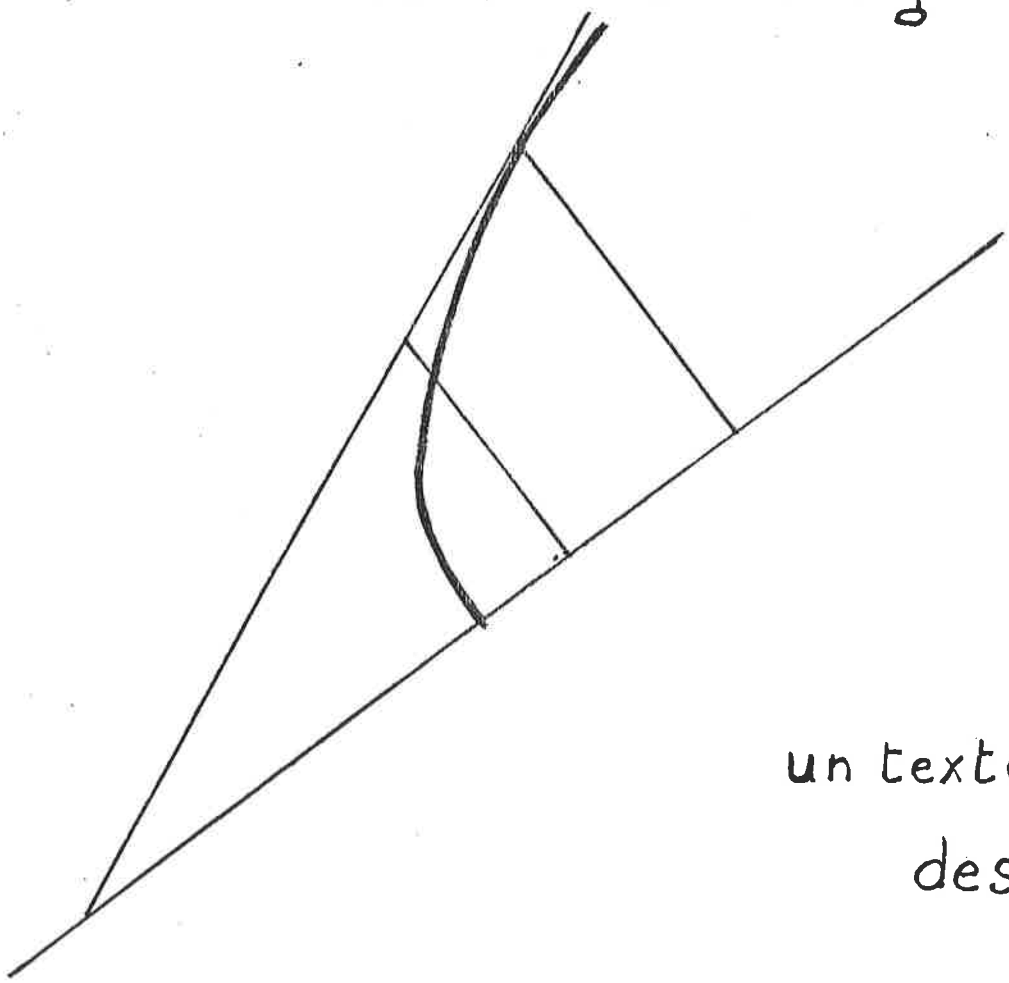
Université de DIJON.
IREM

groupe d'HISTOIRE des MATHEMATIQUES pour nos ELEVES

De l'invention des tangentes



un texte et des calculs de

P. FERMAT

Février 1980

Le groupe "Histoire des Mathématiques pour nos Elèves", groupe de recherche de l'I.R.E.M. de Dijon, est constitué en 1979-1980 de :

Jean Marc BELLEMIN, Bernard COLLAS-PRADEL, Catherine LEMETTAIS
(Lycée de Tonnerre)
Michel GURGO (Collège Jacques Prévert de Migennes)
Raymond HERNANDEZ (Collège Albert Camus d'Auxerre)
Alain BATAILLE, Patrick BRANDEBOURG, Henry PLANE
(Lycée Jacques Amyot d'Auxerre).

Cette nouvelle brochure appartient à la série "Pages et Calculs choisis" présentée par notre groupe.

Après Huygens et Pascal voici Fermat.

Il s'agit de montrer qu'avec quelques précautions, en particulier de vocabulaire et de notation, un lycéen peut remonter aux origines de ce qui lui est enseigné.

Peut-on mieux trouver que cet exemple de calcul, sans le mot de dérivée, pour une notion que l'élève croit conséquence de la dérivation alors qu'il en est aux sources mêmes ?

Appel à la réflexion au lieu de soumission à la mécanisation. N'est-ce pas l'idéal de notre tâche de professeur ?

Nous croyons que l'histoire des mathématiques a un rôle important à jouer dans ce sens. Puisse cette brochure y contribuer.

Le groupe : "Histoire des Mathématiques
pour nos élèves"
I.R.E.M. de Dijon

Février 1980

Le texte de Fermat dont nous proposons l'étude se situe au coeur même du grand mouvement d'idées qui donna à la géométrie un nouvel outil : l'algèbre, d'aucuns diront analyse, mais où est la distinction en ce début de 17e siècle ?

Un débat s'instaure entre les mathématiciens de l'époque -ils se nomment "géomètres"- quant aux méthodes, et chacun vit ce combat d'idées selon son tempérament.

Fermat (1) avait mis au point une méthode -en germe chez Kepler- afin de déterminer pour quelles valeurs de l'inconnue une grandeur en dépendant atteignait son maximum ou son minimum (2). Il appliquait cette méthode à la recherche de la tangente à une courbe en un point ce celle-ci. (3)

Dans sa "Géométrie" qui fait suite au "Discours de la méthode", Descartes traitait autrement le même problème de la tangente (4).

Laissons à Montucla (5) le soin de situer le cadre du débat par cet extrait de son "Histoire des Mathématiques".

"Lorsque la géométrie de Descartes vit le jour, Mr de Fermat fut un des premiers à l'examiner. Il fut fort surpris de n'y rien trouver concernant les questions de maximis et minimis, qui par leur importance et leur difficulté, méritoient l'attention des géomètres. Il écrivit donc à Mersenne et lui envoya ses méthodes pour les questions de maximis et minimis, pour les tangentes des courbes, pour la construction des lieux solides, en lui témoignant son étonnement de ce que Descartes avait omis les premières de ces questions.
Cette remarque parut à Descartes un défi injurieux... Ce fut dans cette circonstance... qu'il reçut l'écrit de Mr de Fermat. Préoccupé de l'envie d'y trouver à redire il répondit au P. Mersenne que l'une et l'autre de

---

(1) Une brève biographie de Fermat figure dans cette brochure. Pour les autres personnages cités, on consultera d'autres brochures en particulier les "Notes pour élèves de seconde" et "Glanes".

(2) Voir Annexe A

(3) Voir annexe D

(4) Voir annexe B

(5) Jean Etienne MONTUCLA (1725-1799) fut un érudit. Il publia en 1758 la première histoire moderne des mathématiques considérée encore comme un classique. Lalande en fit une réédition en 1802.

