

groupe d'HISTOIRE des
MATHEMATIQUES
pour nos ELEVES



ΟΙ ΛΟΓΟΙ
ΤΩΝ
ΕΛΛΗΝΩΝ



COMPTES GRECS

La présente brochure a été composée par l'équipe transdisciplinaire
du groupe "Histoire des Mathématiques pour nos Elèves" de l'I.R.E.M. de
Dijon

Bataille - Bouat (Histoire)
Plane (Mathématiques)

Octobre 1980

Ces documents de travail sont la propriété de l'I.R.E.M. de
DIJON.

Les droits de reproduction et de traduction sont réservés pour
tous pays. Toute reproduction par quelque procédé que ce soit constitue
une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957
sur la protection des droits d'auteur.

Une précédente brochure a donné un aperçu du calcul chez les Romains : "Calculus populusque romanus". Voici un travail similaire concernant les Grecs.

Il serait bon de rapprocher les deux car c'est à tort, semble-t-il, qu'on a trop séparé ces deux civilisations méditerranéennes. Nos pages, tournées vers la pratique du calcul, éclaireront un peu, nous l'espérons, les préoccupations, dans cette voie, qui furent celles des hommes en ces temps-là.

Des annexes viennent préciser certains points (systèmes de numération, unités de mesures, etc...) et apporter quelque documentation.

Cette plaquette n'est pas destinée à tracer une esquisse des mathématiques grecques "science par excellence" dans l'esprit des philosophes grecs qui furent peu ou prou géomètres. (1)

Notre propos est d'aider à comprendre comment comptaient les Grecs qui ne vivaient pas tous à l'unisson d'Aristote (*) . (Les * renvoient à l'annexe 7 : Définitions).

Pour ce faire il est utile de rappeler les caractères des sociétés grecques dans leur environnement géographique et leur trame historique.

Au voyageur, les pays grecs présentent un relief compartimenté avec des escarpements calcaires dénudés, des champs de pierrailles, et de trop rares plaines verdoyantes. Les communications sont malaisées par voie de terre mais partout la mer pénètre profondément, le cabotage est le moyen essentiel de tous les contacts et de tous les échanges.

Les premiers établissements humains y apparaissent tôt, dès le néolithique.

Des migrations de groupes indo-européens, en qui les spécialistes reconnaissent les premiers Grecs (langues, céramique, ...) n'apportent que de faibles modifications à la vie des populations balkaniques.

Ce n'est que vers 1580 avant Jésus-Christ que les choses changent brusquement. Les archéologues constatent le développement d'une brillante civilisation crétoise : la même civilisation ? deux civilisations parallèles avec d'étroites relations ? Beaucoup d'archéologues penchent plutôt pour cette deuxième hypothèse, avec vers 1450-1400 une subordination peut être facilitée, préparée, par des cataclysmes naturels : tremblements de terre, raz de marée, ...

Ce qui est à noter c'est la puissance des princes qui gouvernent ces états concurrents. La lecture des tablettes d'argile nous apprend une organisation très précise, centrée autour des palais, des activités agricoles, des greniers, des échanges avec les Hittites, les peuples de Palestine, d'Egypte...

Les textes tardifs (VIIIe siècle avant Jésus-Christ) de l'Illiade et l'Odyssée n'en sont qu'un pâle écho.

(1) Au moins jusqu'au XVIIIe siècle, le mot géomètre désigne celui qui se livre aux mathématiques en général et pas seulement à la géométrie.

Brusquement cette civilisation semble disparaître, vers la fin du XII^{ème} siècle avant Jésus-Christ, (nouveaux envahisseurs grecs particulièrement avides ? supériorité de la métallurgie du fer sur celle du bronze ?), la chronologie est très difficile à établir.

Toujours est-il que de profondes transformations interviennent dans les domaines de la vie matérielle et culturelle : ainsi les Grecs empruntent aux Phéniciens l'alphabet qui devient le support de leur langue. Naît aussi un type nouveau d'état : la cité.

La cité qui apparaît constituée dès le VIII^{ème} siècle se définit comme une forme politique originale basée sur une communauté de citoyens, comme un centre de décisions concernant tous les aspects de la vie.

Chacune d'entre elles a ses particularités de dimensions, (ex : cité de Corinthe: 580 km², cité d'Athènes : 2500 km², cité de Sparte : 8000 km²...) et d'évolution.

Les historiens ont coutume de distinguer 3 périodes dans l'histoire de ces cités : archaïque, classique, hellénistique.

a) La période archaïque se caractérise par 2 faits : l'expansion : c'est la colonisation sur les pourtours de la mer Méditerranée entraînant entre autre une évolution politique importante : le passage d'un gouvernement aristocratique (*) militaire et foncier étroit, à la tyrannie où la catégorie des marchands essaie d'atténuer les conflits agraires et les revendications des catégories urbaines libres (marins, petits revendeurs, ...)

(La chronologie des transformations est plus ou moins rapide ; la cité de Sparte ne connaît pas la tyrannie d'où l'absence de moyens de compte perfectionnés, les monnaies n'y jouant qu'un rôle secondaire).

b) La période classique : le conflit des guerres médiques hâte les évolutions ou renforce les refus.

La première guerre n'est finalement qu'une alerte grave pour la cité d'Athènes (Marathon 490).

La deuxième guerre est autrement sérieuse pour l'ensemble du monde grec : la volonté de résistance aux Perses étant inégale. A Salamine en 480 et à Platées en 479 les Grecs ont le sentiment d'avoir remporté de très grandes victoires et d'avoir défendu les libertés civiques.

Les conséquences en sont doubles pour la cité d'Athènes :

- . prééminence de la cité d'Athènes observée avec inquiétude par les autres cités ainsi Sparte,
- . mise en place après l'ostracisme de Cimon en 461 d'un système politique :

la démocratie (*) où les pouvoirs de l'ancien Aréopage aristocratique sont diminués au profit de l'Ecclésia : l'assemblée des citoyens (les fonctions publiques y sont rétribuées).

Ces hommes libres, citoyens, se déchargent en partie ou en tout des travaux productifs sur une masse d'esclaves ou de dépendants qui leur demeurent à jamais étrangers. D'où deux niveaux de la science qui se reflètent dans les deux modes de calcul vivant côte à côte : celui pratiqué pour les besoins de la vie et celui pratiqué par ceux qui, en plus, voulaient en justifier les règles.

Cette dualité se retrouve dans l'attitude des Pythagoriciens (*) pour lesquels le savoir doit être une source de pouvoir.

