UN COUP DE DÉS PEUT-IL ABOLIR LE HASARD ?

Agnès Gateau
École élémentaire d'Etigny (89)

Résumé

Que pourrait être une approche de la statistique en classe de Cours Moyen ? À partir de quelques centaines de lancers de dés, il est possible de proposer une rencontre avec cette science. Les activités menées permettent d'appréhender la notion de hasard et de « chance-de », en lien avec les calculs mathématiques. Elles interrogent ensuite l'élève sur la recherche de formes adaptées à la présentation de résultats. Elles engagent un raisonnement sur ce que c'est que faire des mathématiques. Même si aucune occurrence aux mots aléatoire, hasard et statistique ne figure dans les programmes, ces activités entrent pleinement dans le domaine « Organisation et gestion des données ». De quoi faire d'une pierre, deux coups…

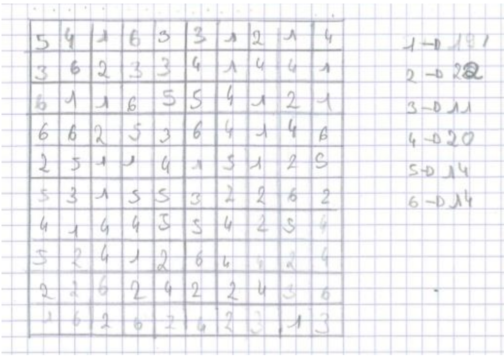
INTRODUCTION

Je travaille la problématique du hasard avec mes élèves de CM1/CM2 depuis une certaine discussion menée en classe : un enfant était persuadé de posséder la faculté d'obtenir des 6 aux dés plus fréquemment que n'importe qui. Il revendiquait une certaine tenue de dé associée à un mouvement spécifique du poignet… Le camarade avec lequel il venait de jouer en témoignait : le phénomène était réel !

Pour tenter de défaire cette certitude, j'ai proposé que chaque élève relève les tirages obtenus sur 100 lancers de dés en les inscrivant dans un tableau de 10 cases sur 10. En plus de l'intérêt que l'on peut porter au bruit produit par les dés qui roulent sur les tables de classe, on recueille quelques commentaires de natures diverses parmi lesquels : « J'ai fait quatre 5 de suite ! », « Je ne fais pas beaucoup de 2 », « Tais-toi ! Tu me déconcentres ! »… Dans tous les cas, après quelques lignes entièrement complétées dans le tableau, chacun entre dans sa tâche avec application : 100 tirages n'effraient décidément personne.

QUE FAIRE DES TABLEAUX RÉALISÉS ?

Qui, une constellation plus qu'une autre ?! Qui, un mélange indescriptible ou des suites de tirages remarquables… ?! Pour mettre un peu d'ordre à tous ces nombres, on décide de comptabiliser le nombre de tirages de chaque face et on détermine la méthode de vérification de la justesse de ce comptage (la somme de chaque constellation doit faire 100). Cela peut prendre plus de temps que celui nécessaire pour remplir le tableau initial : les erreurs sont fréquentes, il convient de rester concentré pour relever correctement tous les tirages effectués. Utiliser un tableur *Excel* rend bien des services : l'élève qui entre ses données peut vérifier que l'ensemble fait bien 100 tirages.

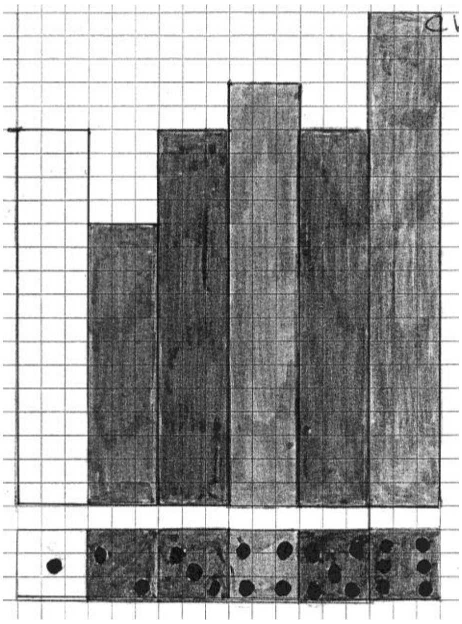


QUELLE PRÉSENTATION PEUT-ON ADOPTER POUR RENDRE LES RÉSULTATS DIRECTEMENT VISIBLES ?