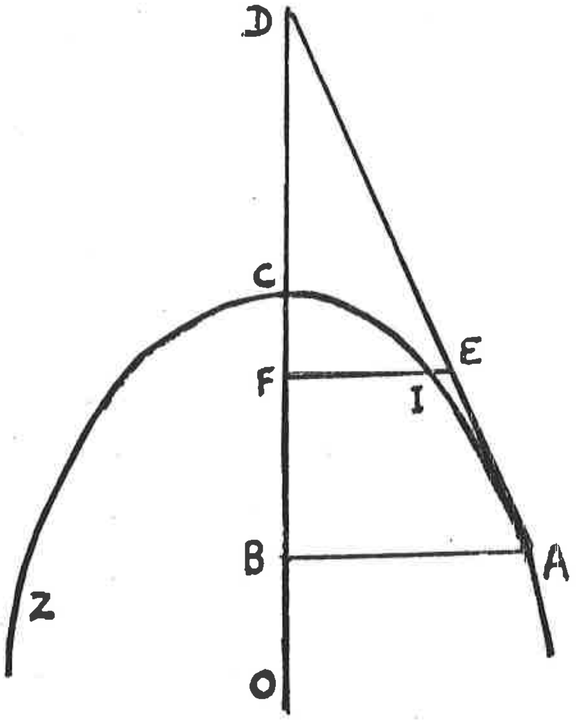
ces règles ne valoient rien, et il proposa contr'elles des difficultés..... Fermat ennemi des querelles, et plus juste envers Descartes que celui-ci ne l'étoit à son égard, fit les premières avances de réconciliation."

C'est le sens de notre document, lettre que Fermat écrivit en 1638 afin de détailler ses explications concernant sa manière de trouver -d'inventer comme on dit alors- la tangente. Il s'adresse à Mersenne, l'universel correspondant, en le priant de transmettre à Descartes, et précise : "Bien loin d'y remarquer les défauts, je crois qu'il (Descartes) y trouvera plus de facilité qu'à la sienne".

On trouvera en outre les annexes suivantes :

A - La méthode de Maximis et de Minimis de Fermat
B - La position de Descartes (extrait de sa Géométrie)
C - A propos de géométrie analytique
D - Tangente et 17e siècle
E - Tableau synoptique autour de 1638
F - Brève biographie de Fermat.

LETTRE DE M. FERMAT A M. DESCARTES



(1)

La méthode générale pour trouver les tangentes des lignes courbes mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été.

Soit la courbe donnée ZCA, de laquelle le diamètre soit (2)
CB. Soit encore donné dans la courbe le point A, duquel soit menée l'appliquée AB sur le diamètre. Il faut chercher la tangente AD, de laquelle le concours avec le diamètre prolongé se fait au point D.

Les lignes AB et BC sont données ; supposons que BA s'appelle (3)
b et que BC s'appelle d. Supposons que la ligne BD, que nous cherchons, s'appelle a. Prenons à discrétion un point, tel que E, sur la tangente, duquel soit tirée EF parallèle à AB, et supposons que la ligne BF soit
e. (4)

(1) La disposition de figure est celle qu'emploie Fermat depuis 1630 et de laquelle naîtra ce que nous appelons la géométrie analytique. Cette disposition, Descartes en usera également dans sa "Géométrie".

(2) Le "diamètre" n'est pas forcément un axe de symétrie comme dans le cas des coniques. C'est essentiellement une droite sur laquelle on abaisse de chaque point de la courbe une "appliquée" c'est-à-dire une perpendiculaire. (Voir annexe C).

(3) Il faut entendre : les longueurs des segments AB et BC sont connues ; la relation entre AB et BC également. Dans les applications on utilisera l'équation qui lie AB et BC. Nous dirions aujourd'hui on connait BC en fonction de AB mais le mot fonction n'apparaîtra qu'au siècle suivant et après un long cheminement.

(4) a, b, d, e désignent des longueurs. Ce sont des nombres uniquement positifs. Cela nécessite souvent l'emploi de différents cas de figure selon la position relative des points. Les nombres négatifs (les nombres "faux") n'apparaissent à cette époque que pour les racines des équations. Ce n'est qu'à la fin du 18e siècle, avec Argand en particulier, qu'est envisagée une mesure tenant compte de l'orientation d'un segment (voir notre brochure "Vecteurs").

Donc CF sera d - e

FE sera $\frac{b\,in\,a - b\,in\,e}{a}$ *et, de quelque nature* (5)
que soit la courbe, nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.

Cela étant fait, il est certain que le point E de la ligne
EF, étant dans la tangente, sera hors de la courbe, et, par consé-
quent, la ligne EF sera plus grande ou plus petite que l'appliquée (6)
qui s'appuie à la courbe du point F : -plus grande, lorsque la
courbe est convexe en dehors, comme en cet exemple, et plus petite, (7)
lorsque la courbe est convexe en dedans ; car la règle satisfait
à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de
la courbe, de quel côté elle est convexe. -Quoique la ligne FE
soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la
considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'ap-
pliquée, et en suite la compare par adéquation avec la ligne FI, (8)
suivant la propriété spécifique de la courbe. (9)

Comme, en la parabole, par exemple, je fais (10)

(5) b in a - b in e : cette expression s'écrit aujourd'hui ba - be. En effet, Fermat représente encore la multiplication par le symbole "in" que Pascal traduisit par "en". b in a, b en a, b x a, ba. Leibniz préconisa vivement cette dernière écriture qui est déjà utilisée par Descartes.
On remarque ici la préoccupation d'un lien entre "appliquées" et "points ordonnés" sur le diamètre. Cela est bien l'idée clef de la géométrie analytique. Fermat et Descartes s'accordaient sur ce point.
Le calcul de FE s'obtient à l'aide des triangles semblables DFE et DBA.

$$\frac{FE}{BA} = \frac{DF}{DB} = \frac{DB - BF}{DB}$$

(6) L'appliquée c'est-à-dire IF.

(7) Convexe en dehors : la concavité de la courbe est du côté du "diamètre" OC. Donc la tangente est "à l'extérieur" et FE > FI. Sinon la tangente est entre le "diamètre" et la courbe et alors FE < FI.

(8) Adéquation, adégaler : Fermat emploie ces termes dans le sens d'égalité, d'égaler. (Voir le document en annexe A).

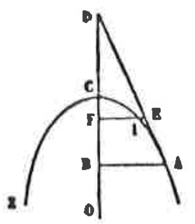
(9) C'est là l'idée maîtresse de Fermat pour ce problème. Nous parlerions de limite pour F tendant vers B.

(10) Fermat traite l'exemple d'une parabole qui, d'après la figure, et en posant CB = y, BA = x aurait pour équation $y = kx^2$.

comme BC à CF, ainsi BA quarré à FE quarré, ou bien, (11)
pour éviter les fractions et la diversité des lignes,
comme BC à CF, ainsi BD quarré à DF quarré ;
car c'est toujours la même chose, à cause de deux
triangles semblables DBA, DFE. (12)

Ou bien encore je pourrois comparer le quarré FE (13)
avec le rectangle compris sous le côté droit et la ligne
CF, comme si ce quarré étoit égal à ce rectangle, quoique
en effet il ne le soit pas, puisque ce sont seulement les
appliquées à la courbe qui ont la propriété que nous
donnons par adéquation à la ligne FE.

Cela étant fait, j'ôte les choses communes et divise (14)
le reste par e. J'efface tout ce qui reste mêlé avec e et
égalise le surplus, de sorte que, par cette dernière équa-
tion, je connois la valeur de a et par conséquent la ligne
BD et la tangente.



(11) On trouve aussi la notation

CB : CF :: BA carré : FE carré

La diversité des lignes est le fait que CB et BA^2 sont de natures différentes. Une longueur CB et une "surface" le carré BA (sous entendu : de côté BA).

L'idée de nombre abstrait ne s'impose pas encore.