La guerre du Péloponnèse, violent conflit de pouvoirs et d'alliances, marque un tournant dans l'histoire des cités. Une profonde crise sociale les ébranle et c'est en ordre dispersé qu'elles affrontent le nouveau danger : Philippe, roi de Macédoine.

Malgré les exhortations de Démosthène, les coalitions conclues à la hâte, la défaite de Chéronée en 338 indique la fin de la période classique.

c) La période hellénistique

La Grèce n'est que partiellement associée aux conquêtes d'Alexandre. La mort de celui-ci en 323 provoque un ultime sursaut durement châtié ; ainsi, à Athènes, Démosthène s'empoisonne et plus de la moitié des citoyens perdent leurs droits civiques.

Au cours du siècle qui précède la conquête romaine, la Grèce ne cesse de s'appauvrir : Athènes vit de plus en plus repliée sur elle-même, le port du Pirée n'est plus le grand marché égéen ; à Sparte des troubles agraires éclatent et la "bourgeoisie" achéenne fait appel à Rome.

Au II^{ème} siècle, le monde grec est incorporé aux conquêtes romaines après que les dernières résistances en Macédoine (197, 168) et à Corinthe (146) aient été matées.

De nouvelles orientations intellectuelles se dessinent : un esprit cosmopolite commence à dominer la pensée grecque qui se met à la portée de tous les peuples. La conquête de Rome ; elle-même, par la civilisation grecque hellénistique est un fait capital.

Les connaissances que nous avons maintenant de la période et des lieux que l'histoire retient comme étant ceux des sociétés grecques nous permettent d'évoquer d'abord, d'un mot le monde crétois (voir annexe 1).

Le principe de son système de numération se rattache à celui de l'Égypte. Mais qu'en était-il des procédés de calcul ?

Lorsque l'écriture de ce peuple sera décryptée peut être en saurons nous davantage que ce que nous ont révélé les inscriptions seulement numériques.

Parmi les cités grecques les mieux connues, la cité de Sparte offre l'exemple d'un état où il ne semble pas que le calcul ait été poussé très loin. L'homme y était avant tout le soldat -serviteur de l'état-. Sa formation, uniquement l'oeuvre de cet état, était toute militaire et ne nécessitait guère de besoins de calculs, sauf, peut être pour dénombrer les butins. Pour le reste, le travail manuel était à l'honneur...

Dans la cité d'Athènes, si l'arrivée de la démocratie (*) causa la création et le développement d'écoles, l'aristocratie n'en conserva pas moins, pour les siens, une forme d'éducation, d'abord complémentaire de celle des écoles, mais prenant ensuite une forme supérieure plus intellectuelle. Au calcul succéda la science avec ses exigences.

La Mésopotamie , on le sait, a connu dès le II^{ème} millénaire avant Jésus-Christ un système perfectionné de numération assez proche du nôtre. Les Grecs, au hasard de leurs navigations recueillirent le capital scientifique des peuples chez qui ils abordèrent : égyptiens, phéniciens, carthaginois... Ne furent-ils pas mis en contact avec le patrimoine scientifique babylonien ? Ne purent-ils pas l'assimiler ? Ou bien les Pythagoriciens cherchèrent-ils à garder un pouvoir sur les masses à l'aide du secret ? (Comme les prêtres du pharaon et d'autres...) Toujours est-il que le système de numération de position babylonien ne laissa aucune trace dans la Grèce classique.

Par ailleurs l'aristocratique philosophie de la secte pythagoricienne considéra que le calcul de dénombrement était une occupation indigne du citoyen distingué. Les techniques opératoires furent délaissées au profit de l'étude des propriétés des nombres et de la justification des résultats.

Les Pythagoriciens apprenaient aux commerçants à se servir de tables de calcul et d'autres outils à ces fins, mais jamais à les concevoir ; les recettes devant en rester cachées . (2)

(2) Une attitude analogue, mais cette fois pour de compréhensibles difficultés se trouve illustrée par les règles pratiques pour établir le calendrier. L'empire romain, puis l'Eglise avaient besoin de faire coïncider les dates dans les pays soumis à leur juridiction. Il n'était pas question de rendre astronomes tous les préfets, évêques, évêques ou curés. Il fallut établir des moyens simples pour s'y retrouver, sans théorie, par exemple pour fixer la date de Pâques chaque année. Ainsi naquit une table perpétuelle : le comput ecclésiastique que l'on trouve encore dans maints annuaires.

Comment pouvait donc calculer le peuple ? Que lui apprenait-on ? Essentiellement à répondre à la question : combien ? Cela nécessitait de savoir dénombrer. Il fallait donc apprendre une numération.

Numération orale : ce sont des mots appris par coeur en ordre ; numération gestuelle avec des doigts tendus ou repliés ; numération écrite avec des symboles. On n'avait guère besoin d'aller très loin. En Grec, le même mot "myriade" accentué différemment (voir annexe 2) veut dire "10000" ou "un grand nombre". Ainsi la tradition, sinon la légende, rapporte qu'à la bataille de Marathon il y avait une myriade d'Athéniens et un nombre plus grand de Perses, des myriades, sans précision.

A la suite des questions de dénombrement les opérations d'addition et de soustraction s'avérèrent indispensables pour le commerce. Certes on pouvait encore faire usage des doigts mais les abaqués (ἀβὰκιον), les tables de calcul et les jetons permirent bien des choses à qui était entraîné à leur emploi. (3)

On trouvera en annexe 2 la description du système populaire de numération écrite. On pourra juger de sa grande parenté avec, aux symboles près, la numération romaine (4). Les tables de calcul (5) et les bouliers sont dans le prolongement naturel de ce système pour effectuer les opérations fondamentales d'addition et de soustraction puis, à l'aide de la duplication, de multiplication (4).

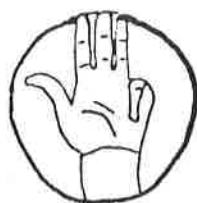
La numération digitale est une technique à part. Sans doute était-il difficile de faire apprendre par coeur une liste un peu longue de mots, aussi tout un jeu de doigts tendus et repliés y suppléait-il. De nos jours, en Orient, le procédé, même s'il ne vient que doubler un mot prononcé, n'a pas totalement disparu. Il est bien pratique pour les transactions muettes... Encore plus que pour une tradition orale les témoins en sont rares. Toutefois il est bien attesté dans des récits anciens, grecs ou latins. On le trouve

(3) Ne pas oublier le bonhomme Argan du "Malade imaginaire" qui 20 siècles après Aristote vérifie les comptes de son apothicaire avec des jetons.

(4) Se reporter, entre autre, à notre brochure "Calculus populusque romanus".

(5) Voir annexe 5

en dessins datant du Moyen-Age (6) ainsi que sur des tessères.



