BUFFON ET LES STATISTIQUES :
Π EST-IL LE MÊME À MONTBARD QU'EN ESPAGNE ?

Frédéric Métin
uB/ESPÉ, Dijon

Résumé

Ce chapitre relate une expérience menée au collège de Montbard avec des élèves de classe de 3^e^, à propos du problème de l'aiguille de Buffon. Après un bref rappel biographique, nous donnerons un aperçu du Mémoire sur le Jeu de Franc-Carreau *dans lequel nous avons puisé le thème de l'activité. Nous nous pencherons ensuite sur l'utilisation simple et ludique des idées de Buffon que nous avons proposée aux élèves de Montbard.*

Christine Sobota est la dynamique documentaliste du collège de Montbard (Côte d'Or). Elle propose fréquemment à une classe du collège de participer à une action en partenariat avec des classes d'autre pays européens. En 2014, en association avec Yonnel Louet, professeur de mathématiques, elle a élaboré un projet autour de la personne de Buffon et de ses travaux scientifiques, projet auquel les deux collègues nous ont invité à participer en animant au collège un atelier centré sur les probabilités et les statistiques.

Les jeunes Montbardois savent bien sûr qui est leur grand homme, mais le voient surtout comme naturaliste. En effet, le grand public connaît essentiellement Buffon à travers son œuvre monumentale, l'*Histoire Naturelle*, publiée à la même époque que l'*Encyclopédie* et hissant ainsi son auteur au rang de philosophe des Lumières. Philosophe « au Jardin »[1] certes, mais philosophe quand même, et la lecture d'extraits de l'*Histoire Naturelle* pourra en convaincre les lecteurs. C'est cependant surtout au XIX^e^ siècle que les écrits de Buffon étaient lus en classe et publiés en recueils à destination de la jeunesse. De nos jours, l'enseignement des SVT donne peu de perspective historique, les classifications actuelles étant suffisamment complexes par elles-mêmes.

Le versant statistique des recherches de Buffon se trouve dans l'*Histoire Naturelle de l'Homme*, qui constitue en quelque sorte l'aboutissement de son travail de classification des espèces. Dans le *Supplément* qu'il en donne en 1777[2], il aborde entre autres les questions de mesures de la croissance et de l'évolution physique de l'homme, ainsi que celle de la durée de la vie. Pour ces questions que nous n'aborderons pas malgré tout l'intérêt qu'elles présentent, nous renvoyons aux chapitres qui en traitent de ce présent recueil : Philippe Martinet sur Kersseboom, David Tainturier et Patrick Guyot sur Euler, et enfin Patrick Guyot pour Diderot, Condorcet et Ozanam. Nous noterons cependant que Buffon a abordé avec originalité

---

[1] Cf. le titre du livre que lui a consacré l'historien Jacques Roger, *Buffon, un philosophe au Jardin du Roi* (Paris, Fayard, 1989).

[2] BUFFON, Georges-Louis Leclerc (Comte de), *Histoire Naturelle, générale et particulière, servant de Suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme. Par M. Le Comte de Buffon, Intendant du Jardin & du Cabinet du Roi, de l'Académie Françoise, de celle des Sciences, &c. Supplément, Tome Quatrième*. Paris, Imprimerie Royale, 1777.

le problème de Saint Pétersbourg[3] en considérant une valeur *morale* de l'argent. Pour l'établir, il utilise l'outil arithmétique (en particulier les suites) au service d'un calcul neutre de la juste valeur à considérer dans ce problème. Il est également l'auteur d'un essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine[4] dans lequel il s'appuie sur les registres paroissiaux de Montbard et des bourgs voisins (Semur en Auxois, Flavigny sur Ozerain, Vitteaux…) ; il est à cette occasion l'un des premiers à utiliser des méthodes de lissage qui seront utilisées abondamment lorsque les données ne sont pas fiables. Il se justifie ainsi[5] :

> *J'ai fait observer que dans ces Tables* [Histoire naturelle, tome II], *les nombres qui correspondent à 5, 10, 15, 20, 25, &c. années d'âges, sont beaucoup plus grands qu'ils ne doivent l'être, parce que les Curés, sur-tout ceux de la campagne, ne mettent pas sur leurs registres l'âge au juste, mais à peu-près : la plupart des paysans ne sachant pas leur âge à deux ou trois années près, on écrit 60 ans s'ils sont morts à 59 ou 61 ans ; on écrit 70 ans s'ils sont morts à 69 ou 71 ans, & ainsi des autres. Il faut donc pour faire des applications exactes, commencer par corriger ces termes au moyen de la suite graduelle que présentent les nombres pour les autres âges.*

Buffon s'explique toujours clairement sur ses choix et ses prises de position, il commente souvent les données par des considérations morales qui restent savoureuses sur de nombreux plans (« une raison pour vivre est d'avoir vécu »[6]). Nous recommandons aux lecteurs la lecture des *Essais d'arithmétique morale*, qui sont disponibles sous plusieurs formats : dans l'édition originale sous format pdf en ligne, dans diverses éditions modernes[7] et même dans une édition électronique mise en ligne par Thierry Hoquet et Pietro Corsi sur un site du CNRS[8].