(12) Avec nos notations le calcul s'écrirait

$$BC = k\ BA^2$$
$$CF = k\ FE^2$$

qui entraîne

$$\frac{BC}{CF} = \frac{BA^2}{FE^2}$$

par suite, voir (5)

$$\frac{BC}{CF} = \frac{BD^2}{DF^2}$$

(13) FE carré doit s'identifier avec l'aire d'un carré, d'où la comparaison avec le rectangle construit avec FE (côté droit) et CF.

(14) Fermat applique maintenant sa méthode.

Avec les notations initiales nous avons

$$\frac{BC}{CF} = \frac{BD^2}{DF^2} \text{ qui s'écrit } \frac{d}{d-e} = \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

donc

$$d(a-e)^2 = (d-e)\ a^2$$

ou

$da^2 - 2dae + de^2 = da^2 - a^2e$

"otons les choses communes"

$$- 2dae + de^2 = -a^2e$$

divisons par e

$$- 2ad + de = -a^2$$

"effaçons" le terme en e, il reste

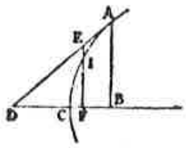
$$- 2\ ad = -\ a^2$$

on "connaît" alors la valeur de a : (a = 2d)

BD = 2BC. La tangente DA est placée.

Et pour faire voir que la méthode est générale, et qu'elle satisfait avec pareille facilité à toutes sortes de questions, nous la pouvons appliquer, pour servir d'un second exemple, à la ligne courbe proposée par M. Descartes. (15)

Soit la courbe CA, de laquelle la propriété est telle que, quelque point qu'on prenne sur la dite courbe, comme A, tirant la perpendiculaire AB, les deux cubes CB et BA soient égaux au parallélépipède compris sous une ligne droite donnée , comme n et sous les deux lignes CB et BA. (16)



Supposons que la chose soit déjà faite, et une construction pareille à la précédente, avec les noms des lignes BD, BC, BA, CF, FE. Il faudra comparer, par adéquation, les deux cubes CF, FE avec le solide compris sous n FC, FE.

Les deux cubes de CF, FE sont en notes. (17)

$$dcub - ecub - dq \text{ in } e3 + d \text{ in } eq3 + \frac{bcub \text{ in } acub - bcub \text{ in } ecub - bcub \text{ in } aq \text{ in } e.3 + bcub \text{ in } a \text{ in } eq.3}{a\ cub} \quad (18)$$

Le solide n CF, FE, en notes est

$$\frac{n \text{ in } d \text{ in } b \text{ in } a - n \text{ in } d \text{ in } b \text{ in } e - n \text{ in } b \text{ in } a \text{ in } e + n \text{ in } b \text{ in } eq}{a}$$

Multipliant tout par a cub, il faut comparer

dc in ac - ec in ac - d q in e in ac.3 + d in eq in ac.3 + bc in ac - bc in ec - . .

... - bc in aq.in e3 + bc. in aq in eq.3 (19)

avec

n in d in b in ac. - n in d in b in e in aq - n in b in e in ac + n in b in eq in c

Otons les choses communes, savoir, du premier terme

d c in ac. + bc in ac.

et du second

n in d in b in ac.

qui sont égaux par la propriété de la ligne ; - puisque les deux cubes dc. et bc. répondant aux cubes des deux lignes BC et BA, sont égaux au solide n in D in B, qui répond à celui de la ligne donnée et des deux lignes BC et BA.- (20)

(15) Il s'agit d'une correspondance précédente.
Cette courbe reçut, par la suite, le nom de Folium de Descartes

$$(x^3 + y^3 = kxy)$$

(16) On voit que ce sont toujours des grandeurs concrètes qui sont envisagées. Le volume du cube de côté CB : CB^3
Le volume du cube de côté BA : BA^3
Le volume du parallélépipède rectangle un côté de mesure n, un côté CB, un côté BA

$$CB^3 + BA^3 = n.\ CB.\ BA$$

"La ligne droite" : désigne un segment de droite.

(17) "Sont en notes" c'est-à-dire avec les notations données au début de la lettre : $CF = d-e$; $FE = \frac{b}{a}(a-e)$
Par suite de l'"adéquation" de IF à EF la relation :
$CF^3 + FI^3 = n\ CF.\ FI$ donne $CF^3 + FE^3$ qu'on va comparer à $n\ CF.\ FE$.

(18) On trouve ici une notation héritée du 16e siècle mais améliorée par Viète, à laquelle Fermat reste fidèle
d cub et dc pour "d cubo" c'est-à-dire d^3
d q pour "d quadratum" c'est-à-dire d^2
d in eq 3 : nous écrivons $3\ de^2$

(19) Fermat n'utilise pas, en général, le signe de l'égalité, c'est pourquoi il va "comparer" l'expression provenant de n CF. FI à celle provenant de $CF^3 + FE^3$.
Toutefois il a multiplié les deux termes par a^3, "pour éviter" les fractions.
Fermat "ôte les choses communes", c'est-à-dire il simplifie $a^3\ (d^3 + b^3)$ d'une part et $ndba^3$ d'autre part qui sont égaux d'après la définition de la courbe.

(20) Nouvelle application de la méthode.
Il reste d'une part $3\ ad^2 + 3b^3$,
de l'autre : nbd = nab
Fermat écrit ici : dq in a <u>ter</u> pour <u>3</u> ad^2

Divisons le reste par e et ôtons ensuite tout ce qui se trouvera mêlé avec e ; restera enfin :

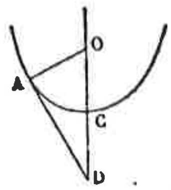
dq in a ter + b cub ter égal à n in d in b + n in b in a ainsi nous aurons :

$$\frac{n \text{ in } d \text{ in } b = b \text{ cub ter}}{dq \text{ ter} = n \text{ in } b} \text{ égal à } a \qquad (21)$$

ce qu'il falloit chercher.

Nous avons mis, suivant la méthode de Viète, deux lignes = pour la marque du défaut, parce qu'il n'appert point, s'il n'a été dit d'ailleurs, quelle est la proportion des deux lignes b et d ou bien BA et BC, données. Car il peut arriver que quelquefois, suivant la diversité des proportions de b et de d, la ligne courbe sera convexe et d'autres fois concave ; quelquefois encore que la tangente sera parallèle au diamètre BC ; quelquefois enfin que le concours avec le diamètre se fera de l'autre côté, ce qui se détermine aisément par la méthode même, lorsqu'on nous donne la proportion des deux lignes données BA et BC, comme il est très aisé de voir et de faire comprendre. Lorsque je parle de la proportion des deux lignes données, j'entends leurs valeurs, en nombres ou sourds ou rationaux ; car autrement on sait assez (22)
que, deux lignes étant données, leur proportion est aussi donnée.

Il parait donc que ou je me suis mal expliqué ou que M. Descartes a mal compris mon Ecrit latin (+) ; s'il veut que ce soit le premier, je ne le lui contesterai guère. Il s'est aussi trompé en ce qu'il a cru que, pour appliquer la méthode de maximis et minimus à l'invention des tangentes, il falloit chercher une ligne, comme AD, menée, (23)



du point A donné, sur le diamètre, en telle sorte que AD soit la plus grande qui puisse être tirée du point D à la courbe. M. de Roberval lui a déjà fait voir la raison de son mécompte, duquel il a voulu tirer cette conséquence, que la méthode de maximis et minimis étoit fautive et avoit besoin d'être corrigée, en quoi il s'est aussi bien trompé qu'au reste.