Sept



Douze

Reproduction de deux
tessères, avec les symboles
de numération digitale,
conservés au Cabinet des
médailles (Paris)

Les annexes 4 et 5 donnent une idée des principales mesures reconnues. On y remarquera le rôle joué par 6 et 12. En effet le vocabulaire comportait une série de mots pour désigner toutes les fonctions en douzième de l'unité. Cela ne veut pas dire que le calcul fractionnaire était connu dans le peuple mais il fallait bien partager les unités de mesure et le système des douze douzièmes s'était révélé pratique. On s'en tint là.

En notant enfin l'existence de tables ^{de} carrés selon cette notation on aura résumé à grands traits ce avec quoi comptait la grande masse des hommes, artisans et commerçants entre autres. Ce n'est donc pas par hasard si ce système de numération restera le seul en usage sur les pièces de monnaie.

Autre était le rôle dévolu au calcul dans l'éducation au niveau de l'aristocratie, autres étaient ses moyens.

Platon (*) recommandait l'étude des mathématiques par tous les enfants dès le début de la formation, quelque rude que fût cette étude.

"La racine est amère, les fruits sont doux" disait-on en parlant de l'éducation.

Platon donc distingue deux parties dans les mathématiques.

λογιστική - nous dirons la logistique - et αριθμητική - arithmétique.

La logistique est la pratique des exercices de calcul voire de

(6) Voir notre brochure "Calculus populusque romanus".

géométrie élémentaire. C'est une introduction. "Elle prépare la conversion de l'âme ; par elle l'âme s'éveille à la contemplation de la réalité elle-même et non à l'ombre des "objets"". Platon recommandait des exercices pratiques à faire exécuter aux enfants en leur donnant de petits objets. Sans doute exista-t-il des recueils de ces exercices, nous n'en possédons pas.

Après ce temps d'introduction pendant lequel ont pu être sélectionnés les meilleurs, le disciple débouche sur l'arithmétique plus abstraite. On raisonne désormais plus qu'on ne compte. Il semble même que la logistique fut un art méprisé de maints savants grecs.

Alors, comme on compte peu, il suffit dans le discours d'écrire au besoin les nombres prononcés en toutes lettres, ce qui se fit le plus souvent.

Parallèlement va se développer, peut être sous l'influence phénicienne ou hébraïque (7) le système de numération alphabétique décrit en annexe 3. Ce dernier offre l'avantage de ne nécessiter pratiquement que la connaissance des caractères de l'écriture.

Et les opérations ?

D'une part on peut penser qu'on avait recours au boulier ou à la table (après passage dans l'autre système) voire à un calculateur. -il y avait des esclaves entraînés à ces fins-, calculateur qui usait sans doute de l'autre système. Chaque époque n'a-t-elle pas son outil, sa machine à calculer ?

En ce qui concerne l'addition - πρόσθεσις - et sa soeur la soustraction - ἀφαίρεσις - il est légitime d'estimer que le nombre était décomposé, les additions se faisant par ordre puis le résultat était regroupé ! Expliquons-nous sur un exemple : (voir les symboles en annexe 3)

TΠΖ plus PNH (387 + 158) se traite comme :

$$(T + \Pi + Z) + (P + N + H) \quad (8)$$

et il vient :

$$(T+P) + (\Pi+N) + (Z+H)$$

(7) Voir notre brochure "La numération écrite".

(8) Les symboles () et + qui datent des 17ème et 18ème siècles ne sont introduits ici que pour la compréhension.
Voire notre brochure "Choses d'Algèbre".

Sont alors nécessaires trois tables d'addition.

Celle des unités : Z + H donne IF

Celle des dizaines : Π + N donne PΛ

Celle des centaines : T + P donne Υ

On obtient :

$(Υ + P) + (Λ + I) + F$

et de là, similairement :

$φ + M + F$

La somme de TNZ et de PNH s'écrit φMF (545).

Le mot qui désigne la somme c'est κεφάλαιον (céphalaion), en effet cette somme s'écrivait non pas en dessous mais au dessus, en tête des colonnes de nombres à additionner.

Pour la multiplication - πολλαπλασιασμός - c'est la même idée qui va être exploitée. Nous suivrons celle-ci sur un rare exemple pris dans la littérature de l'époque. Démosthène (*) le fournit dans l'argument de son plaidoyer contre un certain Androtion (vers 365 avant Jésus-Christ). Il s'agit de la multiplication de 12 par 29. Démosthène écrit les noms de nombre en entier, mais le principe est le même : 12 c'est dix plus deux, 29 vingt plus neuf.

Δεκάκις γὰρ εἴκοσι διακόσια, δις εἴκοσι τεσσαράκοντα,
δεκάκις ἑννέα ἐνενήκοντα, δις ἑννέα δεκαοκτώ,

"10 fois 20 font 200, 2 fois 20 font 40

10 fois 9 font 90, 2 fois 9 font 18

Le discours a pour but de montrer que 12 mois lunaires de 29 jours 1/2 font 354 jours. Au calcul précédent Démosthène ajoute :

καὶ τὸ ἥμισυ τῶν δώδεκα ἕξ.

... et la moitié de douze est six.

Le total est alors

τριακοσίας πεντήκοντα τέσσαρας.

trois cent cinquante quatre".

Nous suivons bien le raisonnement et, les nombres étant écrits en entier cela paraît relativement aisé pour qui sait compter "de tête" en ne mélangeant pas κόσια et κοντα (9).

(9) On remarquera que ces deux terminaisons qui interviennent dans la formation des mots de centaines et de dizaines. Il en est comme du suffixe "ante" en français pour les dizaines : cinquante, soixante, voire septante.

Si on passe à une numération par symboles alphabétiques, c'est tout un nouveau jeu de tables de multiplication qui sera nécessaire : unités par unités, unités par dizaines, dizaines par dizaines et s'il y a des centaines...

Ecrivons ce même calcul avec les symboles.

