres cités.
La date en regard indique celle de la mort.
Certains noms ne figurent que pour mémoire.
... pour d'autres, moins connus - on a seulement
mais - on a dû parfois se contenter
seule œuvre qui nous soit parvenue -
rivanles renvoient à nos autres brochures -
; = S = : notes biographiques pour élèves entrant en second
10

algebriste égyptien (900)

Philosophe et mathématicien anglais. Travailla en Orient et en France, à
de textes arabes (1142?)

voir Rhind

Arabe d'Occident dont l'œuvre arithmétique eut une grande influence.
voir Nasir ad din

= Z = (1694)

Erudit romain commentateur de textes anciens en particulier

= Z = (1572?)

Document B

Extrait d'un livre d'arithmétique algébrique de Marco Maurel (Valencia 1552)
où pour faciliter les opérations sur les puissances d'un nombre on trouve
la liste des caractères utilisés.

Cicéron (-43)

Copernic voir "Documents relatifs au 17^e siècle" (19)

Descartes = S = (1650)

Diophante = Z = et = G = (409?)

Euclide = S = (-275?)

Pour trouver le quotient en divisant un caractère par un autre, mets ces caractères en ordre,
de même pour la multiplication. Tu écris ainsi 1, 2, 3 etc avec zéro au dessus de Q
Alors, de même que pour multiplier tu ajoutes les nombres [au dessus], - - -

- Girard = Z = (~~1600~~) Lorrain, vulgarisateur des œuvres de Stevin. Conjectura le premier qu'une équation de degré n avait n racines - (1633)
- Gunter Anglais professeur d'astronomie publia la première table des logarithmes des sinus et tangentes (1626)
- Harriot = Z = (~~1600~~) mathématicien et astronome anglais (1621)
- Henrion. On lui doit la première table de logarithmes parue en France (1640)
- Horigone Encyclopédiste publia un cours de mathématiques en 5 volumes (début 17^e siècle)
- Héron d'Alexandrie Ingénieur et mathématicien (1^{er} siècle ap. J.C.)
- Hobbes Philosophe anglais (1679)
- Huygens Christians = G = voir également notre brochure consacrée à un de ses textes (1645)
- Leibniz = G = voir également notre brochure "Pages et calculs choisis de Blaise Pascal" (1716)
- Léon d'Anvers Flamand, nous a laissé une arithmétique pratique éditée en 1585 - voir notre brochure consacrée à cet ouvrage -
- Léonardo Fibonacci Mathématicien italien initié à la pensée scientifique islamique, il contribua à la propager en Occident = Z = (1250?)
- Marco Aurel Allemand établi en Espagne publia en 1552, en espagnol une "arithmétique algébrique" usant de nombreux symboles -
- Montucla Mathématicien français historien des mathématiques (1799)
- de Morgan Mathématicien et logicien anglais (1871)
- Nasir ad Din et Tusi Géomètre persan de Bagdad - dont les travaux sur Euclide et le postulat des parallèles furent longtemps ignorés en Occident (1274)
- Nemorarius a laissé plusieurs ouvrages mathématiques (15^e siècle)
- Newton Isaac = G = (1727)
- Newton John Anglais, publia en 1688 le traité de trigonométrie le plus complet de l'époque (1688)
- Oresme Nicolas = G = Evêque de Lisieux, un grand précurseur (1382)
- Ortega Dominicain aragonais - dont l'œuvre très répandue à son époque fut imprimée tant à Paris, Rome, Lyon que Séville (16^e siècle)
- Oughtred William Anglais. N'enseigna jamais les mathématiques mais leur consacra sa vie. Un des pères de la règle à calculs (1660)
- Pacioli = Z = Remarquable compilateur, il contribua beaucoup à faire connaître les auteurs - anciens et du Moyen-Age (1509)
- Parent Antoine Membre de l'Académie des Sciences, un des premiers ayant travaillé la géométrie analytique à trois dimensions (1716)
- Pascal = S = et "Pages et calculs choisis de Blaise Pascal" (1662)
- Pelletier du Mans contribua à répandre l'algèbre (1582)
- Planudes Maxime Moine grec compilateur de l'anthologie grecque (1330)
- Ptolémée Claude. Astronome grec d'Egypte (2^e siècle)
- Pythagore = S = (-500?)
- Rahn Auteur d'une algèbre publiée à Zurich en 1659
- Ramus - Pierre de Romée. Humaniste, professeur au collège royal fut massacré à la Saint Barthélemy - (1572)