(+) Il s'agit de "Methodus ad disquirendam maximam et minimam". Voir Annexe A

(21) Le symbole $=\!=$ a la signification que lui donne Viète et qui fut utilisé ainsi, au 17e siècle, par plusieurs auteurs.
$a =\!= b$ équivaut à notre $|a - b|$
Fermat explique ce qui le conduit à envisager différents cas selon la concavité de la courbe par rapport au "diamètre". En effet, selon les cas, (voir note 7) FE - FI ou FI - FE est positif et peut être utilisé comme longueur alors : "FE $=\!=$ FI".

(22) Nombres sourds : correspond à nombres irrationnels (Sourd au sens de : que la raison n'"entend" pas).
Fermat utilise le rapport de nombres rationnels ou irrationnels alors que ces derniers sont encore très discutés à cette époque.

Dans cette seconde partie Fermat va "disputer" avec Descartes de leurs façons respectives de traiter le problème de la tangente à une courbe. Fermat justifie d'abord le bien fondé de sa méthode puis montre à Descartes son erreur (mécompte) que Roberval avait déjà relevée ; il évoque enfin certaines longueurs de calcul que Descartes semble ignorer.

Nous avons reproduit en entier la lettre pour verser au dossier toutes les pièces, mais son niveau d'étude est autre ; il convient d'abord de se reporter à l'annexe B.

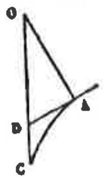
(23) L'invention des tangentes : la découverte, la mise en place de la ligne AD.
Il s'agit du segment de droite AD et surtout de sa longueur.
Sur le dessin AO est la normale.

Mais pour lui marquer de quelle façon la méthode de maximis et (24)
minimis peut être appliquée à l'invention des tangentes, la voici :

Le point A étant donné, il faut avoir recours, non pas ad maximam, puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais ad minimam. Cherchons donc le point O dans le diamètre, de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvé par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne
AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe, <ce> (25)
dont la démonstration est aisée.

Car si AD ne touchoit pas la courbe, une autre droite la toucheroit au point A, laquelle fera son concours au dessus ou au dessous de D, et tous ses points seront hors de la courbe, et elle fera des angles inégaux avec OA au point A. Si donc, sur cette touchante supposée, du point O l'on tire une perpendiculaire, elle ne rencontrera pas la touchante au point A, mais au dessus ou au dessous, et elle coupera la courbe plus tôt que d'arriver à la touchante. Donc la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point O et la courbe sera plus courte que la perpendiculaire, et la perpendiculaire étant plus courte que OA, à cause de l'angle droit, il s'ensuivra que la ligne comprise entre la courbe et le point O, faisant partie de la perpendiculaire, sera plus courte que OA, laquelle pourtant nous supposons la plus courte de toutes celles qui du point O peut être menées à la courbe.

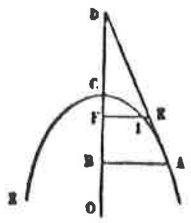
Que si la ligne CA est convexe en dehors, soit la tangente DA sur



laquelle soit tirée la perpendiculaire AO. Il paroit par la construction que AO est la plus courte de toutes celles qui du point O sont menées à la courbe, de sorte qu'en cherchant le point O, le point A étant donné, on trouve aisément la tangente.

Il reste donc de chercher le point O par la méthode.

Soit par exemple la parabole donnée CIA sur laquelle le point A (26)
soit donné, je veux chercher le point O, en sorte que OA soit la plus courte de toutes celles qui du point O peuvent être menées à la parabole.



BC, comme ci-devant s'appelera d, et BA s'appellera b, le côté droit de la

(24) Pour aller dans le sens de Descartes, Fermat va maintenant rechercher la normale, c'est-à-dire ici OA.

(25) C'est cette démonstration qui suit.

(26) Après la théorie, un exemple.
En cherchant à situer le point O intersection de la normale à la parabole en A avec le "diamètre" BO, on détermine celle-là.

Vocabulaire :

- Côté droit z : il s'agit du "paramètre" de la parabole

$$AB^2 = z\ CB$$

(On désigne maintenant par paramètre de la parabole la quantité $\frac{z}{2}$)

- On a déjà rencontré

aq pour a^2 ; a in e bis pour 2ae.

- En notes veut dire : qui est noté, selon les conventions initiales.

figure, z, donné, puisque la parabole est donnée. Supposons que OB soit a. Donc le quarré OA en notes sera aq + bq.

Prenons maintenant, au lieu de la ligne a ou OB, OF ou a + e. Si du point F nous menons l'appliquée FI, son quarré sera en notes

z in d − z in e

lequel, ajouté au quarré de OF, fera

aq + eq + a in e bis + z in d − z in e

et cette somme fera le quarré de OI, lequel doit être plus grand que celui de OA, puisque son côté est supposé plus grand que OA. Comparons donc en notes, par adéquation, les quarrés OI et OA.

Nous aurons d'un côté

aq + bq

et de l'autre

aq + eq + a in e bis + z in d − z in e

Otons les choses communes ; la comparaison restera entre

eq + a in e bis

d'un côté, et

z in e

de l'autre ; car bq est égal, par la propriété de la parabole, à z in d. Divisons le tout par e, et du reste ôtons le même e :

a bis sera égal à z

et partant a ou OB sera égal à la moitié du côté droit de la parabole, et la tangente est trouvée.

C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes,(27) mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI ou son quarré sont d'ordinaire malaisés à trouver par cette voie ; la raison est prise des asymmétries qui s'y rencontrent aux questions tant soit peu difficiles, et qu'on ne peut éviter, puisque, sur d − e en notes, il faut donner un nom à FI aussi en notes, ce qui est souvent très malaisé.

La méthode de M. Descartes n'ôte pas non plus tous les inconvénients, car obligeant à mettre $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ *au lieu de x, et le quarré de cette somme au lieu de xx, et son cube au lieu de* x^3*, et ainsi des autres, − c'est ainsi qu'il parle (+) page 342, − si on lui propose de trouver la tangente à une courbe, en sorte que, faisant en sa figure MA égal à y et CM à x, on ait l'équation suivante qui explique le rapport qui est entre x et y,* $by^9 + b^3y^7 + b^5y^5 + b^7y^3 + b^9y \propto x^{10} - dx^9 - d^3x^7 - d^5x^5 - d^7x^3 + d^9x$ *il me semble qu'il lui sera très malaisé de se désembarrasser des asymmétries qui se rencontrent en cette question et autres semblables et plus difficiles*

(+) "Géométrie" de Descartes. (Voir annexe B).

(27) - Critique de la méthode de Descartes quant à la lourdeur des calculs. (Se repporter à l'annexe B).
- Les "asymmétries" : termes avec radicaux.
- On remarquera que Fermat exploie les notations mêmes de Descartes dans l'article cité ; signe $\propto$ pour l'égalité, puissances avec exposant.
(Descartes n'a jamais écrit x^2 mais xx).

(28) page 18 Fermat achève son plaidoyer.

(29) page 18 Verres brûlants : il s'agit d'un problème d'optique qui fut l'objet d'une précédente correspondance.

(30) page 18 Parfaites : c'est-à-dire achevées, résolues.

encore, si on veut, à l'infini ; ce que je serai bien aise qu'il prenne la peine d'essayer.

Puisque donc ces deux méthodes paroissent insuffisantes, il en falloit trouver une qui levât toutes ces difficultés. (28)

Il me semble avec raison que c'est la première que j'ai proposée, car CF restant toujours d − e, et FE, $\frac{b \text{ in } a - b \text{ in } e}{a}$ *, je ne vois rien qui empêche qu'on ne puisse le comparer, en prenant, si vous voulez, d − e pour y et* $\frac{b \text{ in } a - b \text{ in } e}{a}$ *pour x, sans rencontrer jamais une seule asymmétrie, en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode.*

Fermat dont l'affabilité est connue s'offre, pour finir, à entretenir Descartes d'autres applications de sa méthode, en particulier pour la recherche de centres de gravité, recherche à laquelle il s'est beaucoup intéressé.