En ce qui concerne les statistiques et les probabilités, le « problème de l'aiguille de Buffon » est bien connu des professeurs de mathématiques, qui l'interprètent soit comme la recherche de la probabilité d'une certaine issue dans un jeu de lancer, soit comme tentative d'approximation de π par des méthodes statistiques. Ces deux visions nous paraissent incomplètes voire incorrectes, comme nous allons le justifier plus loin en présentant le texte.

L'ASPECT HISTORIQUE

REPÈRES BIOGRAPHIQUES

Né en 1707 à Montbard dans un milieu aisé, Georges-Louis Leclerc avait un destin tout tracé de magistrat, à la suite de son père. Diplômé de la Faculté de Droit de Dijon à dix-neuf

---

[3] BUFFON, Georges-Louis Leclerc (Comte de), *Histoire Naturelle... Supplément, Tome Quatrième*, *op. cit.*, Essais XV à XIX, pages 74 à 91.

[4] BUFFON, Georges-Louis Leclerc (Comte de), *Histoire Naturelle... Supplément, Tome Quatrième*, *op. cit.*, « Des probabilités de la durée de la vie, pages 149 à 323.

[5] *Ibid.*, p. 150.

[6] *Ibid.*, p. 411, dans le chapitre « Addition à l'article de la Vieillesse & de la Mort » (pp. 405-415).

[7] BINET, Jacques-Louis et ROGER, Jacques, *Un Autre Buffon, choix de textes avec introduction et notes de Jacques Roger*, Paris, Hermann, Collection « Savoir », 1977.

[8] http://www.buffon.cnrs.fr/

ans, il abandonne pourtant la perspective d'une respectabilité provinciale pour se consacrer à sa passion des mathématiques. Il correspond avec Cramer, se fait connaître de Clairaut, entreprend un tour de l'Europe, comme la plupart des jeunes nobles de son époque. Mais la mort de sa mère, survenue alors qu'il n'a que vingt-quatre ans, met un terme à son périple et provoque son retour à Montbard. Le remariage de son père avec une très jeune femme le pousse à réclamer son héritage et à s'installer sur sa terre natale. Leclerc devient alors Comte de Buffon.

Les années qui suivent le voient entreprendre la conquête de l'Académie Royale des Sciences. Grâce au soutien de Clairaut et Maupertuis, il se fera une certaine réputation de probabiliste en présentant à l'Académie son *Mémoire sur le Jeu de Franc-Carreau* qui plaira fort à ses auditeurs : il s'agit en effet du premier essai de calcul de probabilités dans un contexte géométrique. Buffon y emploie les ressources du tout jeune calcul intégral, mais sa conclusion fait appel de manière très évasive à l'aire d'une arche de cycloïde. Il est possible que la brièveté des explications soit due à une non-maîtrise des concepts du calcul différentiel, mais Fontenelle, dans le compte rendu très favorable qu'il en fit pour l'*Histoire de l'Académie des Sciences,* préféra évoquer une certaine élégance... Ce mémoire est capital pour la carrière future de Buffon, puisqu'il constitue son premier « fait d'armes » au sein de l'Académie, et qu'il facilitera son entrée l'année suivante dans la classe de Mécanique, et de là sa nomination comme Intendant du Jardin du Roi (l'actuel Muséum d'Histoire naturelle et son Jardin des plantes).

LE *MÉMOIRE SUR LE JEU DE FRANC-CARREAU*

Le manuscrit original présenté à l'Académie en 1733 n'est pas dans les archives de cette institution, ou du moins il n'y a pas encore été retrouvé. Il semble que sa trace ait été perdue après une vente publique au XIXe siècle, mais nous n'en savons pas davantage. Heureusement, une version subsiste dans le *Supplément* de l'*Histoire naturelle* déjà cité, comme le vingt-quatrième des *Essais d'Arithmétique morale*. Au vu des nombreuses erreurs ou incorrections du texte, nous pensons qu'il s'agit du même que l'original, comme nous avons cherché à le démontrer par ailleurs[9]. Dans son introduction à l'Essai XXIV, Buffon promeut une extension du champ d'étude des probabilités au domaine géométrique[10] :

> *L'analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer & fixer les rapports du hasard ; la Géométrie paroissoit peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant, si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnoître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie, est tout à fait accidentel [...] Pour mettre donc la Géométrie en possession de ses droits sur la science du hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent sur l'étendue & sur ses rapports, ou calculer le petit nombre de*

[9] Cf. notre chapitre « Buffon et le problème de l'aiguille : le Mémoire sur le Jeu de Franc-Carreau de 1733 » dans Commission inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques (coordonné par LE GOFF, Jean-Pierre & BARBIN Evelyne), *Si le nombre m'était conté…*, Paris, Ellipses, 2000.

