RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LA MORTALITÉ ET LA MULTIPLICATION DU GENRE HUMAIN

David TAINTURIER,
Lycée Dumaine, Mâcon
Patrick GUYOT,
IREM Dijon.

Résumé

L'article rend compte d'une activité d'introduction aux statistiques à travers un texte de Leonhard Euler (XVIII^e siècle) consacré à la mortalité. Elle a été réalisée auprès d'élèves de seconde baccalauréat professionnel tertiaire et hôtellerie. Un prolongement de l'activité est ensuite proposé.

PRÉSENTATION

L'article présente une activité sur les statistiques utilisant les travaux de Leonhard Euler (1707-1783) sur les recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.

L'activité a été proposée à des élèves de seconde baccalauréat professionnel de section tertiaire (seconde restauration et seconde gestion administration) dans le cadre de l'accompagnement personnalisé, donc en effectif réduit. Cette séance, a été effectuée en fin de séquence sur les statistiques. L'objectif principal de ce travail est d'apporter une vision historique des statistiques aux élèves. De plus, l'utilisation de textes anciens avec les notations et le vocabulaire qui leur sont propres est un travail exotique pour des élèves issus de baccalauréats professionnels.

L'activité suivante était présentée à 4 groupes de 2 élèves. Ils ont cherché par binôme les réponses aux questions puis s'en est suivi une mise en commun ainsi qu'une ouverture et un questionnement.

Les quatre pages suivantes reproduisent l'activité présentée aux élèves.

MORTALITÉ ET STATISTIQUES

Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien suisse qui réalisa d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes.

En 1767, il publie dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, ses travaux sur les rentes viagères. Cet article s'appuie sur les recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain pour élaborer une théorie sur la démographie.

Il nomme hypothèse de la mortalité « la manière de déterminer combien d'un certain nombre d'hommes, qui sont nés à la fois, seront encore en vie après chaque nombre d'années écoulées. »

Voici le début de l'article.

RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LA MORTALITÉ ET LA MULTIPLICATION DU GENRE HUMAIN

Les registres des naissances et des morts à chaque âge, qu'on publie en plusieurs endroits tous les ans, fournissent tant de questions différentes sur la mortalité et la multiplication du genre humain, qu'il serait trop long de les rapporter toutes.[…]

HYPOTHÈSE DE LA MORTALITÉ

[…] Concevons un nombre quelconque N d'enfants, qui soient nés en même temps ; et je marquerai le nombre de ceux qui seront encore en vie au bout d'un an par (1)N, de ceux qui y seront encore au bout de deux ans par (2)N, de trois ans par (3)N, de quatre ans par (4)N, et ainsi de suite. Ce sont des signes généraux que j'emploie pour marquer, comment le nombre des hommes nés en même temps décroît successivement, qui auront pour chaque climat et chaque manière de vivre des valeurs particulières. Cependant on peut remarquer que les nombres indiqués par (1), (2), (3), (4), (5), etc. constituent une progression décroissante de fractions, dont la plus grande (1) est moindre que l'unité ; et quand on continue ces termes au-delà de 100, ils décroîtront si fort, qu'ils évanouissent presque entièrement. Car, si de 100 millions d'hommes aucun n'atteint l'âge de 125 ans, il faut que le terme (125) soit moindre que $\frac{1}{100\,000\,000}$.

Ayant établi pour un certain lieu par un assez grand nombre d'observations les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), etc. on peut résoudre quantité de questions qu'on propose ordinairement sur la probabilité de la vie humaine. D'abord il est *évident, si le nombre des enfants nés en même temps est N, que selon la probabilité il en mourra tous les ans autant que cette table en marque :*

Depuis	*à*	*Il en mourra*
0 *an*	1 *an*	$N - (1)N$
1 *an*	2 *ans*	$(1)N - (2)N$
2 *ans*	3 *ans*	$(2)N - (3)N$
3 *ans*	4 *ans*	$(3)N - (4)N$
4 *ans*	5 *ans*	$(4)N - (5)N$

Et comme de ce nombre N il y aura encore probablement en vie (n)N au bout de n ans, il faut que le nombre des morts avant ce terme de n ans soit égal à N – (n)N.