On pourroit ensuite chercher la converse de cette proposition et, la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à qui cette propriété doit convenir : à laquelle question aboutissent celles des verres (29 *brûlants proposée par M. Descartes. Mais cela mérite un discours à part et, s'il l'agrée, nous en conférerons quand il lui plaira. Je désire seulement qu'il sache que nos questions de maximis et minimis et de tangentibus linearum curvarum sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner.* (30

S'il désire voir l'application que je fais de cette même méthode pour trouver les centres de gravité des espaces compris des lignes courbes et de leurs solides je la lui ferai voir et lui proposerai cependant, s'il l'agrée, de trouver le centre de gravité du conoïde qui se fait lorsque la demie parabole CBA est tournée sur son appliquée BA, et celui aussi de toutes ses portions, comme aussi la proportion qu'elles ont aux cônes de même base et de même hauteur.

Dans une lettre du 27 juillet 1638, Descartes reconnut en ces termes la valeur de la méthode de Fermat :

Monsieur,

Je n'ai pas eu moins de joie de recevoir la Lettre par laquelle vous me faites la faveur de me promettre votre amitié, que si elle me venoit de la part d'une maîtresse dont j'aurois passionnément désiré les bonnes grâces... ... je vous assure que j'honore extrêmement votre mérite. Et voyant la dernière façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ai autre chose à y répondre, sinon qu'elle est très bonne et que, si vous l'eussiez expliquée au commencement de cette façon, je n'y eusse point du tout contredit.

ANNEXE A

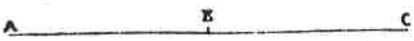
Document : La méthode "de maximis et de minimis"

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question. On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite a + e à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On adégalera, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera ce qui revient au même, les termes en plus au termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC en E, en sorte que AE x EC soit maximum.



Posons $AC = b$ *; soit a un des segments, l'autre sera* $b - a$*, et le produit dont on doit trouver le maximum :* $ba - a^2$*. Soit maintenant* $a + e$ *le premier segment de b, le second sera* $b - a - e$*, et le produit des segments :* $ba - a^2 - 2ae - e^2$ *;*

Il doit être adégalé au précédent : $ba - a^2$ *;*

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$ *;*

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$

Supprimez e : $b = 2a$

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

ANNEXE B

La position de Descartes

Descartes attachait une grande importance à la détermination des tangentes. Il écrit :

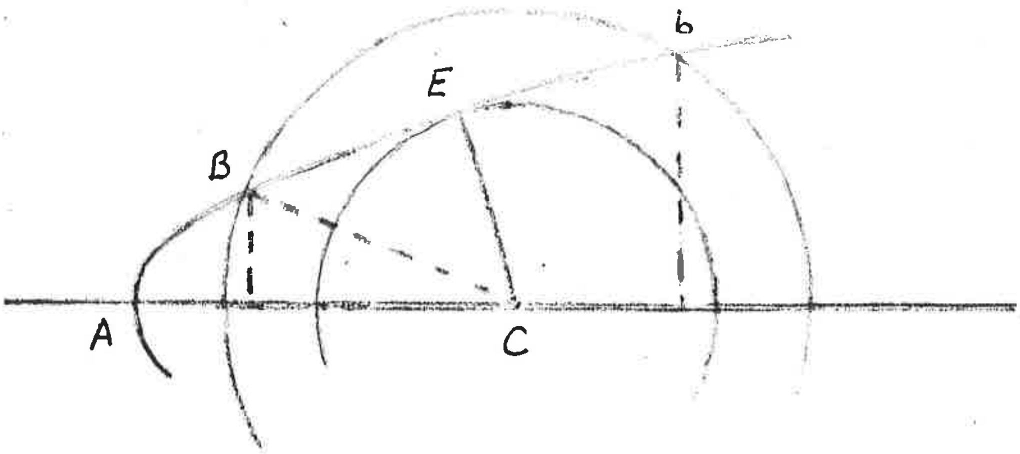
"De tous les problèmes que je connois en géométrie, il n'en est aucun qui soit plus utile et plus général, et c'est de tous celui dont j'ai davantage désiré la solution".

Laissons à Montucla le soin de nous présenter cette solution. On verra, par la suite, que les explications ne sont pas superflues. (Il s'agit d'un extrait de son "Histoire des mathématiques", déjà citée).

Descartes nous a laissé deux manières de déterminer les tangentes des courbes, l'une dans sa Géométrie, l'autre dans ses lettres ; elles sont fondées l'une et l'autre sur le même principe, et par cette raison nous les comprendrons sous le nom de Méthode des tangentes de Descartes. Nous ne pouvons disconvenir que depuis son temps on n'en ait imaginé d'autres qui sont plus commodes, mais ce motif ne doit point avilir à nos yeux une invention qui a été la première de ce genre et qui est fort ingénieuse.

Le principe de la méthode des tangentes de Descartes est celui-ci : concevons une courbe ABb, décrite sur un axe, et que d'un point de cet axe C, comme centre, soit décrit un cercle qui la coupe au moins en deux points B, b, desquels soient tirées deux ordonnées, qui seront par conséquent communes à ce cercle et à la courbe. Imaginons maintenant que le rayon de ce cercle décroît, son centre restant immobile. Il n'est personne qui ne voie que les points d'intersection se rapprochant, ils coïncident enfin, qu'alors le cercle touchera (+) la courbe en un point E, et que le rayon tiré au point de contact sera perpendiculaire à cette courbe, et à la ligne droite qui la toucheroit au même point. Ainsi le problème de déterminer la tangente d'une courbe se réduit à trouver la position de la perpendiculaire qu'on lui tireroit d'un point quelconque pris sur l'axe (++).

(+) Toucher : être tangent à.
(++) C'est cette perpendiculaire qu'on nomme "normale" à la courbe.



Pour cet effet Descartes recherche d'une manière générale quels seroient les points d'intersection d'un cercle décrit d'un rayon déterminé, et d'un point de l'axe comme centre, avec la courbe. Il parvient à une équation qui dans le cas de deux intersections doit contenir deux racines inégales, dont l'une est la distance d'une des ordonnées au sommet, et l'autre celle de l'autre. Mais si ces points d'intersection viennent à se confondre, alors les deux ordonnées se confondront, leur éloignement du sommet sera le même, et l'équation aura deux racines égales. Il faudra donc dans cette équation faire les coefficiens de l'inconnue qui sont indéterminés, tels que cette inconnue ait deux valeurs égales. Descartes y parvient d'une manière fort ingénieuse, en comparant l'équation proposée avec une autre équation fictive du même degré, où il y a deux valeurs égales ; ce qui lui donne la distance de l'ordonnée abaissée du point de contact, au sommet.

Cette méthode, Descartes l'applique à une ellipse dans l'extrait de sa "Géométrie" que nous reproduisons ensuite. Il s'agit du passage cité par Fermat dans la lettre étudiée.

Dans certaines de ses correspondances, Descartes envisage autrement la résolution du problème de la tangente mais il recherche toujours d'abord la normale à la courbe !

Montucla nous expose cette seconde méthode.