Soit $(\iota\beta) \cdot (\kappa\theta)$ ou en utilisant une écriture "polynome",

$$(i + \beta) \cdot (\kappa + \theta)$$

$$\iota \cdot \kappa = \sigma ; \quad \beta \kappa = \mu ; \quad \iota \cdot \theta = \rho ; \quad \beta \theta = \eta$$

$$(\iota\beta) \cdot (\kappa\theta) = \sigma + (\mu + \rho + \iota) + \eta$$

$$= \sigma + (\rho + \mu) + \eta$$

$$= (\sigma + \rho) + \mu + \eta$$

$$= \tau + \mu + \eta = \tau\mu\eta \quad (10)$$

Dans le même document cité, Démosthène effectue une autre opération intéressante car elle utilise des fractions (fractions de l'unité). Il s'agit de montrer que l'année ayant, selon le cours du soleil, 365 jours, le mois devrait comporter (365 divisé par 12) jours, c'est-à-dire :

τριάκοντα καὶ τρίτον καὶ δωδέκατον

"trente et un "troisième" et un "douzième"

Démosthène écrit : (11)

Δεκάκις γὰρ τριάκοντα τριακόσια, δις τριάκοντα ἑξήκοντα· λοιπὰ πέντε. Τὸ τρίτον τῶν δώδεκα τέσσαρα· λοιπὴ μία. Δωδέκατον δὲ ἡ μία τῶν δώδεκά ἐστι.

"10 fois 30 font 300, 2 fois 30 font 60, reste 5. Le tiers de 12 est 4, reste 1. Le douzième de 12 est 1.

(10) Les mathématiciens islamiques du 10ème siècle qui travaillèrent à partir de documents grecs arrivèrent à améliorer le procédé mais en revenant à un système à base soixante (sans doute d'origine babylonienne) qui ne comportait qu'une seule table de multiplication mais de 59 "chiffres" qu'il suffisait de savoir multiplier deux par deux. Voir notre brochure "Mathématiques et Islam"

(11) Ce texte est-il l'expression d'une division (partage) = μερισμός - ou celui d'une preuve, d'une justification ?

Pour être ainsi exposée lors d'une plaidorie, il est légitime de penser qu'une telle opération ne devrait pas être d'usage courant. On imagine mal, de nos jours, une des gloires du Palais, éprouvant le besoin de détailler une multiplication dans le prétoire !

Les tables d'opérations que nous avons évoquées, étaient-elles apprises par coeur ou figuraient-elles sur des tablettes ? Nous disposons de peu de témoignages.

Nous reproduisons, ici, un document rare sur cette question

┐	α	┐
┐	β	┐
┐	┐	θ
┐	Δ	1β
┐	ε	1ε
┐	ς	1η
┐	ζ	κα
┐	η	κα
┐	θ	κζ
┐	ι	λ

Reproduction d'une table de multiplication alphabétique
(Table de 3 pour les unités) conservée au British Museum (Londres).

On remarquera la variété de graphie des lettres. Il s'agit d'une écriture, au stylet, de majuscules. (voir annexe n° 3).

On connaît aussi des tables de carrés et des tables d'arcs et de cordes.

Il est enfin un autre aspect de la science des nombres ou plus exactement du langage des nombres qu'on ne peut passer sous silence car les

Grecs s'y attachèrent. Il s'agissait, dirons-nous, d'esthétique.

Ainsi 6 est un nombre parfait (12) car

$$6 = 1 + 2 + 3 = 1.2.3$$

On respectait le "quaternaire" : $1 + 3 = 2 + 2 = 4$, car il engendrait la "décade" * : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

De même que pour Pythagore le cube est le symbole de la terre, le tétraèdre du feu, l'octaèdre de l'air, l'icosaèdre de l'eau et que le dodécaèdre est l'enveloppe de l'univers (13), pour plus d'un penseur grec l'unité est considérée comme la monade où réside l'intelligence.

On peut aussi déboucher sur le religieux : Sept est le nombre propre à Athéna *, la déesse ni engendrée ni génératrice, car sept dans la décade n'est pas un produit (nombre premier) et n'y a pas de multiple.

Une question resterait à débattre.

Pourquoi, lorsque la numération grecque est citée, n'évoque-t-on, presque exclusivement, que le seul système alphabétique ?

Une réponse assez simple vient à l'esprit qui est la suivante. L'élite scientifique ou aristocratique employait uniquement ce système. Elle seule laissa des documents écrits. Ensuite les compilateurs du Moyen-Age connurent donc essentiellement ce système avant qu'il ne cède la place à la numération de position indo-arabe. On s'en est tenu au témoignage des compilateurs. Si le peuple de la Grèce puis de l'Empire Romain compta autrement que l'élite les traces en furent minces. Mais, se perpétuèrent dans la masse des peuples d'Occident, le calcul digital et, pour les besoins du commerce, le système romain de numération qui cacha le vieux système de l'Attique. Le témoignage de ceux qui comptaient le plus, compta le moins !

Si nous avons laissé le soin aux historiens des sociétés de rechercher la cause de la coupure, nous pouvons donner un aperçu de ses conséquences.

Au stade du simple calcul il semble bien qu'il y ait même eu plus qu'une coupure. La question de la numération fait apparaître comme un rejet de la pratique élémentaire. En méprisant ce qui avait un caractère pratique, tels les calculs, les Grecs retardèrent certainement la naissance de l'algèbre.

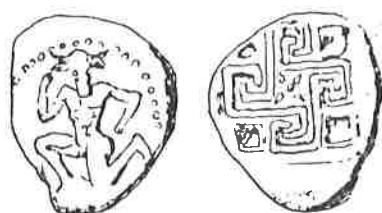
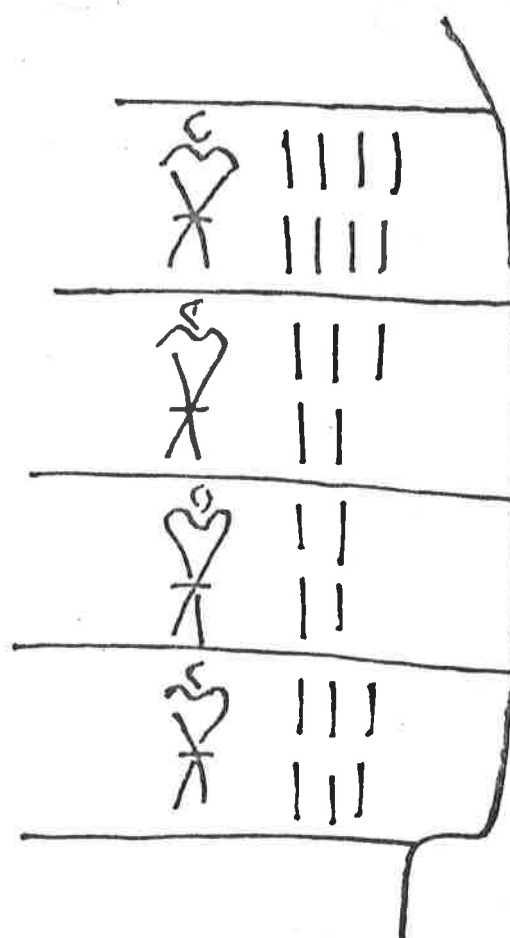
(12) Il existe une théorie générale des nombres dits parfaits, égaux à la somme de leurs diviseurs ($28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$)

(13) Il s'agit des cinq polyèdres réguliers.