À ce stade, et parce que les diagrammes en bâtons sont souvent rencontrés, les élèves proposent de transcrire leurs résultats sous cette forme. La confrontation des différents diagrammes présents sur les tables fait apparaître les variations multiples entre les tirages et entre les constellations. Les élèves s'aperçoivent de deux choses :

- une représentation de ce type est plus « parlante » qu'un tableau de données,
- il paraît difficile de déterminer si une constellation est davantage « sortie » qu'une autre sur l'ensemble de la classe.

Ces diagrammes en bâtons ont donc leurs avantages et leurs limites : leur lecture rend visible la particularité du tirage d'un élève (« Untel a fait très peu de 4 et beaucoup de 1 alors qu'Unetelle n'a pas beaucoup de 1 », « On voit bien dans les diagrammes les différences entre chaque face »), mais aucune conclusion globale ne pourra être effectuée car « tous les graphiques sont très différents ».



Graphique du nombre de tirages obtenu de chaque face de dé

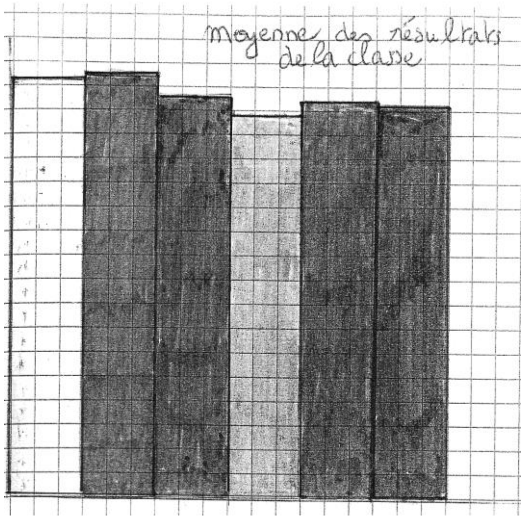
INTRODUIRE LA NOTION DE MOYENNE

En général, les élèves n'ont pas l'idée de réaliser la moyenne des résultats obtenus : serait-ce un effet de l'abandon de la notation au Premier degré ? C'est l'occasion d'aborder la notion de moyenne : elle sera visuelle. On peut schématiser deux bâtons de hauteurs différentes et tracer à main lever la ligne qui, visuellement, montrerait que les espaces supérieurs à cette ligne viennent compléter les espaces qui ne l'atteignent pas : calculer la moyenne, c'est rechercher à quelle hauteur la ligne se situe. « Oui, mais si il y a beaucoup de bâtons ? » Quel que soit le nombre de bâtons, il existe toujours une ligne qui permet de compléter « ce qui manque partout» avec « ce qui dépassait partout». Quelques élèves connaissent la formule du calcul de la moyenne (dans les fratries cette procédure se transmet justement lorsqu'un plus grand calcule sa moyenne des notes au collège) : on additionne toutes les données et on divise le résultat par le nombre de données que l'on avait… Le résultat fixera la hauteur d'un seul bâton, qui sera le « bâton témoin de tous les tirages ».

Calculer les 6 moyennes (des tirages obtenus pour chaque face) se fait sur papier et sur le tableur *Excel* : l'un permettant le contrôle de l'autre. C'est l'occasion de vérifier la connaissance de l'algorithme de division et d'apprendre à utiliser les onglets du tableur.

ANALYSER VISUELLEMENT LES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Les élèves réalisent alors le diagramme en utilisant des moyennes obtenues dans la classe.



La confrontation des deux diagrammes appelle des commentaires : « Il y a beaucoup moins d'écart entre les tirages ». Certes ! Mais encore ?

Ici, les élèves n'analysent pas directement les résultats comme relevant d'un phénomène de relative égalité entre les tirages. Les remarques faites **ne vont pas dans le sens d'une compréhension de l'idée qu'on autant de chance de tirer chacune des constellations**. Je cherche à mieux cerner le sens des remarques qui fusent en posant, par écrit et par petits groupes d'élèves, le questionnaire suivant :

1	Que peut-on déduire de l'observation de ces graphiques ?
2	Pourrait-on imaginer le graphique résultant de la mise en commun (calcul de la moyenne) des tirages de toutes les classes de Cours Moyen de France ?
3	Qu'est-ce que les mathématiques nous aident à comprendre ?