La seconde méthode imaginée par notre philosophe pour tirer les tangentes, procède ainsi. Il conçoit une ligne droite qui tourne autour d'un centre sur l'axe prolongé de la courbe. Elle la coupe d'abord en un certain nombre de points ; mais à mesure qu'elle s'éloigne ou se rapproche de l'axe, suivant les circonstances, les deux points d'intersection se rapprochent et coïncident : enfin elle touche la courbe proposée. Pour détermi-

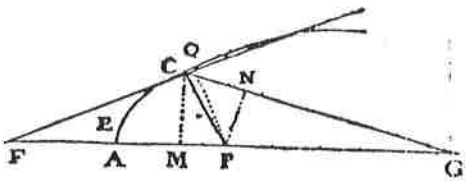
ner la situation qu'a alors cette ligne, M. Descartes procède à peu près comme dans la méthode précédente. Il recherche d'abord l'équation générale, par laquelle cette ligne étant inclinée sous un angle donné, on trouveroit ses points d'intersection avec la courbe. Ensuite par le moyen d'une équation fictice qui a deux racines égales, il détermine cette inclinaison à être celle qu'il faut pour que la ligne soit tangente.

Lisons maintenant Descartes.

Nous donnons une reproduction de la première édition de la "Géométrie" parue à la suite du "Discours de la Méthode" (1637).

tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus vtile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.

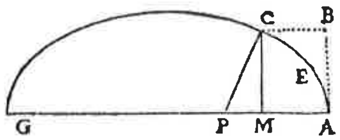


Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que faisant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss, qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; oubien

(1) (2) (3) (4)

bien ſi c'eſt y, en mettant en ſon lieu $s + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete ſomme, au lieu d'yy, ou y^3 &c. De façon qu'il reſte touſiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne ſeule quantité indeterminée, x, ou y.

Comme ſi C E eſt vne Ellipſe, & que M A ſoit le ſegment de ſon diametre, auquel C M ſoit appliquée par ordre, & qui ait r pour ſon coſté droit, & q pour le trauerſant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius. (5) (6)



$xx \infty ry - \frac{r}{q}yy$, d'on oſtant xx, il reſte $ss - vv + 2vy - yy \infty ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,

$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ eſgal a rien. car il eſt mieux en cet endroit de conſiderer ainſi enſemble toute la ſomme, que d'en faire vne partie eſgale a l'autre.

(1) Qui fait avec elle des angles droits : la normale.

(2) La ligne droite GA sert de droite d'ordonnée (diamètre pour Fermat).

(3) Voir le point B sur la seconde figure.

(4) La baze CP : l'hypoténuse du triangle CMP.

(5) Appliquée par ordre ; on retrouve le vocabulaire : appliquée CM, point M ordonné sur GA (voir annexe C).

(6) Avec nos notations nous écririons

$$\frac{CM^2}{b^2} + \frac{OM^2}{a^2} = 1 \quad (\text{O milieu de } [GA])$$

puis dans le cas de la figure AM = OA - OM = a - OM

donc

$$CM^2 = \frac{2b^2}{a} AM - \frac{b^2}{a^2} AM^2 \text{ et en identifiant avec Descartes}$$

$$x^2 = r\,y - \frac{r}{q}\,y^2$$

il vient

$$r = \frac{2b^2}{a} \quad \text{et} \quad q = 2a$$

- q est le "traversant" ou grand axe
- si dans un cercle de diamètre 2a, (cercle principal) on projette une corde 2b sur le diamètre, la projection (côté du triangle rectangle) est telle que :

$r.2a = 4b^2$

donc

$$r = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$$

tel est le rôle de r. Cette "mise en équation" s'appuie entièrement sur le géométrie de l'ellipse selon Apollonius de Perga.

- 13Th : Théorème 13 du 1er livre d'Apollonius.

Ensuite Descartes donne le schéma des calculs. A savoir, si on avait étudié un cercle de centre P et de rayon CP il aurait, en général, coupé l'ellipse en deux points C et E sauf s'il était tangent : CP serait alors normale. Descartes refait le calcul précédent dans ce cas, puis identifie les deux équations et écrit qu'il y a racine double. Il manipule alors un polynome en y^6.

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{array}{l} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +4bcd \\ -2ddv \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{array}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd.$$

(On remarquera la disposition des coefficients)
et il obtient la valeur de v = AP qui situe le point P.

$$v \propto \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}$$

On comprend la réaction de Fermat ! Il est vrai que Descartes achève par ces lignes sa "géométrie".

> Car en matiere de progreſſions Mathematiques, lorſqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'eſt pas malayſé de trouuer les autres. Et i'eſpere que nos neueux me ſçauront gré, non ſeulement des choſes que iay icy expliquées; mais auſſy de celles que iay omiſes volontairerement, affin de leur laiſſer le plaiſir de les inuenter.

Disons encore que, devant l'insistance de ses amis, Descartes laissa l'un d'eux, Van Schooten, publier en 1649 une édition latine de la "Géométrie" accompagnée de remarques, de commentaires et de détails de calculs qu'il approuva.

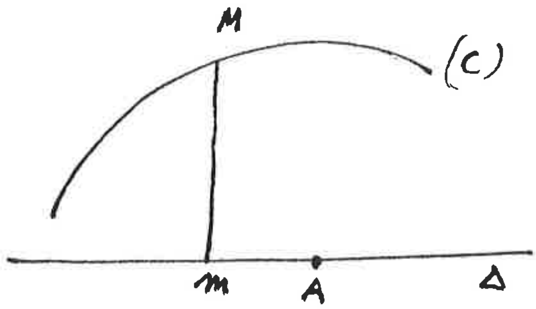
ANNEXE C

A propos de géométrie analytique

La notion telle que nous la connaissons n'apparaît qu'au milieu du 18e siècle.

Le système de deux axes de coordonnées ne se trouve ni dans l'oeuvre de Fermat ni dans celle de Descartes. L'idée qui les inspire est la suivante : (1)

On adjoint à une courbe (C) une droite Δ. De chaque point M de (C) on mène une perpendiculaire Mm à Δ. On "ordonne" alors les points m sur Δ et on évalue Mm. Δ reçoit le nom de "diamètre" car les premières courbes (C) étudiées étant des coniques, Δ est effectivement un diamètre de celles-ci. Mm est l'"appliquée" (on applique M sur Δ). L'ordonnée de m est la distance à un point A arbitraire de Δ. Il n'est pas question d'algèbre sur Δ. Am est une longueur (toujours positive). On envisage divers cas de figure au besoin.



Voici comment La Hire présente la chose dans un mémoire à l'Académie des Sciences du 7 décembre 1710.

"... Tous les points sont déterminés par l'extrémité d'une ligne droite qui peut changer de grandeur, et qui fait un angle constant avec une autre ligne droite qu'elle parcourt par son autre extrémité, et cette seconde ligne qui est parcourue par la première peut être considérée indéfinie d'un côté et d'autre, mais elle a un point fixe qu'on appelle origine du lieu. J'avais appelé cette seconde ligne la TIGE du lieu et la première, dans ses différentes positions sur la seconde en la parcourant, les RAMEAUX du lieu. On a aussi appelé depuis les parties de la tige, les ABSCISSES, et les rameaux les ORDONNEES".

Ce ne sera que plus tard qu'on "appliquera" M sur deux droites et qu'il y aura deux points co-ordonnés. La seconde droite apparaît toutefois dans les figures de l'"Enumeratio linearum tertis ordinis" que publia Newton en 1704 et où il étudiait toutes les courbes du 3e degré.

(1) D'aucuns voient cette idée en germe chez Nicolas Oresme vers 1370.