Pour comprendre les notations utilisées par Euler, on peut s'appuyer sur la table qui donne les valeurs des coefficients (1), (2), (3),… que l'on peut utiliser.

152

(1) = 0,804	(31) = 0,499	(61) = 0,264	(91) = 0,006
(2) = 0,768	(32) = 0,490	(62) = 0,254	(92) = 0,004
(3) = 0,736	(33) = 0,482	(63) = 0,245	(93) = 0,003
(4) = 0,709	(34) = 0,475	(64) = 0,235	(94) = 0,002
(5) = 0,688	(35) = 0,468	(65) = 0,225	(95) = 0 0
(6) = 0,676	(36) = 0,461	(66) = 0,215	
(7) = 0,664	(37) = 0,454	(67) = 0,205	
(8) = 0,653	(38) = 0,446	(68) = 0,195	
(9) = 0,646	(39) = 0,439	(69) = 0,185	
(10) = 0,639	(40) = 0,432	(70) = 0,175	
(11) = 0,633	(41) = 0,426	(71) = 0,165	
(12) = 0,627	(42) = 0,420	(72) = 0,155	
(13) = 0,621	(43) = 0,413	(73) = 0,145	
(14) = 0,616	(44) = 0,406	(74) = 0,135	
(15) = 0,611	(45) = 0,400	(75) = 0,125	
(16) = 0,606	(46) = 0,393	(76) = 0,114	
(17) = 0,601	(47) = 0,386	(77) = 0,104	
(18) = 0,596	(48) = 0,378	(78) = 0,093	
(19) = 0,590	(49) = 0,370	(79) = 0,082	
(20) = 0,584	(50) = 0,362	(80) = 0,072	
(21) = 0,577	(51) = 0,354	(81) = 0,063	
(22) = 0,571	(52) = 0,345	(82) = 0,054	
(23) = 0,565	(53) = 0,336	(83) = 0,046	
(24) = 0,559	(54) = 0,327	(84) = 0,039	
(25) = 0,552	(55) = 0,319	(85) = 0,032	
(26) = 0,544	(56) = 0,310	(86) = 0,026	
(27) = 0,535	(57) = 0,301	(87) = 0,020	
(28) = 0,525	(58) = 0,291	(88) = 0,015	
(29) = 0,516	(59) = 0,282	(89) = 0,011	
(30) = 0,507	(60) = 0,273	(90) = 0,008	

1) Sur 1 000 enfants nés, combien seront encore en vie au bout de deux ans ? De trois ans ? De quatre ans ? De vingt-cinq ans ?

2) Reprendre la même question à partir de 37 650 enfants nés.

UN CERTAIN NOMBRE D'HOMMES DONT TOUS SOIENT DU MÊME ÂGE, ÉTANT DONNÉ, TROUVER COMBIEN EN SERONT PROBABLEMENT ENCORE EN VIE APRÈS UN CERTAIN NOMBRE D'ANNÉES.

Supposons qu'il y ait M hommes, qui aient le même âge de m ans, et qu'on demande, combien en vivront probablement encore après n ans ? Qu'on pose $M = (m)N$ *pour avoir* $N = \frac{M}{(m)}$*, où N marque le nombre de tous les enfants nés en même temps, dont il reste encore en vie M après m ans. Or de ce même nombre seront probablement encore en vie* $(m+n)N$ *après m+n ans depuis leur naissance, et partant après n ans depuis le temps proposé. Donc le nombre cherché dans la question est égal à* $\frac{(m+n)}{(m)}M$ *; ou après n ans il y aura probablement encore autant de vivants de M hommes, qui ont tous à présent m ans.*

3) On considère 5 000 personnes de 30 ans. Combien peuvent espérer être encore en vie après 20 ans ?

4) Combien seront encore vivants au bout de 50 ans ?

TROUVER LA PROBABILITÉ QU'UN HOMME D'UN CERTAIN ÂGE SOIT ENCORE EN VIE APRÈS UN CERTAIN NOMBRE D'ANNÉES.

Que l'homme en question soit âgé de m ans, et qu'on cherche la probabilité que cet homme soit encore en vie au bout de n ans. Concevons M hommes du même âge, et puisque, après n ans, il y en aura probablement encore vivants $\frac{(m+n)}{(m)}M$*, la probabilité que l'homme proposé se trouve dans ce nombre sera égale à* $\frac{(m+n)}{(m)}$.