Réponses obtenues :

1	• Que ce sont toujours les mêmes nombres qui sont tirés. • Les nombres partent d'une échelle de 15 à 17 alors que celui que l'on a fait tout seul est de 0 à …. • Au début du premier graphique nos résultats personnels étaient différents et au deuxième nous avons constaté que les moyennes étaient à peu près égales. • Dans le graphique personnel les grandeurs sont variées (il y a des petits et des grands) ; dans le graphique de la moyenne de la classe, ils ont pratiquement la même hauteur.
2	• Deux opinions exprimées par le groupe : ce ne sera pas les mêmes nombres mais ce sera les mêmes dés qui ressortiront le plus, le nombre d'élèves change les nombres. / Oui, parce que ça revient au même que ce qu'on a fait en classe. • Oui et non car le graphique serait très grand. On pourrait imaginer mais ce sera dur de le réaliser. • Oui cela serait possible car si on rajoute des résultats la moyenne sera légèrement plus petite ou plus grande ou exacte. • La moyenne sera beaucoup plus élevée qu'avec une classe de CM.
3	• Les maths servent à pouvoir faire le graphique. • C'est les maths qui nous aident à comprendre. • Que c'est du hasard. • Dans les maths il y a du hasard : exemple, les dés.

De l'importance des données numériques pour saisir un phénomène de probabilité

Pour commencer la séance suivante, **quatre nouvelles grilles** de cent tirages sont présentées aux élèves. Il s'agit de calculer la moyenne obtenue en intégrant ces quatre tirages aux précédents : réinvestissement ordinaire de procédures. Les deux séries de moyennes sont écrites au tableau.

	1	2	3	4	5	6
Moyenne	18,75	18,75	14,5	18,5	16,25	16,5

Un élève fait l’observation que les moyennes de ces 4 tirages sont plus variées que celles obtenues précédemment : elles s’écartent de 16. Nous parlons d’amplitude. Que signifie ce 16 ? « C’est 16% » affirment quelques élèves de CM2, « cela veut dire qu’il y a 16 tirages sur 100. Pourcent c’est pour-100 tirages. »
Que se passerait-il si l’on ajoutait ces données aux précédentes et si on augmentait encore le nombre de tirages ?
L’idée étant lancée, nous décidons de réaliser d’autres nouveaux tirages et d’observer l’évolution de la moyenne.
Nous pouvons constater que l’amplitude des résultats s’est réduite. Les élèves font l’hypothèse que le phénomène s’accentuerait encore davantage « si toutes les classes de France faisaient leur tirage » !
À ce niveau de la discussion, j’ai choisi de confirmer cette hypothèse : « Oui, plus le nombre de tirages augmentera, plus l’amplitude des résultats diminuera et commencera par 16,… . C’est aussi ce que nous disent les mathématiques lorsque l’on affirme qu’au dé, on a « une chance sur 6 d’obtenir une constellation ». Comment s’écrit une chance sur 6 en écriture mathématique ? Plusieurs élèves font le lien avec l’écriture fractionnaire $\frac{1}{6}$ qu’ils écriraient dans ce cas 1/6 « une chance sur 6 », comme on écrit « 7/7 ou 24/24 » pour indiquer les temps d’ouverture d’un commerce !