ANNEXE D

Tangente et 17e siècle

La notion de tangente n'est pas née au 17e siècle, mais elle a joué alors un rôle très important. Essayons de le situer brièvement.

Pour Euclide une tangente est une droite qui coupe une courbe en un seul point. Les constructions reposent sur cette propriété. Torricelli (opera geometrica 1644) et Roberval (cycloïde 1634) travaillent encore en ce sens.

Archimède, quant à lui se laisse conduire par des considérations cinématiques dont l'esprit est loin d'être absent chez Roberval, chez Barrow (Lectiones geometricæ 1670) ainsi que chez l'élève de ce dernier : Newton.

Lorsque la tangente apparait comme limite d'une sécante -donc deux points d'intersection confondus- le calcul différentiel est en germe : il s'agit de rendre minimale la distance entre deux points d'intersection.

Képler traite déjà ainsi du problème dans sa "Nova stereometria doliorum vinariorum" (1615). Il parle de "décrement insensible". Nous avons trouvé l'algorithme au point chez Fermat.

Les deux procédés offerts par Descartes (+) consistent en fait à déterminer la normale à la courbe et à en déduire la tangente comme lui étant perpendiculaire. (Les calculs sont en général beaucoup plus lourds et délicats, Fermat l'a bien fait remarquer).

Leibniz place définitivement la solution du problème au départ de son calcul infinitésimal en liant les deux problèmes selon l'idée qu'il dit avoir perçue avec le "triangle caractéristique" dans le "traité des sinus du quart de cercle" de Pascal (1659).

On notera que le mot "tangente" n'apparait au dictionnaire de l'Académie Française que dans l'édition de 1762, avec cette définition :

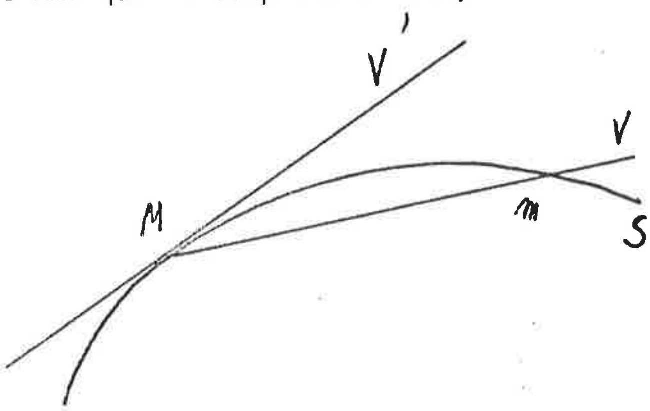
"ligne droite qui touche en quelqu'un de ses points une courbe"

et quelques pages plus loin :

"Toucher : raser en un seul point sans couper".

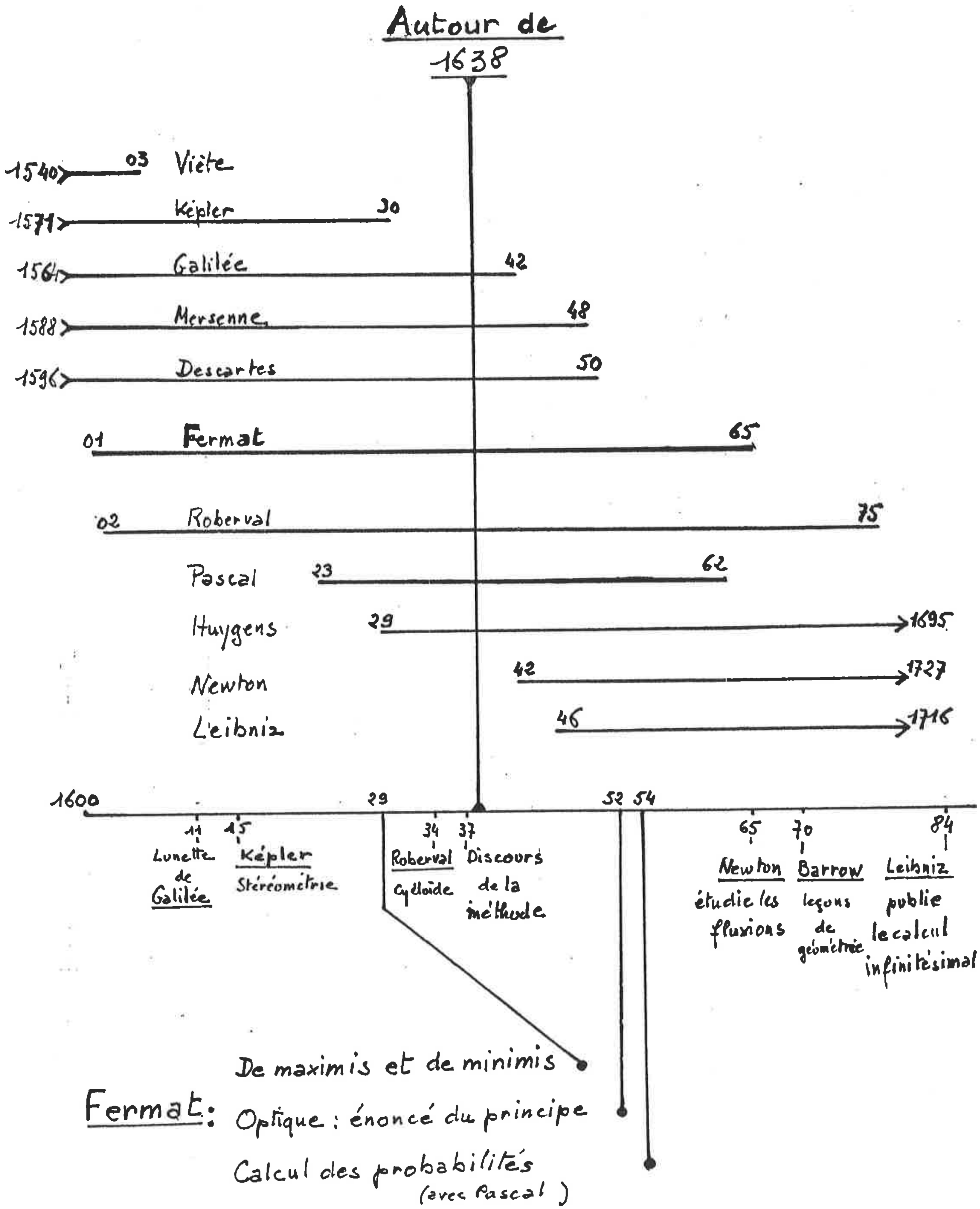
Par contre dans l'"Encyclopédie", sous la plume de D'Alembert, on trouve :

"Menez à la courbe MS une sécante MmV qui la coupe en M et m, faites tourner cette sécante autour du point M jusqu'à ce que le point m tombe sur le point M. La ligne MmV parvenue à la dernière position MV' est tangente".



(+) Voir annexe B.

ANNEXE E



Autour de
1638
1540
03
Viète
1571
Kepler
30
1564
Galilée
42
1588
Mersenne
48
1596
Descartes
50
01
Fermat
65
02
Roberval
75
Pascal
23
62
Huygens
29
1695
Newton
42
1727
Leibniz
46
1716
1600
29
52
54
11
Lunette de Galilée
15
Kepler
Stéréométrie
34
Roberval
Cycloïde
37
Discours de la méthode
65
Newton
étudie les fluxions
70
Barrow
leçons de géométrie
84
Leibniz
publie le calcul infinitésimal
Fermat:
De maximis et de minimis
Optique : énoncé du principe
Calcul des probabilités
(avec Pascal)

ANNEXE F

Pierre FERMAT

1601 - Naissance à Beaumont de Lomagne (Tarn et Garonne).