On dit parfois que la violence naît de l'absence de dialogue. Pour les mathématiques il semble bien que, chez les Grecs, l'absence de dialogue entre la pratique usuelle et la réflexion théorique, entraîna une sorte de stérilité. La rigueur seule n'arrivait pas à être créatrice ; la pratique devenant mécanique s'embourbait dans le strict répétitif. (Pourquoi écrire cette phrase au passé !)

Certes la science grecque a gagné en rigueur en s'éloignant du calcul, du comput, mais elle s'est coupée des besoins stimulants et des exigences toujours renaissantes de la pratique. Si toutefois on excepte Archimède, certainement le plus grand mathématicien grec, qui, lui, n'a cessé de maintenir le dialogue, on peut dire avec L. Brunschwig la science grecque "a manqué de cela même qui nous apparaît, aujourd'hui, comme la condition du savoir : la connexion du calcul et de la physique, du calcul et de l'expérience".

Tablette de terre cuite
d'époque mycénienne (fragment)
Il s'agit d'un décompte de rameurs
sur des bateaux. Un idéogramme
figure un homme et le nombre est
indiqué par des bâtons.
(Proviens des fouilles de Pylos
XVe siècle ? Musée National
d'Athènes).

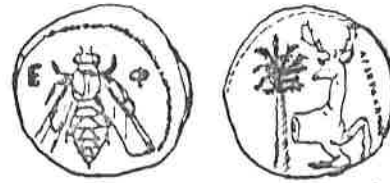


Statère de Crète (~ 450 avant J.C.)
On reconnaît le Minotaure

Tétradrachme d'Ionie

(~ 350 avant Jésus-Christ)

Abeille - Palmier - Cerf



Pièce de 10 drachmes

(Athènes 486 avant Jésus-Christ)

La Chouette déploie ses ailes
après la Victoire de Marathon.



Les graveurs grecs ont fait de la monnaie une oeuvre d'art confé-
rant à l'argent ses titres de noblesse.

LE SYSTEME DE NUMERATION CRETOIS

La Crète a été, dès 2000 avant Jésus-Christ, le siège de remarquables civilisations.

Les tablettes gravées d'argile qu'on a retrouvées, dans de véritables bibliothèques, n'ont pas encore livré le secret de leur écriture. Par contre les hiéroglyphes ayant trait à la numération permettent de déduire que le système en usage était le principe additif. En cela l'influence du système égyptien est certaine.

A une époque antérieure à 1500 avant Jésus-Christ, les symboles étaient :

⊂ pour 1 ; • pour 10 ; / pour 100 ; ♦ pour 1000

Ainsi

/// :: ככככ
ככ signifie 347

Les symboles évoluèrent par la suite mais le principe resta le même.

LE SYSTEME DE NUMERATION DE L'ATTIQUE

Les inscriptions athéniennes révèlent l'existence de ce système dès l'époque de Solon (600 avant Jésus-Christ).

Si cet ensemble de symboles et son principe furent supplantés à l'époque classique, de nombreuses traces en subsistèrent longtemps. Ce système n'est-il pas également appelé système d'Hérodianus du nom d'un savant qui vécut à Byzance vers 200 après Jésus-Christ et dont la description du système s'est transmise à travers le Moyen-Age.

Symboles : I un (il s'agit d'un simple "bâton")

Δ dix (δέκα) déca

H cent (ἑκατόν ou ἑκατόν) hecto

X mille (χίλιοι) kilo

M dix mille (μυρία) Myria (1)

S'y adjoint Π vieille écriture du Π de πέντε - penta - qui joue le rôle d'un adjectif multiplicatif pour 5 fois.

Le principe reste par ailleurs additif.

Ainsi :

ΠΔ pentedéca pour 50 ; ΠH : 500
 ΠΔΠΔ : 63 ; MM ΠH ΔΔΔ ΠΠ 20737 (2)

Pour les sommes d'argent, ces symboles se combinaient avec ceux désignant les unités monétaires (voir l'annexe n° 5). T représentant le "talent" ; on avait :

Π : 5 talents

↑ : 10 talents

On a relevé des systèmes analogues de numération dans d'autres cités grecques mais les symboles diffèrent.

(1) On notera que μυρία signifie "un nombre très grand"

(2) Le cinq romain V n'a pas ce rôle multiplicatif. C'est un symbole comme les autres. A Rome cinquante c'est L et non VX. De même pour cinq cents qui est D.

LE SYSTEME IONIQUE DE NUMERATION

Dans un premier temps est apparu sur les bords de la mer Egée, d'aucuns précisent en Ionie, un simple numérotage alphabétique permettant de repérer des objets à l'aide des vingt quatre lettres dans l'ordre conventionnel hérité des Phéniciens de A pour le premier à Ω pour le vingtquatrième. On retrouve ce principe ailleurs, par exemple, dans les psaumes dit alphabétiques de la Bible où chaque verset est précédé d'une lettre hébraïque.

Une numération limitée à 24 à dû se révéler assez tôt insuffisante.

Vers la fin du IV^e siècle avant Jésus-Christ un nouveau système, non plus fondé sur le principe additif comme celui de l'Attique mais, peut être, inspiré par celui des Hébreux, prévaut en Ionie puis dans toute la Grèce (1).

Sont d'abord utilisées les lettres majuscules (inscriptions gravées) (2) puis ce sont les minuscules (écriture) vers le 3^e siècle avant Jésus-Christ.

On a ainsi trois groupes de 9 lettres (3). Ce sont, avec leurs signification

A _{α}	B _{β}	Γ _{γ}	Δ _{δ}	E _{ϵ}	F _{ς}	Z _{ζ}	H _{η}	Θ _{θ}
1	2	3	4	5	6	7	8	9
I _{ι}	K _{κ}	Λ _{λ}	M _{μ}	N _{ν}	Ξ _{ξ}	O _{$\omicron$}	Π _{π}	Φ _{ϕ}
10	20	30	40	50	60	70	80	90
P _{ρ}	Σ _{σ}	T _{τ}	Υ _{υ}	Φ _{ϕ}	X _{χ}	Ψ _{ψ}	Ω _{ω}	Υ _{ϵ}
100	200	300	400	500	600	700	800	900

S'il y a doute une barre au dessus (ou un accent en haut à droite pour l'écriture) précise qu'il s'agit de nombres.