DE LA PROBABILITÉ À LA STATISTIQUE

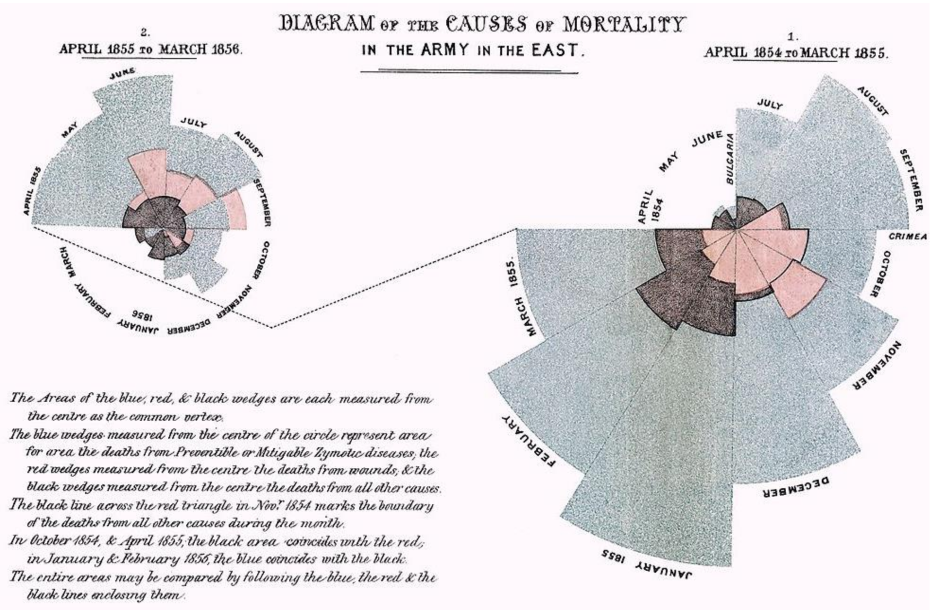
La séance suivante sera travaillée en interdisciplinarité : Histoire/Maths/Français. J’ai trouvé sur Wikipédia[1] des graphiques variés issus du XIX^{e} siècle qui vont nous permettre de travailler d’une façon connexe la révolution industrielle étudiée en classe. Ce sera l’occasion d’observer les sujets proposés par ces études statistiques qui révèlent une évolution du modèle économique, urbain et social.

Je demande aux élèves si le terme de statistique leur est connu et s’ils seraient capables d'en donner une définition. « Les statistiques, ce sont des calculs », « Des résultats d’expériences »… Pour le déroulement de l’activité, une sélection de ces représentations est éditée en couleur et distribuée aux groupes de travail (elle comporte aussi des graphiques contemporains). Il s’agira de découvrir individuellement les documents mis à disposition et de présenter oralement ce qui est compris du document (éléments relevés et analysés et hypothèses de compréhension). L’ordre de présentation que font les élèves ne relève pas du hasard : le document qui est choisi en premier représente les résultats des élections à Paris de 1869. Les élèves ont reconnu le plan de Paris et comprennent parfaitement le sens des éléments colorés : nous sommes entre deux tours des élections départementales… Je remarque qu’ils sélectionnent les documents colorés en premier. Les analyses sont pertinentes tant au niveau de la compréhension du code choisi que des interprétations proposées. Le diagramme de Playfair (dans *The Statistical Breviary* (1801) voir en annexe), bien que complexe est perçu selon les intentions de l’auteur en fonction des relations de proportionnalité qui sont exprimées. Nous nous émerveillons collectivement de cette rencontre avec des œuvres du passé : les tracés sont précis et parfaitement réalisés sans qu'aucun ordinateur n'ait eu de rôle à jouer.

Ah ! la main de l'Homme… Justement ! C'est l'œuvre d'une femme qui requiert le plus d'attention. Florence Nightingale (1820-1910) est britannique et les écrits associés à son graphique ne sont pas entièrement interprétables pour des élèves de cycle 3. Pourtant, sur ces graphiques circulaires, l'association entre des quartiers et le nom des mois permet de comprendre qu'il s'agit d'une représentation de deux années de données statistiques. Beaucoup de mots sont transparents dont le titre lui-même « *Diagram of the causes of mortality in the army in the east* ». Trois couleurs présentent par quartiers les causes des décès, certains mois semblent « sortir » du champ « normal » d'une moyenne de décès. Janvier 1855 est particulièrement meurtrier ; nous formulons l'hypothèse que la bataille s'est intensifiée, à moins que les conditions hivernales aient apporté une épidémie, à moins que…

Le diagramme produit son effet : voici le témoignage d'une femme pour qui les vies détruites sont un sujet d'étude et qui semble interpeler les vivants sur autre chose que des faits militaires.

Portrait de Florence Nightingale, 1873
source Wikipédia



Cette rapide analyse entre en cohérence avec le récit biographique de Florence Nightingale. Issue de la haute société anglaise, instruite et passionnée par les études statistiques (déjà utilisées par son père dans le domaine de l'épidémiologie), elle utilise ses connaissances pour rendre compte des observations menées dans l'hôpital qu'elle gère lors de la guerre de Crimée et inciter les plus hautes instances politiques à engager des campagnes de soin et de formation d'infirmière efficaces.

William Playfair (1759-1823) est l'un des premiers à utiliser les figures géométriques pour présenter des données statistiques (1786 *Commercial and Political atlas)* en utilisant des rapports proportionnels de surfaces, ce diagramme de Florence Nightingale dit en « crête de coq » (*coxcomb* en anglais) reprend cette idée ; sa construction montre un partage par secteurs circulaires (ici, 12 secteurs représentant les mois d'une année), subdivisés ensuite en fonction des causes de mortalité.