[10] BUFFON, Georges-Louis Leclerc (Comte de), *Histoire Naturelle... Supplément, Tome Quatrième, op. cit.*, pages 95-96.

> *ceux de cette nature qui sont déjà trouvés : le jeu du franc-carreau peut nous servir d'exemple : voici ses conditions qui sont fort simples.*

La règle du jeu énoncée par l'auteur est la suivante : une pièce de monnaie est jetée sur un sol carrelé et les joueurs parient sur le nombre de carreaux (ou de joints) qu'elle rencontrera (zéro joint, un, deux joints, trois joints ou plus). Buffon annonce qu'il se propose de chercher les probabilités de gain de chaque joueur, mais il va en fait s'intéresser au calcul du rapport des chances de chacun à celles de l'ensemble des autres. Chacun des joueurs pariera simplement sur le nombre de joints rencontrés. Le but de Buffon est de chercher quel est le rapport du diamètre de la pièce au côté du carreau pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire dans chaque cas, pour que le joueur considéré ait autant de chance de gagner que ses adversaires. Rendre le jeu équitable, voici donc l'objectif final de l'auteur.

C'est dans la seconde partie de ce mémoire qu'il est question de l'aiguille. Le problème est posé de la même façon (l'aiguille rencontre ou ne rencontre pas les joints des lattes du parquet), mais sa résolution ne présente plus la simplicité des précédentes, puisque la rencontre ne dépend pas uniquement de la position du centre de l'aiguille, alors qu'elle dépendait seulement de celle du centre de la pièce au jeu de franc-carreau. En effet, l'orientation de l'aiguille va maintenant compter, ce qui est résumé par Buffon dans un schéma plutôt éclairant (cf. le texte du *Mémoire* en Annexe 1).

Les lecteurs admettront que les questions de probabilités géométriques ne sont pas exclusivement celles qui ont trait au jeu de l'aiguille, puisque la résolution des problèmes liés à la pièce fait appel à des considérations purement géométriques. Nous dirions même que cette première partie est beaucoup plus intéressante d'un point de vue pédagogique, puisqu'il est possible de la traiter avec les outils mathématiques du collège, tandis que la partie sur le jeu de l'aiguille nécessiterait d'autrement difficiles théories (nous renvoyons le lecteur au texte de l'Annexe 1 ainsi qu'à notre analyse déjà citée).

L'ACTIVITÉ EN CLASSE

Il n'était donc pas possible de travailler le problème de l'aiguille pour son aspect géométrique et ce n'était pas la demande de Christine à Montbard. Elle souhaitait pouvoir proposer aux élèves une activité autour de travaux de Buffon, dans un format facilement transférable dans le cadre d'un partenariat avec des classes européennes. De notre côté, nous souhaitions pouvoir impliquer les élèves autrement que par un exercice statique traditionnel « papier/crayon ».

CHOIX DES SUPPORTS

Il a donc été assez vite clair que malgré notre parti-pris habituel de respect des textes, nous devions nous diriger vers une réinterprétation accessible aux élèves de 3^{e} en proposant surtout une séance dont ils pourraient tirer quelque intérêt. La personne de Buffon présentait en elle-même une motivation pour ces Montbardois, mais cela n'était pas suffisant pour les lancer dans des investigations scientifiques. Nous avons donc choisi, après discussion avec Christine et Yonnel, d'interpréter dans un sens statistique le mémoire de 1733, ce qui est d'ailleurs assez souvent le cas dans des expérimentations en classe, comme nous l'avons rappelé au début de ce chapitre.

Il nous était possible de choisir l'un ou l'autre jeu, en procédant à des lancers de pièces sur un sol carrelé ou d'aiguilles sur un parquet. La première solution paraissait *a priori* la plus facile à réaliser, mais présentait l'inconvénient de ne pas offrir d'objectif simple et clair en termes de résultats de l'expérience. Nous avons donc vite convenu qu'après une présentation biographique et scientifique, nous inviterions les élèves à effectuer des lancers d'aiguilles sur un parquet, comme dans le mémoire, en vue de récolter des données qui permettraient de calculer une valeur approchée de π.