Cela donne :

$\overline{\text{POH}}$ et $\rho' \omicron' \eta'$ pour 178

- (1) L'antériorité hébraïque serait remise en doute par des travaux récents.
- (2) Des fouilles récentes ont montré de telles inscriptions du temps de Périclès (~ 450 avant Jésus-Christ).
- (3) Pour ce faire il a fallu adjoindre à l'alphabet classique trois lettres peu en usage en Grèce ς (vaw) ϕ (koppa) Υ (sampi)

ou bien :

$\overline{\Omega\text{I}\overline{\text{Z}}}$ et $\omega\acute{\iota}\acute{\zeta}\acute{\iota}$ pour 817

On voit donc le principe séparant unités, dizaines, centaines.

De 1000 à 9999 on reprend la première série de lettres mais précédées d'une barre / (accentuées en bas à gauche)

/Γ $\overline{\text{T}\Lambda\overline{\text{T}}}$ et , $\gamma\tau\acute{\lambda}\acute{\gamma}\acute{\gamma}$ pour 3333

/F $\overline{\text{O}\overline{\text{A}}}$ et , $\varsigma\text{o}\acute{\alpha}\acute{\alpha}$ pour 6071

Avec trente six symboles on va donc jusqu'à 10 000 (la myriade).

Au delà on indique le nombre de myriades, on écrit M (trace de la notation attique), puis la partie du nombre inférieure à la myriade.

$\lambda\acute{\beta}\acute{M}\alpha\acute{\chi}\acute{\upsilon}\acute{\delta}\acute{\alpha}$ pour 321654

Par la suite on se contente parfois d'un point au lieu de M

$\alpha\bullet\pi\epsilon$ pour 10085

Archimède (1) (mort en 212) et Apollonius de Perga (2ème siècle) avant Jésus-Christ) ayant besoin d'utiliser des nombres plus importants perfectionnèrent le système chacun avec leur écriture. En fait, comme nous rompons l'écriture des grands nombres en classes de mille : 98 765 123, ils groupaient les symboles quatre par quatre, c'est-à-dire en myriades, myriades de myriades, etc...

$\alpha\alpha\acute{\bullet}\pi\acute{\eta}\acute{\bullet}\rho\acute{\theta}\acute{\alpha}$ signifierait : 1001 (10 000 x 10 000) + 88 (10000)+ 109 (1)
donc : 100 100 880 109

C'est ainsi qu'on a pu dégager de leur oeuvre la connaissance de la règle que nous écrivons : $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ qu'ils appliquaient aux myriades.

Il est à noter que beaucoup de variantes ont été relevées au fur et à mesure que de nouveaux documents ont été étudiés par rapport au schéma théorique que nous avons présenté et qui se trouve surtout dans les ouvrages des érudits de la Renaissance.

(1) Archimède recherchait le moyen d'écrire le nombre de grains de sable qu'il y aurait dans une sphère contenant le Soleil et la Terre. De là le nom d'"Arénaire" pour le traité exposant sa méthode.

LES UNITES DE MESURES

Pour les longueurs, il y a :

le doigt (δάκτυλος - dactylo)

le pied (πούς) vaut 16 doigts.

le stade (στάδιον), vaut 600 pieds.

Le pied est selon les lieux, et les auteurs, évalué à 296 mm ou 308 mm (pied olympique) voire 355 mm en Asie ; le stade valant alors 177 ou 185 mètres.

Pour les liquides :

le cotyle (κοτύλη) évalué à 0,27 litre

le conge (κοῦς), contient 12 cotyles.

Le cotyle fut longtemps utilisé en pharmacie où il valait 60 "cuillères".

Les grains sont mesurés en Medimne (μέδιμνος) de 51,8 litres

Pour les pesées on utilisait :

1a drachme (environ 4,4 g à Athènes) qui contient 6 oboles.

le talent contient 60 mines ou 6000 drachmes.

Les monnaies (voir annexe 5) portaient les mêmes noms car elles correspondaient, théoriquement, à la masse correspondante d'argent.

LES MONNAIES GRECQUES

Il y avait les pièces d'argent :

1'obole (ὀβολός)

1a drachme (1) (δραχμή) qui vaut 6 oboles

1e statère d'argent (στατήρ) qui vaut 4 drachmes

et les pièces d'or.:

le statère d'or qui vaut 20 drachmes.

La valeur des pièces correspond à leur masse de métal (voir annexe 4), mais celle-ci a varié selon les régions, selon les époques et selon la richesse de la cité qui les frappait.

C'est dans la cité d'Argos que furent frappées, au VIII^e siècle, les premières monnaies de la Grèce continentale.

Les sommes pécuniaires étaient, quant à elles, exprimées en :

Mine ($\mu\tilde{\nu}\alpha$) pour une somme de 100 drachmes,

et Talent (τάλαντον) pour une somme de 60 mines.

En 1847 on a retrouvé, dans l'île de Salamine, une table de comptes (2) (schéma ci-contre). Dans chaque colonne on pouvait disposer des marques correspondant aux diverses grandeurs du système. Il n'y a pas de Myriade mais une colonne T pour 6000 (un talent vaut 6000 drachmes).

T P X P H P Δ Γ T I C T X

A droite les divisions de la drachme : l'obole (1/6 de drachme), C (1/2 obole), T (1/4 obole), X (1/8 obole). Il existait une pièce de cuivre (Chalque - χαλκοῦς) de cette dernière valeur. ⚡ est le symbole de la drachme.

(1) La drachme est encore le nom de l'unité monétaire grecque de nos jours.

(2) Des tables de comptes similaires étaient en usage chez les banquiers du Moyen-Âge.

LES JOURS ET LES ANS

Il est à peu près impossible d'établir une correspondance exacte entre les dates de la Grèce antique et celles de notre calendrier.

En effet, dans un cycle de 8 années grecques il y avait 5 années de 12 mois et 3 de 13 mois. Les mois avaient alternativement 29 et 30 jours pour coïncider, au moins théoriquement avec le cycle lunaire. Le premier jour de mois s'appelait "Nouvelle lune".

Grâce au mois intercalaire, de 30 jours, les années longues du cycle, on arrivait à accorder ce cycle de 8 ans avec la marche de la terre autour du soleil, en ce qui concerne les saisons.

Ce système établi vers 450 avant Jésus-Christ révéla néanmoins des décalages qui obligèrent les astronomes à proposer d'autres cycles de 19 à 76 années.

On voit donc que, pour nous, selon les textes étudiés, il faudrait bien connaître le cycle utilisé pour dater et une concordance absolue est plus que délicate à réaliser.

Le mois était divisé en 3 décades de 10 à 9 jours. Les jours de la 3ème décade étaient le plus souvent dénommés en ordre inverse de ceux des autres décades.