Donc la probabilité que cet homme vienne à mourir avant le bout de ces n ans, est $1 - \frac{(m+n)}{(m)}$*. Et partant l'espérance, que cet homme peut avoir de ne pas mourir dans l'intervalle des m + n années prochaines, est à la crainte de mourir dans ce même intervalle comme* $(m + n)$ *à* $(m) - (m + n)$*. Donc l'espérance surpassera la crainte si* $(m+n) > \frac{1}{2}(m)$ *; et la crainte sera plus fondée si* $(m + n) < \frac{1}{2}(m)$*. Or la crainte égalera l'espérance, si* $(m + n) = \frac{1}{2}(m)$*.*

ON DEMANDE LA PROBABILITÉ, QU'UN HOMME D'UN CERTAIN ÂGE MOURRA DANS LE COURS D'UNE ANNÉE DONNÉE.

Que l'homme en question soit âgé de m ans, mais qu'il meure avant qu'il parvienne à l'âge de n+1 ans. Pour trouver cette probabilité, concevons un grand nombre d'hommes M du même âge, et ayant M = (m)N, et N = $\frac{M}{(m)}$*, il y aura* $\frac{(n)}{(m)}M$ *hommes, qui atteignent l'âge de n ans, et* $\frac{(n+1)}{(m)}M$*, qui atteignent celui de n + 1 ans : il en mourra donc probablement dans le cours de cette année* $\frac{(n)-(n+1)}{(m)}M$ *; et partant la probabilité que l'homme proposé se trouve dans ce nombre sera égale à* $\frac{(n)-(n+1)}{(m)}$.

De là il est évident, pour que ce même homme meure entre l'année n + v de son âge, la probabilité sera égale à $\frac{(n)-(n+v)}{(m)}$.

Or, pour que cet homme meure un jour marqué de l'année proposée, la probabilité sera égale à $\frac{(n)-(n+1)}{365(m)}$.

Si la question est d'un enfant nouvellement né, on n'a qu'à écrire 1 au lieu de la fraction (m).

TROUVER LE TERME, AUQUEL UN HOMME D'UN ÂGE DONNÉ PEUT ESPÉRER DE PARVENIR, DE SORTE QU'IL EST ÉGALEMENT PROBABLE QU'IL MEURE AVANT CE TERME QU'APRÈS.

Soit l'âge de l'homme en question de m ans, et celui qu'il peut espérer d'attendre de z ans, qu'il s'agit de trouver. Or la probabilité qu'il parvienne à cet âge étant égale à $\frac{(z)}{(m)}$*, la probabilité qu'il meure avant ce terme sera égale à* $1 - \frac{(z)}{(m)}$*. Donc, puisque l'une et l'autre probabilité doit être la même, nous aurons cette équation* $\frac{(z)}{(m)} = 1 - \frac{(z)}{(m)}$*, et partant (z) =* $\frac{1}{2}$*(m), dont il est aisé de trouver le nombre z, dès qu'on a déterminé par les observations les valeurs de toutes ces fractions :*

(1), (2), (3), (4), (5), (6), etc.

car on verra d'abord laquelle (z) sera la moitié de la proposée (m).

Ayant trouvé ce nombre z, on nomme l'intervalle z – m la force de la vie d'un homme de m ans.

5) Définir les termes « espérance » et « force de la vie ».

6) **Soit un homme âgé de 30 ans. Jusqu'à quel âge peut-il espérer vivre ?**

7) **En déduire la force de la vie d'un homme de 30 ans.**

BILAN DE L'ACTIVITÉ

Je les ai laissés découvrir le texte d'Euler. La mise en route fut difficile car j'ai vite remarqué que le texte était complexe pour eux, et que le vocabulaire était imprécis. Rapidement, on a défini le vocabulaire (rentes viagères, mortalité) et les élèves ont cherché à savoir quelle était la finalité de l'étude. Je leur ai expliqué quels bénéfices pouvaient tirer une compagnie d'assurance par exemple, de savoir à quel âge les clients risquaient de mourir.