D'un point de vue technique, comme le CDI du collège de Montbard ne possédait malheureusement pas de lames de parquet, nous avons opté pour le lancer de cure-dents sur une large bande de papier munie de lignes parallèles. Quelle distance entre ces lignes parallèles ? D'après le calcul de Buffon, l'égalité des chances des deux joueurs sera obtenue à condition que le rapport de la longueur de l'aiguille à la largeur des lames soit égal à $\frac{\pi}{4}$. On peut montrer par des méthodes plus modernes que la probabilité d'une rencontre est égale au produit de $\frac{2}{\pi}$ multiplié par le rapport entre la longueur de l'aiguille et la largeur des lames. Pour construire notre faux parquet, nous avons donc donné aux lames une largeur égale à la longueur des cure-dents utilisés, et la fréquence observée des rencontres nous donnerait par conséquent une approximation de $\frac{2}{\pi}$. Nous allons voir quelle est la qualité de cette approximation statistique.

DÉROULEMENT DE LA SÉANCE

Les élèves se répartissent en petits groupes, dont chacun des membres lancera dix fois dix « aiguilles » (Annexe 2), le reste du groupe notant les résultats, qui sont ensuite enregistrés par Georges-Louis Leclerc, c'est-à-dire un élève habillé pour l'occasion d'un costume 18^{e} siècle prêté par une compagnie théâtrale. Nous les accompagnons en précisant qu'il faut au maximum varier les gestes et les conditions de lancer (aveugles ou non, en jeter simple ou parabolique, etc.)

Le comptage n'est pas des plus simples car les observateurs ne sont pas toujours d'accord sur l'existence d'une rencontre quand la pointe du cure-dents touche presque la ligne ou que le cure-dent a roulé. Il y a donc discussions et reprise des lancers lorsque les résultats sont contestés, mais l'ambiance est bon enfant.

Les tableaux récapitulatifs sont affichés et permettent les calculs. On se rend vite compte que la convergence est très lente et que le nombre de lancers devrait être significativement plus important pour que l'on obtienne une approximation satisfaisante. Ceci est confirmé par une simulation de 3000 lancers (ou plus) que nous proposons aux élèves. Cette animation flash est issue du site de Thérèse Eveillau[11], qui par ailleurs propose de très nombreuses pages

[11] http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/buffon.htm.

stimulantes pour les élèves (et les professeurs). Mais la valeur la meilleure obtenue pour π après ces expérimentations reste supérieure à 3,16.

Nous n'avons pas choisi le travail sur tableur, qui ne faisait pas partie de la progression de la classe à l'époque de l'expérimentation. Cependant, Christine a proposé le projet à une classe du collège d'Albacete en Espagne, et les collègues espagnols sont passés par l'intermédiaire du tableur (cf. Annexe 3). Nous remarquons que les valeurs obtenues sont globalement aussi peu proches de π que les nôtres. La dernière ligne donne en effet un résultat total de l'ordre de 3,25, que ne se trouve finalement pas meilleur que les estimations anciennes de π.

CONCLUSION

Le dispositif des collègues espagnols, qui passent par une ligne « Tous ensemble » dans le tableur, nous paraît bien meilleure que celle de calculer une moyenne des résultats obtenus, même si dans la plupart des cas cela revient au même. En effet, l'idée que la moyenne des résultats est plus fiable que chacun d'entre eux nous paraît contestable, voire dangereuse pour ce que les élèves vont tirer de cette activité. Cela se rapporte aux principes d'évaluation qu'ils connaissent bien dans leur vie quotidienne. Ils savent que si leur moyenne provisoire n'est pas suffisamment élevée, ils doivent faire un effort pour les prochains devoirs ; ils savent également lever le pied quand ils sont à l'abri d'une mauvaise surprise en fin de trimestre. Certains même, un peu plus calculateurs, savent éviter l'évaluation finale et conserver ainsi un avantage qu'ils pourraient perdre en le mettant à l'épreuve… Mais notre mode d'évaluation est si bien intégré par les élèves dès leur plus jeune âge, qu'en aucun cas ils ne doutent de la justesse de leur moyenne, et surtout de sa légitimité.