Pourrions-nous exprimer des données en s'inspirant de ces représentations ? La réponse fuse : on pourrait prendre les tirages de dés ! Il s'en suit un temps de recherche et de réalisation individuelle. À midi, les enfants quittent la classe avec une question : « On continuera en revenant ? » Au retour, ils rédigent leur clé de lecture composée d'un titre et d'une légende. Ils se lancent ensuite dans de nouvelles transcriptions de données, ayant eu d'autres idées, voulant confronter les données à un autre système de représentation.

CONCLUSION

La question « Qu'est-ce que les mathématiques nous aident à comprendre ? », au moment où elle est posée, ne dévoile explicitement pas la conception chez les élèves que les mathématiques pourraient être caractérisées comme *une science qui sert à prouver*. Mais, pour un groupe d'élèves répondre « Dans les maths il y a du hasard : exemple, les dés » **transcrit la prise de conscience que les mathématiques vont permettre de questionner** des objets qui n'y étaient pas encore associés. Si jusqu'ici, le hasard semblait échapper à toute étude possible ou au contraire relever de l'usage de martingale, on assiste alors à l'émergence de la possibilité d'un tout premier principe de modélisation et donc d'une évolution conceptuelle, des maths et du hasard.

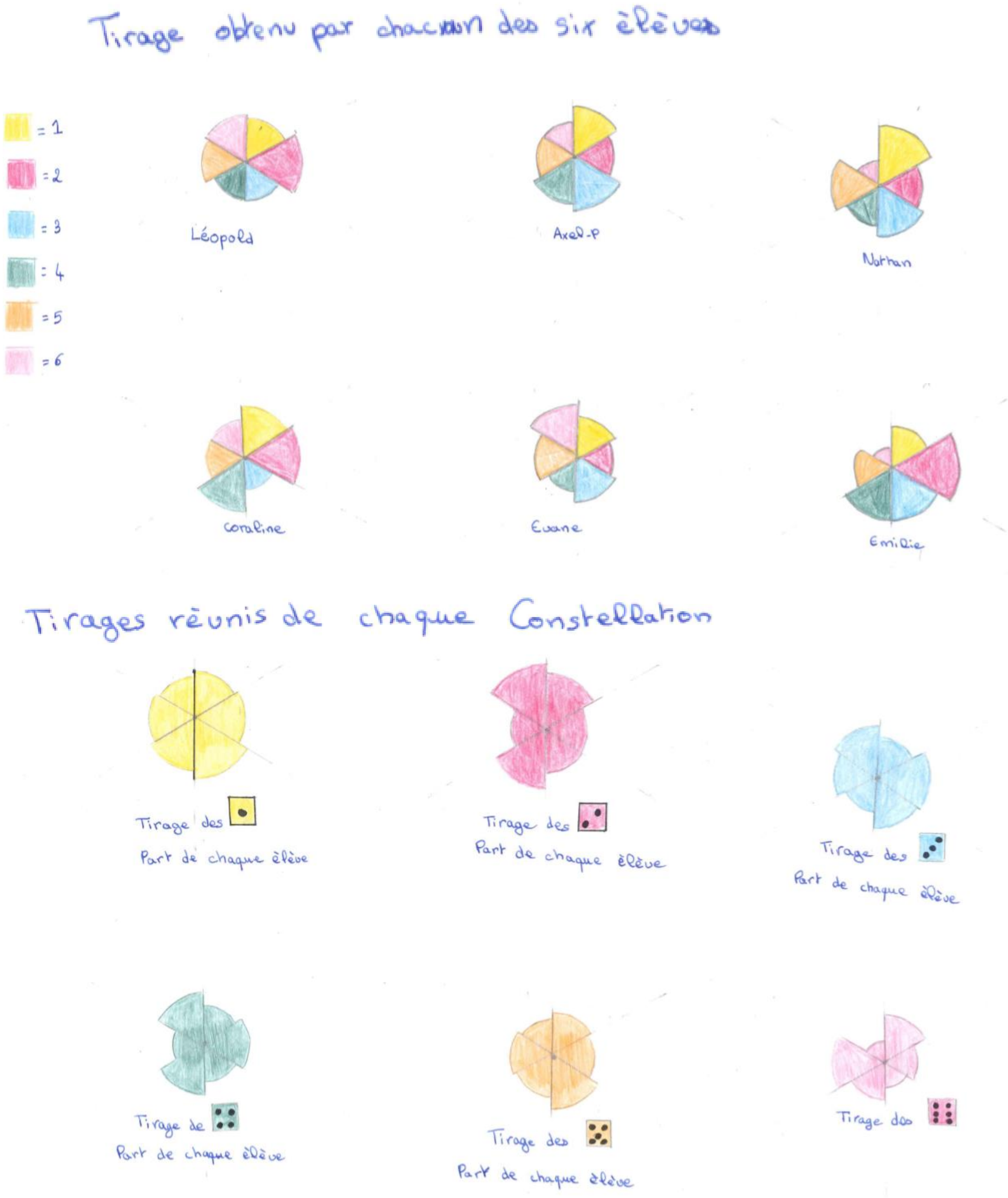
Les élèves perçoivent depuis longtemps l'aspect « technique » des mathématiques : si je maîtrise une technique, je vais pouvoir donner un résultat qui sera juste. Cette première approche des statistiques ouvre une perspective nouvelle : celle de la nécessité de recueillir un grand nombre de données ou de cas pour approcher la justesse d'un résultat.