1631 - Conseiller au Parlement de Toulouse.

1665 - Décès à Castres.

Toute sa vie s'est pratiquement passée entre Toulouse et Castres. Fermat n'a rien publié de son vivant si ce n'est un court essai (+). Pendant les loisirs que lui laissait sa charge il s'adonne tant aux vers latins, grecs ou espagnols qu'aux mathématiques. Mais dans ce dernier domaine, il fit montre d'un génie extraordinaire.

Toute son oeuvre manuscrite réside en notes marginales d'ouvrages de Diophante, Bachet de Méziriac ou Viète, en esquisses et en correspondances avec d'autres "géomètres" amis : Carcavi, Mersenne, Pascal.

Un de ses fils fit éditer un "Diophante" avec les notes paternelles puis (1679) les "Varia opera" qui ne contiennent qu'une partie des manuscrits et de la correspondance. (++)

Il semble bien que Fermat possédait, avant Descartes, les ressources de ce que nous appelons la géométrie analytique.

Sa méthode "De maximis et de minimis" s'approche fort de ce qui sera la calcul différentiel.

En analyse combinatoire et théorie des nombres, Fermat fut difficilement égalé.

Pour ce qui est du calcul des probabilités nul ne conteste à Pascal et Fermat d'en être les fondateurs.

On n'oubliera pas, non plus, ce que lui doit l'optique en particulier quant aux lois de la réfraction.

Personnage sympathique tel fut Fermat que Pascal désignait comme : "Celui de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand géomètre".

Un autre jugement encore ; dans un ouvrage sur le calcul intégral publié en 1979 W.M. Priestley, auteur américain écrit : "The true inventor of differential calculus was this quiet man of Toulouse".

(+) Ad locos planos et solidos isagoge (1636). On y trouve les fondements de la géométrie analytique.

(++) Plus complète est l'édition Tannery (1912) avec son supplément (1922).

BIBLIOGRAPHIE

Fermat : Oeuvres. Edition Tannery

Descartes : Géométrie. On peut se procurer une reproduction de l'édition originale dans "The geometry of René Descartes", édition Dover, New York...

Montucla : Histoire des Mathématiques. Il existe une réédition récente chez Blanchard, à Paris.

Becker et Hofmann : Histoire des Mathématiques.

Collette : Histoire des Mathématiques.

Smith : History of Mathematics.

Auger : Un savant méconnu : Roberval.

Les mémoires de l'Académie des Sciences.

Pierre FERMAT

d'après le portrait de François de Poilly

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DE L'UNIVERSITE DE DIJON

B.P. 138 - 21004 DIJON CEDEX - Tél : (80) 66.64.13 poste 641

Pour l'Yonne : Lycée Jacques Amyot - 89000 AUXERRE

Le groupe "Histoire des Mathématiques pour nos Elèves" a produit jusqu'à présent les brochures suivantes (disponibles à l'I.R.E.M.) :

- Notes sur des mathématiciens à l'usage d'élèves entrant en seconde (4e édition);
- La numération écrite (2e édition) ; (épuisé).
- Glanes d'histoire des mathématiciens (3e édition augmentée) ;
- Jeux de géométries (petite histoire des parallèles) (2e édition) ;
- Lecture d'un texte de Huygens (la fonction logarithme) (2e édition) ; (épuisé).
- Egale zéro (Aperçu historique de la notion d'équation) (2e édition) ;
- Pages et Calculs choisis de Blaise Pascal (2e édition) ;
- Léon d'Anvers : analyse d'une arithmétique du 16e siècle ;
- Choses d'Algèbre (Aperçu historique des notations) ;
- Vecteur : Recherche sur ses origines ;
- Mathématiques et Islam ;
- De l'invention des tangentes (Pages et calculs choisis de P. Fermat).

Et, en collaboration avec l'équipe d'animation pédagogique d'Histoire de l'Yonne :

- Survol d'histoire des mathématiques en occident et émergence de la science moderne ;
- Textes et documents de science relatifs au début du 17e siècle.

(On demandera ces dernières au C.D.D.P. de l'Yonne, 25 avenue Pasteur, 89000 AUXERRE).

Imprimerie de l'I.R.E.M.

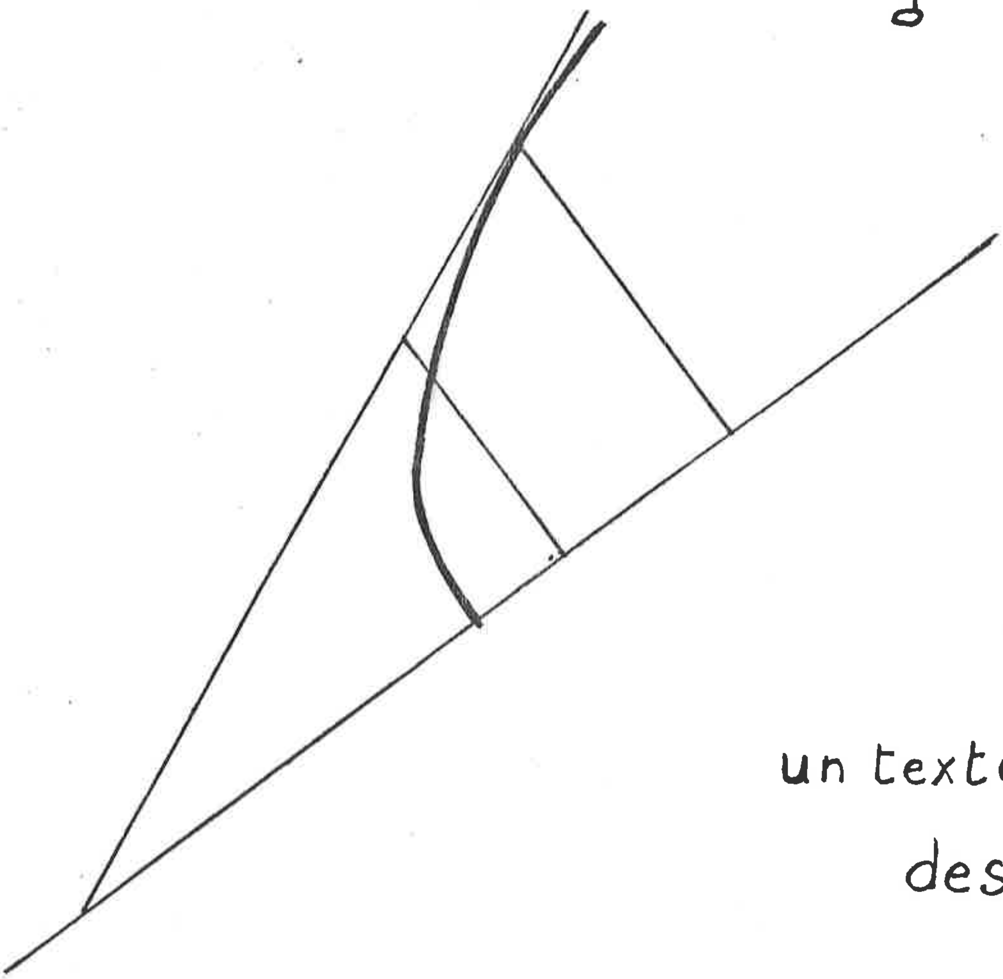
Dépot légal n° 2 - 1er trimestre 1980

Université de DIJON.

IREM

groupe d'HISTOIRE des MATHEMATIQUES pour nos ELEVES

De l'invention des tangentes



un texte et des calculs de

P. FERMAT

Février 1980