Il en va tout autrement pour la recherche d'une approximation de π. Nous avons d'une part montré que cette vision du jeu de l'aguille ne correspondait pas du tout à ce qu'en avait tiré Buffon. Mais d'autre part, le projet même de se saisir du jeu de l'aiguille pour donner une valeur statistique à π nous paraît délicate et nécessite un accompagnement : les élèves ne pourraient-ils pas penser qu'une valeur de ce nombre leur est donnée par l'expérience ? Il nous semble nécessaire de leur préciser que π n'est pas mis en forme par les statistiques mais qu'il leur préexiste, et que la valeur que nous obtenons par calcul sur les données de l'expérience n'est qu'une approximation de ce que nous permet le dispositif. La faible vitesse de convergence constatée engendre d'ailleurs la frustration chez les élèves qui connaissent déjà au moins la valeur 3,14 et s'étonnent de ne pas s'en approcher plus rapidement. Nous dirons néanmoins que cette activité plaisante a favorisé l'engagement des élèves et une première approche de l'expérimentation en mathématiques. L'aspect ludique assez rare dans les cours est très bien résumé par l'un d'entre eux : « pour une fois qu'on rigole en maths ! ». Mais nous tirons aussi un autre enseignement de cette activité, et il est plutôt rassurant :

1° La valeur statistique de π est aussi éloignée de la valeur exacte à Albacete qu'à Montbard.

2° La valeur exacte de π doit être la même à Albacete qu'à Montbard.

BIBLIOGRAPHIE

Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M DCC XXX III. *Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique pour la même Année, Tirés des Registres de cette Académie*. Paris, Imprimerie Royale, 1735, pp. 43-45.

BUFFON, Georges-Louis Leclerc (Comte de), *Histoire Naturelle, générale et particulière, servant de Suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme. Par M. Le Comte de Buffon, Intendant du Jardin & du Cabinet du Roi, de l'Académie Françoise, de celle des Sciences, &c. Supplément, Tome Quatrième*. Paris, Imprimerie Royale, 1777. *Essais d'Arithmétique morale*, pp. 46-123, Essai XXIII, pp. 95-105.

BUFFON, Georges-Louis Leclerc (Comte de), *Histoire Naturelle, générale et particulière…* édition en ligne par Thierry Hoquet et Pietro Corsi : http://www.buffon.cnrs.fr/.

EVEILLAU, Thérèse, Modèle du jeu de l'aiguille, animation flash et simulation en ligne sur le site : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/buffon.htm.

HANKS, Lesley, *Buffon avant l'Histoire Naturelle*, Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de Paris, série « Recherches », tome XXIV, Paris, PUF, 1966.

MÉTIN, Frédéric, « Buffon et le problème de l'aiguille : le Mémoire sur le Jeu de Franc-Carreau de 1733 » *in* dans Commission inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques (coordonné par LE GOFF, Jean-Pierre & BARBIN Evelyne), *Si le nombre m'était conté…*, Paris, Ellipses, 2000.

ROGER, Jacques, *Buffon, un philosophe au Jardin du Roi*, Paris, Librairie Arthème Fayard, 1989.

BINET, Jacques-Louis et ROGER, Jacques, *Un Autre Buffon, choix de textes avec introduction et notes de Jacques Roger*, Paris, Hermann, Collection « Savoir », 1977.

Annexe 1 : Fac-similé du texte du *Mémoire sur le jeu de Franc-Carreau*

trouvés ; le jeu du franc-carreau peut nous ſervir d'exemple: voici ſes conditions qui ſont fort ſimples.

Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après ſa chute ſe trouvera à franc-carreau, c'eſt-à-dire, ſur un ſeul carreau ; le ſecond parie que cet écu ſe trouvera ſur deux carreaux, c'eſt-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les ſéparent ; un troiſième joueur parie que l'écu ſe trouvera ſur deux joints ; un quatrième parie que l'écu ſe trouvera ſur trois, quatre ou ſix joints : on demande les ſorts de chacun de ces joueurs.

Je cherche d'abord le ſort du premier joueur & du ſecond ; pour le trouver, j'inſcris dans l'un des carreaux une figure ſemblable, éloignée des côtés du carreau, de la longueur du demi-diamètre de l'écu ; le ſort du premier joueur ſera à celui du ſecond, comme la ſuperficie de la couronne circonſcrite eſt à la ſuperficie de la figure inſcrite ; cela peut ſe démontrer aiſément, car tant que le centre de l'écu eſt dans la figure inſcrite, cet écu ne peut être que ſur un ſeul carreau, puiſque par conſtruction cette figure inſcrite eſt par-tout éloignée du contour du carreau, d'une diſtance égale au rayon de l'écu ; & au contraire dès que le centre de l'écu tombe au dehors de la figure inſcrite, l'écu eſt néceſſairement ſur deux ou pluſieurs carreaux, puiſqu'alors ſon rayon eſt plus grand que la diſtance du contour de cette figure inſcrite au contour du carreau ; or, tous les points où peut tomber ce

ce centre de l'écu, ſont repréſentés dans le premier cas par la ſuperficie de la couronne qui fait le reſte du carreau ; donc le ſort du premier joueur eſt au ſort du ſecond, comme cette première ſuperficie eſt à la ſeconde ; ainſi pour rendre égal le ſort de ces deux joueurs, il faut que la ſuperficie de la figure inſcrite, ſoit égale à celle de la Couronne, ou ce qui eſt la même choſe, qu'elle ſoit la moitié de la ſurface totale du carreau.