Nous aurons rencontré beaucoup de notions, une femme remarquable, fait appel à des savoir-faire, éprouvé de nouvelles techniques, été en recherche, été concentrés sur des réalisations, eu à faire des choix pour être compris…

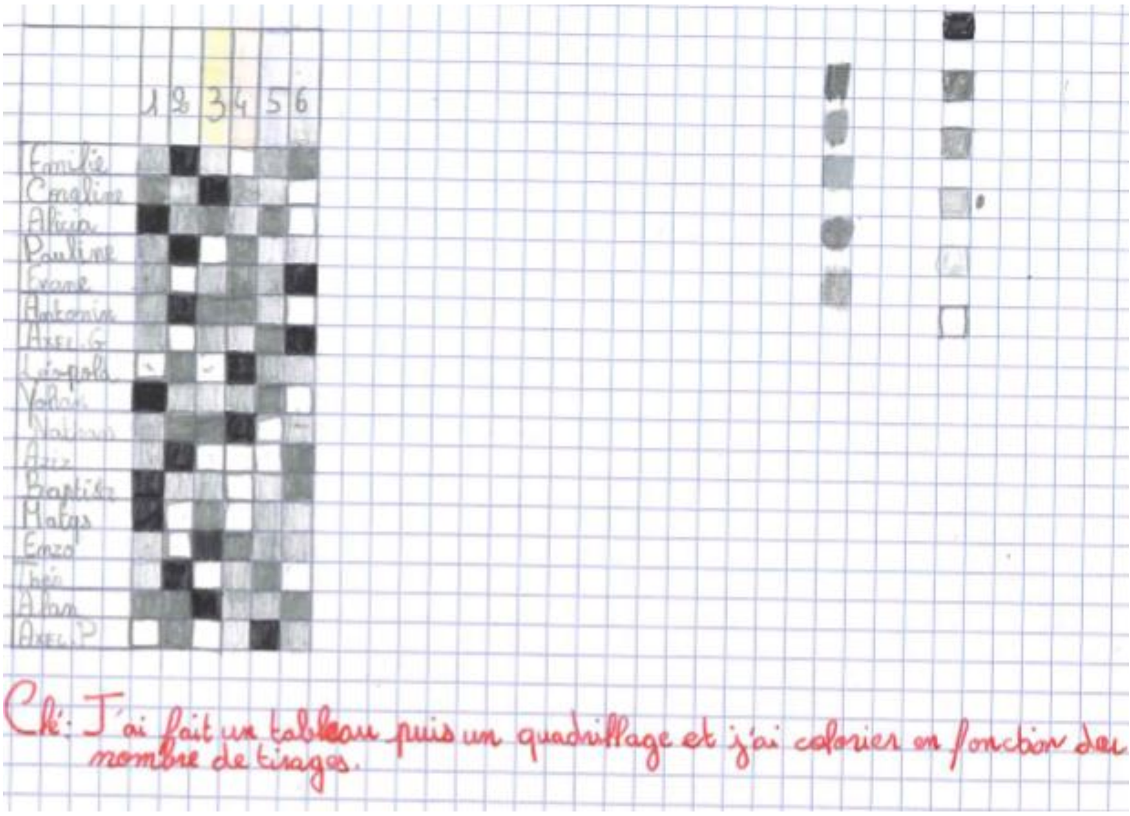
Un temps de vie et d'apprentissage bien agréable.