Reconde

Le premier grand mathématicien anglais - son œuvre eut une grande influence (1558)

Regiomontanus = S = est surtout connu par un ouvrage sur le triangle où l'on trouve (Johannes Muller) pratiquement toute la trigonométrie plane (1476)

Rhind . Egyptologue anglais - qui découvrit un papyrus - dit au copiste Ahmes - papyrus plein d'enseignements mathématiques, de datation controversée entre le 16^e et le 18^e siècle avant Jésus-Christ - (1863)

De la Roche de Lyon (Jean Borrel) . publia en 1520 "L'arithmétique" - livre d'algèbre - usant de nombreux symboles -

Stevin Simon Ingénieur et mathématicien flamand = S = (1620)

Stifel

Moine augustin allemand - qui dès 1554 répandit systématiquement les ^{inconnues} par des lettres - Devenu disciple de Luther, celui-ci dut le faire enfermer pour cause de fanatisme - (1567)

Stirling

Mathématicien anglais (1770)

Tartalia

= G = Z = (1557)

Tite Live

Historien latin (19)

Viète

= Z = S = (1603)

Wallis John

professeur de géométrie à Oxford, un des fondateurs de la "Royal Society", a laissé une œuvre considérable - dans de nombreux domaines mathématiques, il s'intéressait également à leur histoire. (1703)

Widman

allemand, auteur d'une arithmétique, en 1489 on l'on trouve les premiers signes + et - .

Bibliographie

- Histoire des Mathématiques, Becker et Hofmann (Lamane 1956)
- Histoire des la science - La Pleiade (mf 1957)
- Histoire des Mathématiques, Collette (1976)
- Histoire des Mathématiques, Hard - (Larousse - Encyclopoche 1977)
- Egalé Zéro - Aperçu historique de la notion d'équation. (IREM de Dijon 1977)

- Histoire des mathématiques, Montucla (1798)
- Histoire des mathématiques, Marie (1883)

History of mathematics, Smith (Dover 1958)

History of mathematical notations, Cajory (Open court publishing company 1951)

Historical topics for mathematics classroom of the national council of teachers of mathematics, (Washington 1969)

A source book in mathematics, Struick (1967)

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
de l'Université de Dijon

B.P. 138 21004 DIJON cedex.

Section de l'Yonne - Lycée J. Amyot 89000 AUXERRE

Le groupe: Histoire des Mathématiques pour nos Elèves a produit jusqu'à présent des brochures suivantes:

- Notes sur des mathématiciens - à l'usage d'élèves entrant en seconde (4^e édition)
- La Numération écrite (2^e édition)
- Claves d'histoire des mathématiciens (3^e édition augmentée)
- Jeux de géométries (petite histoire des parallèles) (2^e édition)
- Lecture d'un texte de Huygens (la fonction logarithme) (2^e édition)
- Egalité zéro - (Aperçu historique de la notion d'équation) (2^e édition)
- Pages et Calculs - choisis de Blaise Pascal (2^e édition)
- Leçon d'Anvers : analyse d'une arithmétique du 16^e siècle
- Choses d'algèbre - (Aperçu historique des notations)
- Vecteur : Recherche sur ses origines

En collaboration avec l'équipe d'animation pédagogique d'histoire de l'Yonne (CAAP).

- Savoir d'histoire des mathématiques en occident
- Textes et documents de science relatifs au début du 17^e siècle