Je me ſuis amuſé à en faire le calcul, & j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal ſur des carreaux carrés, le côté du carreau devoit être au diamètre de l'écu, comme $1 : 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; c'eſt-à-dire, à peu-près trois & demi fois plus grand que le diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

Pour jouer ſur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3 + 3\sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'eſt-à-dire, preſque ſix fois plus grand que le diamètre de la pièce.

Sur des carreaux en lozange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$, c'eſt-à-dire, preſque quatre fois plus grand.

Enfin ſur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'eſt-à-dire, preſque double.

Je n'ai pas fait le calcul pour d'autres figures, parce que celles-ci ſont les ſeules dont on puiſſe remplir un eſpace ſans y laiſſer des intervalles d'autres figures; & je n'ai pas cru qu'il fût néceſſaire d'avertir que les joints des carreaux ayant quelque largeur, ils donnent de l'avantage au joueur qui parie pour le joint, & que par conſéquent l'on fera bien, pour rendre le jeu encore plus égal, de donner aux carreaux carrés un peu plus de trois & demi fois, aux triangulaires ſix fois, aux lozanges quatre fois, & aux hexagones deux fois la longueur du diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

Je cherche maintenant le ſort du troiſième joueur qui parie que l'écu ſe trouvera ſur deux joints; & pour le trouver, j'inſcris dans l'un des carreaux, une figure ſemblable comme j'ai déjà fait, enſuite je prolonge les côtés de cette figure inſcrite juſqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du carreau, le ſort du troiſième joueur ſera à celui de ſon adverſaire, comme la ſomme des eſpaces compris entre le prolongement de ces lignes & les côtés du carreau, eſt au reſte de la ſurface du carreau. Ceci n'a beſoin pour être pleinement démontré, que d'être bien entendu.

J'ai fait auſſi le calcul de ce cas, & j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal ſur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'un peu moins d'un tiers.

Sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté

du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, double.

Sur des carreaux en lozange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'environ deux cinquièmes.

Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'un demi-quart.

Maintenant le quatrième joueur parie que ſur des carreaux triangulaires équilatéraux, l'écu ſe trouvera ſur ſix joints, que ſur des carreaux carrés ou en lozanges, il ſe trouvera ſur quatre joints, & ſur des carreaux hexagones, il ſe trouvera ſur trois joints; pour déterminer ſon ſort, je décris de la pointe d'un angle du carreau, un cercle égal à l'écu, & je dis que ſur des carreaux triangulaires équilatéraux, ſon ſort ſera à celui de ſon adverſaire, comme la moitié de la ſuperficie de ce cercle eſt à celle du reſte du carreau; que ſur des carreaux carrés ou en lozanges, ſon ſort ſera à celui de l'autre, comme la ſuperficie entière du cercle eſt à celle du reſte du carreau; & que ſur des carreaux hexagones, ſon ſort ſera à celui de ſon adverſaire, comme le double de cette ſuperficie du cercle eſt au reſte du carreau. En ſuppoſant donc que la circonférence du cercle eſt au diamètre, comme 22 ſont à 7; on trouvera que pour jouer à jeu égal ſur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{22}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'un peu plus d'un quart.

Sur des carreaux en lozanges, le ſort ſera le même que ſur des carreaux triangulaires équilatéraux.

Sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{11}}{7}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'environ un cinquième.

Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{21}\sqrt{3}}{44}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'environ un treizième.

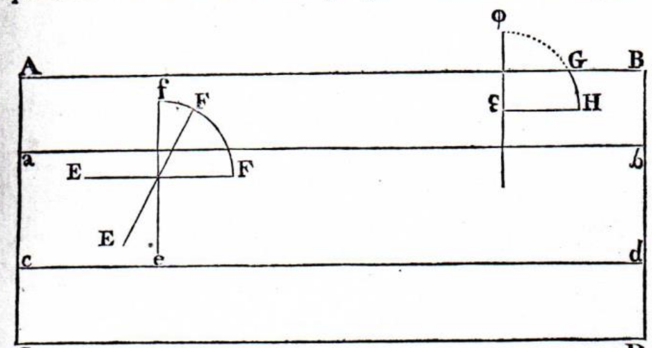
J'omets ici la ſolution de pluſieurs autres cas, comme lorſque l'un des joueurs parie que l'écu ne tombera que ſur un joint ou ſur deux, ſur trois, &c. ils n'ont rien de plus difficile que les précédens; & d'ailleurs on joue rarement ce jeu avec d'autres conditions que celles dont nous avons fait mention.