QUELQUES PRODUCTIONS DE LA CLASSE :

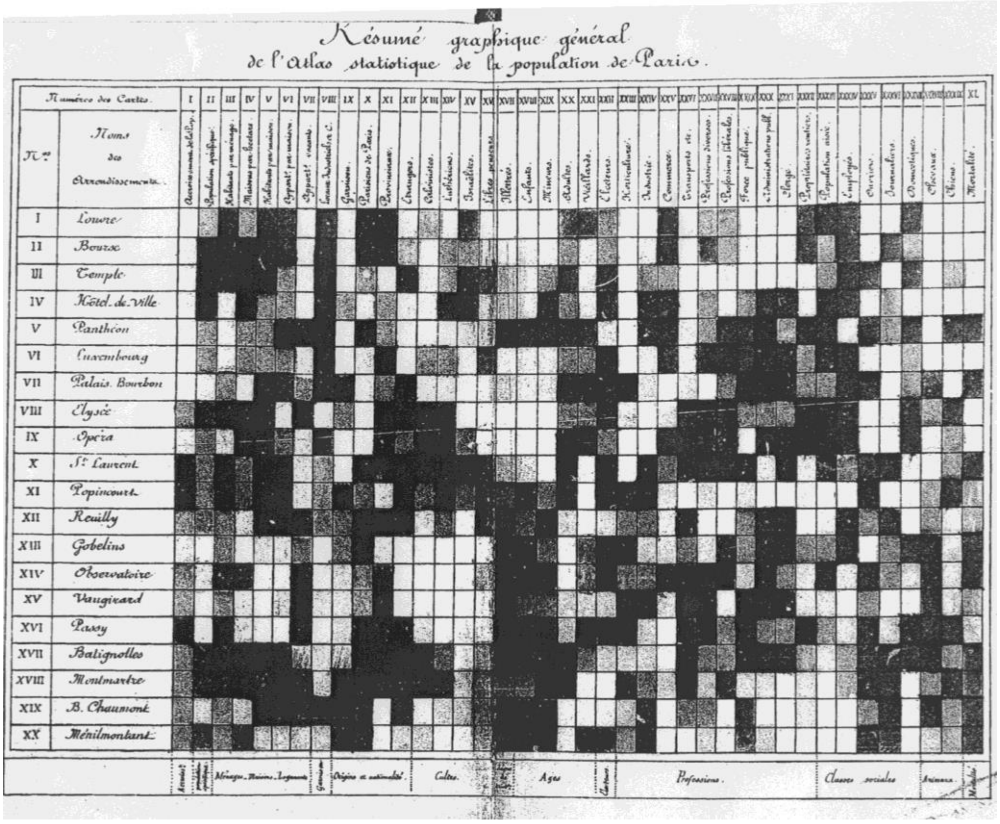
Graphiques élaborés sur le modèle du graphique à crête de coq de Florence Nightingale : Tirages obtenus par élève + Comparaison des tirages des 6 élèves par constellations.



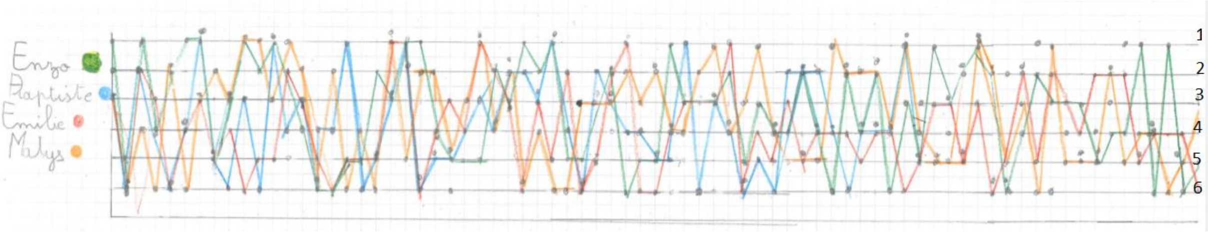
Graphique de fréquence des tirages de chaque face par élève…