Ajoutons enfin que, s'il n'a pas été parlé de calendrier grec, c'est qu'il n'y a pas de kalendes grecques...

"DEFINITIONS"

ARISTOTE est né en Macédoine en 384 (son père est médecin du roi Philippe). Il se rend à Athènes vers l'âge de 18 ans, suit l'enseignement de Platon. Rappelé à Pella il est chargé de l'éducation du futur Alexandre.

Vers 335, de retour à Athènes il fonde une école de philosophie dans le parc du gymnase consacré à Apollon Lycien (d'où le mot lycée !).

Aristote meurt en 322 dans l'île d'Eulée où il a dû s'exiler sous le coup d'une accusation d'impiété.

Les écrits d'Aristote constituent une véritable encyclopédie des savoirs du IV^e siècle méditerranéen.

PYTHAGORE serait né vers 580 dans l'île de Samos en Mer Egée. Il fait un long séjour à Babilone en Chaldée et à Memphis en Egypte. Vers 530 il s'installe à Crotona en Grande Grèce.

Il y fonde une sorte d'école de philosophie où il enseigne que "tous les êtres de la nature peuvent être symbolisés par des nombres", "que le monde entier n'est qu'harmonie et arithmétique". Il meurt vers 504.

Dans la Grèce des VII^e-VI^e siècle avant Jésus-Christ, les cités aristocratiques. ex : celles d'Athènes, de Corinthe, de Thèbes... réservent les pouvoirs politiques à un petit nombre de privilégiés par la naissance ou par la fortune (aristocratie = puissance des meilleurs)

Par son étymologie et ses origines historiques la démocratie en tant que système de gouvernement est grecque (démocratie = puissance du peuple)

Cela signifie dans les cités grecques des V^e et IV^e siècle qui se disent démocratiques, essentiellement ceci :

- la désignation des responsables rétribués, nous dirions des dirigeants, se fait par élection ou par tirage au sort, en général annuel.
- le contrôle des élus par les électeurs (et éventuellement sanction : amende, ostracisme, ...)

Ne pas oublier que le droit de citoyenneté n'est obtenu qu'à des conditions très strictes : être fils de père et mère athéniens, avoir accompli un service armé. A la cité d'Athènes, au V^e siècle, 40 000 hommes sont citoyens sur une population d'environ 400 000 personnes.

PLATON naît dans la cité d'Athènes en 427 dans une famille de l'aristocratie. Il reçoit l'éducation la plus soignée et suit l'enseignement de Socrate.

Il s'intéresse aux affaires politiques dans un contexte difficile, et volontairement s'exile en Sicile où à 3 reprises il cherche à réaliser la cité de Justice selon ses conceptions.

Ses tentatives tournent mal et il cherche de nouvelles voies. Il finance et organise à Athènes même vers 387-385 une école dans le parc du gymnase Academos (d'où le mot académie). Il semble, d'après son illustre disciple Aristote, qu'il s'agisse plutôt d'une communauté de chercheurs, préoccupés de philosophie et de sciences diverses. Platon y meurt en 347.

Dans les degrés et les formes de la connaissance, Platon considère que c'est la dialectique qui procure une vision d'ensemble de ce monde intelligible.

Cette dialectique doit se fonder sur l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie, la musique : ensemble de démonstrations exclusivement rationnelles (c'est le quadrivium de la faculté médiévale des Arts libéraux).

"Les mathématiques attirent vers l'Etre" : dialogue dans la République.

DEMOSTHENE naît à Athènes en 384. Sans fortune, il devient logographe et s'intéresse à la vie politique. Ses discours ou philippiques sont destinés à galvaniser la résistance à Philippe de Macédoine. Mesurant la faiblesse de ses écrits il recherche et négocie des alliances (ainsi entre les 2 cités : Athènes, Thèbes). Le résultat sera malgré tout vain.

Il s'empoisonne, en 322 s'étant rebellé en un ultime sursaut d'indépendance contre le successeur d'Alexandre.

PERICLES est un homme politique athénien appartenant à une riche et nombreuse famille.

Il est chef du parti démocratique par l'élimination de ses concurrents (entre autres Cimon et Thucydide, qui n'est pas celui qui a écrit "la guerre de Péloponnèse").

De 443 à 430 il est, chaque année, réélu à la fonction de stratège et bien que celle-ci soit militaire et collégiale il exerce une forte emprise sur toutes les décisions politiques de la cité d'Athènes.

Sûr de la victoire, il entraîne l'Ecclesia dans la déclaration de guerre à la cité de Sparte en 432. Le peuple athénien le rend responsable des premières difficultés. Il meurt durant l'épidémie de peste en été 429.

ATHENA : d'après le poète du VII^e siècle avant Jésus-Christ Hésiode, auteur d'une Théogonie :

- Quand la déesse Métis (divinité de la sagesse et de la raison), première épouse de Zeus se révéla enceinte, Zeus décide d'avalier son épouse afin de limiter les concurrences !

- A quelques temps de là, il se mit à éprouver d'atroces maux de têtes, il eut recours à Prométhée qui le trépana. De la brèche sortit Athéna, toute armée, poussant un cri de victoire.



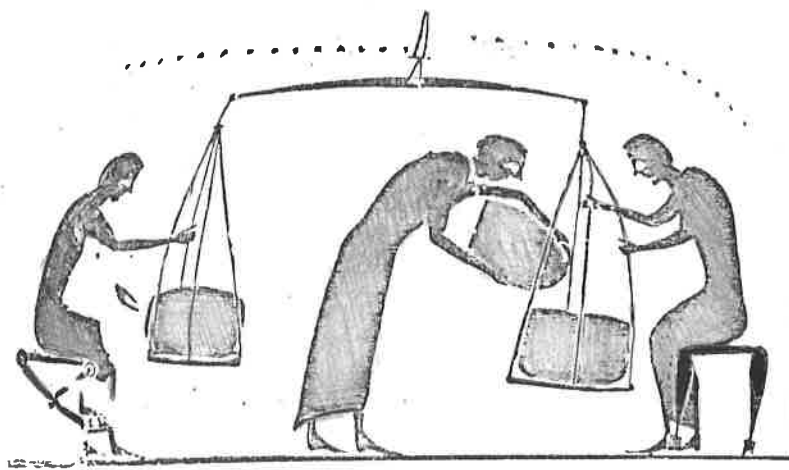
Scène d'écolè

Avec son stylet, le maître (gramma-
tiste) corrige l'exercice fait par
l'élève sur la tablette de cire.
(Peinture sur une coupe, 5^{ème}
siècle. Musée de Berlin).