Mais ſi au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetoit une pièce d'une autre figure, comme une piſtole d'Eſpagne carrée, ou une aiguille, une baguette, &c. le problème demanderoit un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours poſſible d'en donner la ſolution par des comparaiſons d'eſpaces, comme nous allons le démontrer.

Je ſuppoſe que dans une chambre, dont le parquet

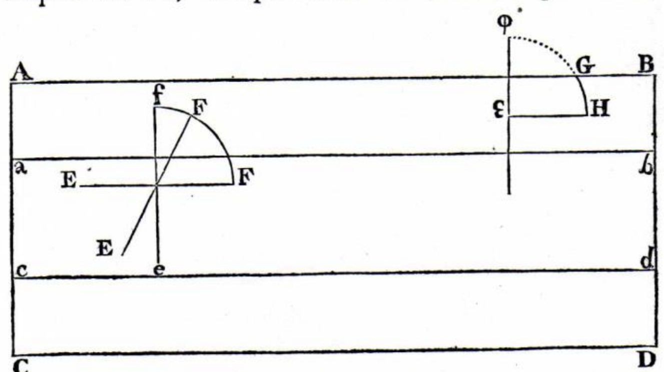
eſt ſimplement diviſé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croiſera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croiſera quelques-unes de ces parallèles; on demande le ſort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu ſur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle ſans tête.*

Pour le trouver, je tire d'abord entre les deux joints parallèles $A\ B$ & $C\ D$ du parquet, deux autres lignes



parallèles $a\ b$ & $c\ d$, éloignées des premières de la moitié de la longueur de la baguette $E\ F$, & je vois évidemment que tant que le milieu de la baguette ſera entre ces deux ſecondes parallèles, jamais elle ne pourra croiſer les premières dans quelque ſituation $E\ F$, $e\ f$, qu'elle puiſſe ſe trouver; & comme tout ce qui peut arriver au-deſſus de $a\ b$ arrive de même au-deſſous de $c\ d$, il ne s'agit que de déterminer l'un ou l'autre; pour cela je remarque que toutes les ſituations de la baguette peuvent être représentées par le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette est le diamètre; appelant donc $2a$ la distance CA des joints du parquet, C le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette est le diamètre, appelant $2b$ la longueur de la baguette, & f la longueur AB des joints, j'aurai $f(\overline{a-b})\,c$ pour l'expression qui représente la probabilité de ne pas croiser le joint du parquet, ou ce qui est la même chose, pour l'expression de tous les cas où le milieu de la baguette tombe au-dessous de la ligne ab & au-dessus de la ligne cd.

Mais lorsque le milieu de la baguette tombe hors de l'espace $abdc$, compris entre les secondes parallèles,



elle peut, suivant sa situation, croiser ou ne pas croiser le joint; de sorte que le milieu de la baguette étant, par exemple, en ε, l'arc φG représentera toutes les situations où elle croisera le joint, & l'arc GH toutes celles où elle ne le croisera pas, & comme il en sera

de même de tous les points de la ligne $\varepsilon\varphi$, j'appelle dx les petites parties de cette ligne, & y les arcs de cercle φG, & j'ai $f(\int y\,dx)$ pour l'expression de tous les cas où la baguette croisera, & $f(\overline{bc-\int y\,dx})$ pour celle des cas où elle ne croisera pas; j'ajoute cette dernière expression à celle trouvée ci-dessus $f(\overline{a-b})\,c$, afin d'avoir la totalité des cas où la baguette ne croisera pas, & dès-lors je vois que le sort du premier joueur est à celui du second, comme $ac-\int y\,dx : \int y\,dx$.

Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura $ac = 2\int y\,dx$ ou $a = \frac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, à l'aire d'une partie de cycloïde, dont le cercle générateur a pour diamètre $2b$ longueur de la baguette; or, on sait que cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon, donc $a = \frac{bb}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, que la longueur de la baguette doit faire à-peu-près les trois quarts de la distance des joints du parquet.

La solution de ce premier cas nous conduit aisément à celle d'un autre qui d'abord auroit paru plus difficile, qui est de déterminer le sort de ces deux joueurs dans une chambre pavée de carreaux carrés, car en inscrivant dans l'un des carreaux carrés, un carré éloigné par-tout des côtés du carreau de la longueur b, l'on aura d'abord $c\,(\overline{a-b})^2$ pour l'expression d'une partie des cas où la baguette ne croisera pas le joint; ensuite on trouvera

$\left(\overline{2a - b}\right) \int y\,dx$ pour celle de tous les cas où elle croiſera, & enfin $cb\left(\overline{2a - b}\right) - \left(\overline{2a - b}\right) \int y\,dx$ pour le reſte des cas où elle ne croiſera pas; ainſi le ſort du premier joueur eſt à celui du ſecond, comme $c\left(\overline{a - b}\right)^2 + cb\left(\overline{2a - b}\right) - \left(\overline{ca - b}\right) \int y\,dx$: $\left(\overline{2a - b}\right) \int y\,dx$.