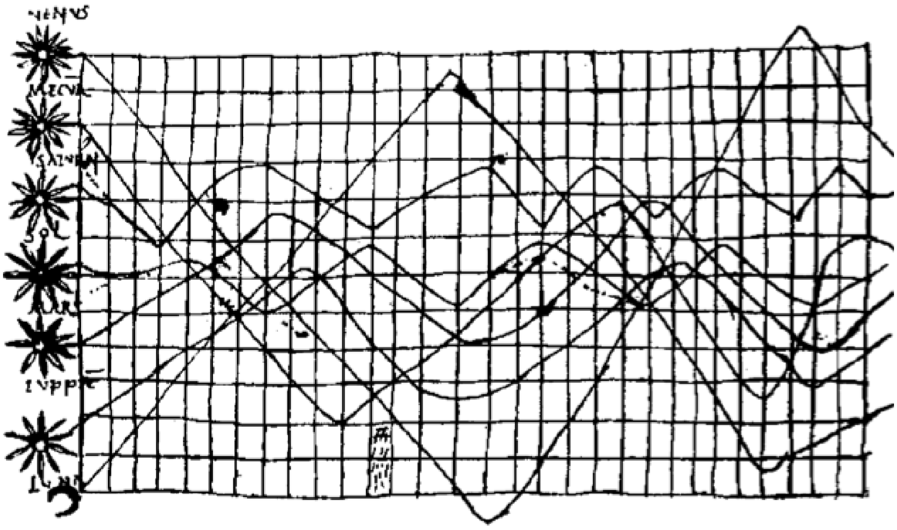


… d'après le modèle de Toussaint Loua (1824-1907), Atlas statistique de la population de Paris



Graphique présentant la succession des tirages de 4 élèves sur le modèle de Macrobe (X^e siècle), Commentaire au songe de Scipion, (description du mouvement des planètes)





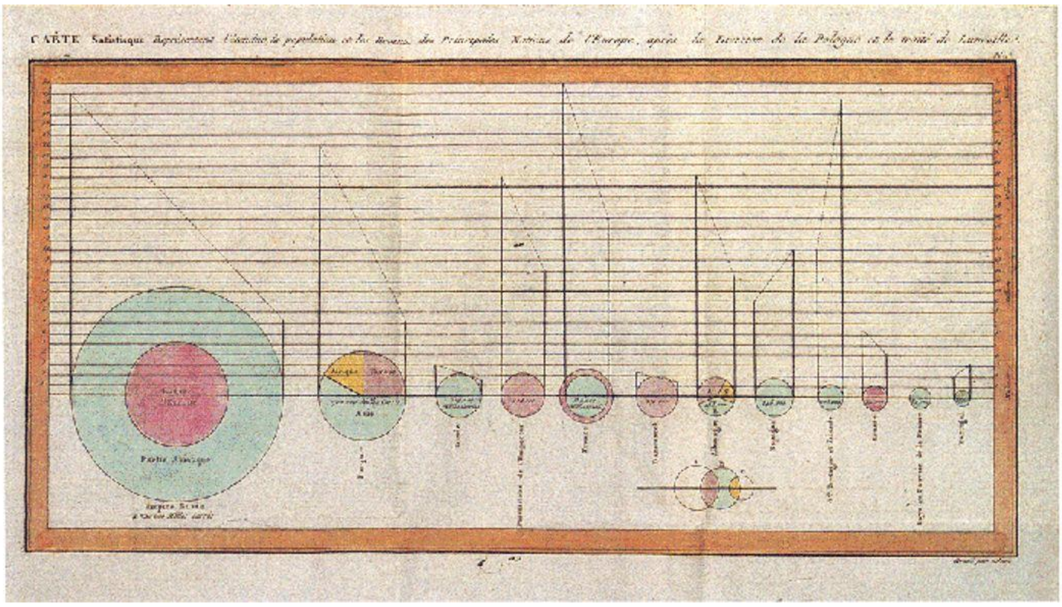


Diagramme circulaire de Playfair (1801) montrant pour différents pays le rapport entre le nombre de population et les taxes collectées.

[1][http ://fr.wikipedia.org/wiki/Repr%C3%A9sentation_graphique_de_donn%C3%A9es_statistiques](http://fr.wikipedia.org/wiki/Repr%C3%A9sentation_graphique_de_donn%C3%A9es_statistiques)