Scène de pesée

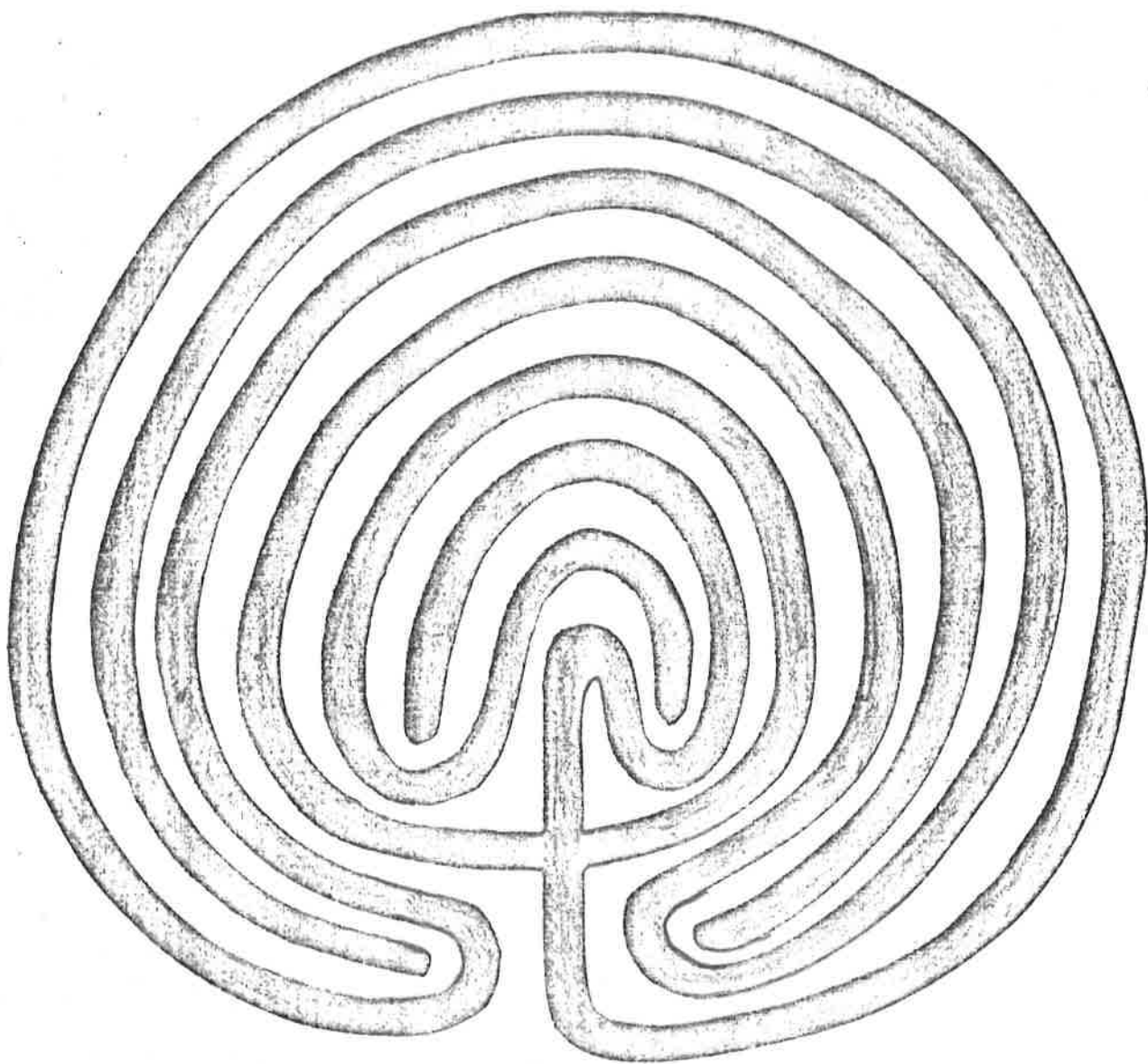
On remarquera la nature de la
balance.

(Peinture à figures noires
sur une amphore - ~ 6^{ème} siècle).
(Metropolitan Museum - New-York)



BIBLIOGRAPHIE

- Montucla : Histoire des Mathématiques (Rééd. Blanchard)
 - Hoefer : Histoire des Mathématiques (Hachette)
 - Becker et Hofmann : Histoire des Mathématiques (Lamarre)
 - Taton : Histoire du calcul (Que sais-je ?)
 - Guitel : Histoire comparée des numérations écrites (Flammarion)
 - Chamoux : La civilisation grecque (Arthaud)
 - Marrou : Histoire de l'éducation dans l'antiquité
 - Smith : History of mathematics (Dover)
 - Cajory : A history of mathematical notations (open court publishing company)
 - National council of teachers of mathematics : Historical topics for the mathematics classroom
-



*Le "Labyrinthe" du Minotaure
d'après une pièce de monnaie crétoise*

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ
DE DIJON

B.P. 138 - 21004 DIJON CEDEX - Tél : (80) 66.64.13 poste 641

Groupe d'Histoire des Mathématiques pour nos Elèves, animateur H. PLANE,
Lycée Jacques Amyot - 89000 AUXERRE

Le groupe a produit, jusqu'à présent, les brochures suivantes,
(disponibles à l'I.R.E.M.

- Notes sur des mathématiciens à l'usage d'élèves entrant en seconde (5e édition) ;
- La Numération écrite (3e édition) ;
- Glanes d'histoire des mathématiciens (3e édition augmentée) ;
- Jeux de géométries (petite histoire des parallèles) (2e édition) (épuisé) ;
- Lecture d'un texte de Huygens (la fonction logarithme) (3e édition) ;
- Egale zéro (Aperçu historique de la notion d'équation) (3e édition) ;
- Pages et calculs choisis de Blaise Pascal (2e édition) ;
- Léon d'Anvers : analyse d'une arithmétique du 16ème siècle ; (épuisé)
- Choses d'Algèbre (Aperçu historique des notations) ;
- Vecteur : Recherche de paternité ; (épuisé)
- Mathématiques et Islam.
- De l'invention des tangentes (Pages et calculs choisis de Fermat) ;
- Calculus populusque romanus (Aperçu sur le calcul au temps des Romains) ;
- Comptes grecs (Aperçu sur le calcul au temps des Grecs).

Et, en collaboration avec l'équipe d'animation pédagogique d'Histoire
de l'Yonne :

- Survol d'histoire des mathématiques en Occident et émergence de la science
moderne ;
- Textes et documents de science relatifs au début du 17ème siècle.

On demandera ces deux dernières au C.D.D.P. de l'Yonne,
25, avenue Pasteur
89000 AUXERRE