Si l'on veut donc que le jeu ſoit égal, l'on aura $c\left(\overline{a - b}\right)^2 + cb\left(\overline{2a - b}\right) = \left(\overline{2a - b}\right)^2 \int y\,dx$ ou $\frac{\frac{1}{2}caa}{2a-b} = Sy\,dx$; mais comme nous l'avons vu ci-deſſus, $\int y\,dx = bb$; donc $\frac{\frac{1}{2}caa}{2a-b} = bb$; ainſi le côté du carreau doit être à la longueur de la baguette, à peu-près comme $\frac{41}{22} : 1$, c'eſt-à-dire, pas tout-à-fait double. Si l'on jouoit donc ſur un damier avec une aiguille dont la longueur feroit la moitié de la longueur du côté des carrés du damier, il y auroit de l'avantage à parier que l'aiguille croiſera les joints.

On trouvera par un calcul ſemblable, que ſi l'on joue avec une pièce de monnoie carrée, la ſomme des ſorts ſera au ſort du joueur qui parie pour le joint, comme $aac : 4abb\sqrt{\tfrac{1}{2}} - b^3 - \tfrac{1}{2}Ab$, A marque ici l'excès de la ſuperficie du cercle circonſcrit au carré, & b la demi-diagonale de ce carré.

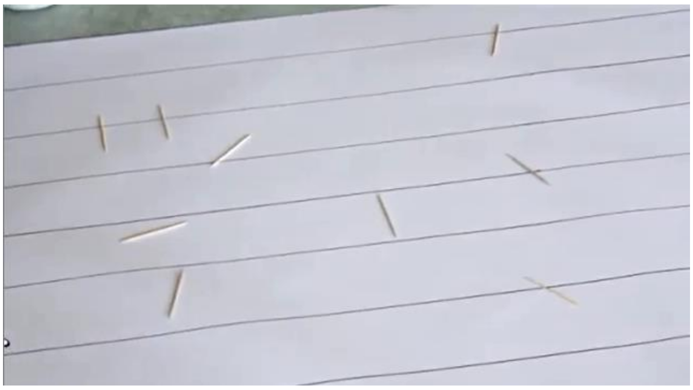
Ces exemples ſuffiſent pour donner une idée des jeux que l'on peut imaginer ſur les rapports de l'étendue; l'on

l'on pourroit ſe propoſer pluſieurs autres queſtions de cette eſpèce, qui ne laiſſeroient pas d'être curieuſes & même utiles: ſi l'on demandoit, par exemple, combien l'on riſque à paſſer une rivière ſur une planche plus ou moins étroite; quelle doit être la peur que l'on doit avoir de la foudre ou de la chute d'une bombe, & nombre d'autres problèmes de conjecture, où l'on ne doit conſidérer que le rapport de l'étendue, & qui par conſéquent appartiennent à la Géométrie tout autant qu'à l'Analyſe.

XXIV.

DÈS les premiers pas qu'on fait en Géométrie, on trouve l'Infini, & dès les temps les plus reculés, les Géomètres l'ont entrevu; la quadrature de la parabole & le traité de *Numero arenæ* d'Archimède, prouvent que ce grand homme avoit des idées de l'infini, & même des idées telles qu'on les doit avoir; on a étendu ces idées, on les a maniées de différentes façons, enfin on a trouvé l'art d'y appliquer le calcul: mais le fond de la métaphyſique de l'infini n'a point changé, & ce n'eſt que dans ces derniers temps que quelques Géomètres nous ont donné ſur l'infini des vues différentes de celles des Anciens, & ſi éloignées de la nature des choſes & de la vérité, qu'on l'a méconnue juſque dans les Ouvrages de ces grands Mathématiciens. De-là ſont venues toutes les oppoſitions, toutes les contradictions qu'on a fait ſouffrir au calcul infiniteſimal; de-là ſont venues les

Annexe 2 : expérimentations à Montbard



Annexe 3 : Expérimentations à Albacete

	Baguettes lancées	Baguettes avec rencontre	Fréquence	Approximation de Pi
GROUPE 1	120	77	0,641666667	3,116883117
GROUPE 2	120	71	0,591666667	3,38028169
GROUPE 3	100	63	0,63	3,174603175
GROUPE 4	120	80	0,666666667	3
GROUPE 5	160	90	0,5625	3,555555556
GROUPE 6	60	37	0,616666667	3,243243243
TOUS ENSEMBLE	680	418	0,614705882	3,253588517