Pour les questions 1 et 2, les élèves ont bien compris la notation (2)N sachant que je leur avais distribué la table en même temps que le document.

Le fait de donner les nombres arrondis au millième et de demander le calcul pour 1 000 enfants permet aux élèves de trouver le résultat pour la question 1 sans utiliser de calculatrice. Une fois le problème compris, le passage à une population de départ de 37 650 enfants se fait aisément.

Le détail des calculs est pour la plupart des élèves fourni dans la deuxième question.

Réponse à la question 1 :

Sur 1000 enfants nés il restera en vie - 768 enfants au bout de 2a
- 736 enfants au bout de 3an
- 709 enfants au bout de 4ans
- 552 enfants au bout de 25an

Réponse à la question 2 :

2) $37\,650 \times 0{,}768 = 28915{,}2$
$37650 \times 0{,}736 = 27710{,}4$
$37650 \times 0{,}709 = 26694$
$37650 \times 0{,}552 = 25903{,}2$

Pour la réponse de la question 2), les élèves se sont trouvés confrontés à un problème d'arrondi. Aucun des groupes n'a pensé à arrondir à l'unité le nombre d'enfants vivants.

Dès lors, les différents groupes d'élèves s'interrogeaient sur le vocabulaire à utiliser. Dans la question 1, il est demandé combien seront encore en vie sur 1 000 enfants au bout de 25 ans. Un groupe m'a demandé si le terme « enfants » était bien approprié. A partir de là, l'ensemble des groupes s'est mis d'accord pour parler de « vivants » au lieu d'« enfants ».

Pour la question 3, les élèves de chaque groupe ont écrit le calcul :

$$\frac{(0,362)}{(0,507)} \times 5\,000 = 3\,570.$$

La lecture du paragraphe étant assez courte, les élèves ont vite remarqué que la formule à utiliser se trouvait à la fin du paragraphe

$$\frac{(m{+}n)}{(m)}M.$$

Pour la question 4, la plupart ont réalisé le calcul :

$$\frac{(0,072)}{(0,507)} \times 5\,000 = 710.$$

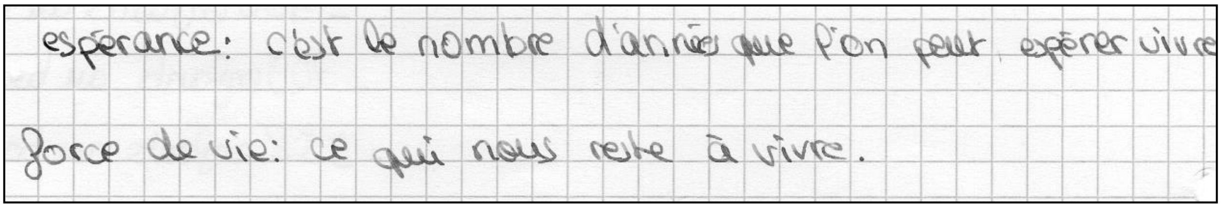
De plus, les élèves trouvaient leur résultat cohérent. C'est-à-dire qu'en l'espace de 30 ans, la population passait de 3 570 à 710, soit une baisse d'effectif de 80 %. Placé dans le contexte historique, les élèves étaient persuadés que l'on mourait plutôt autour de 50 ans.

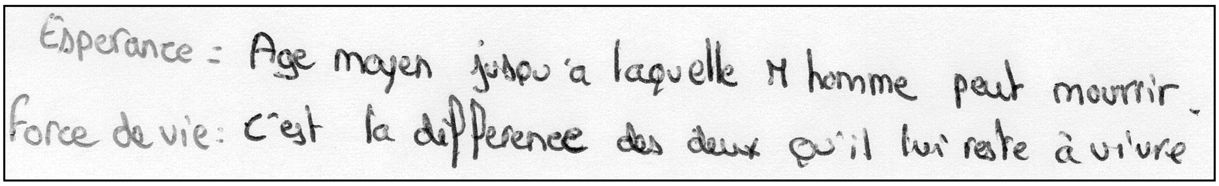
Lors du test de cette activité dans une autre classe de seconde générale, l'utilisation de la notation prise par Euler a été mal interprétée. Lorsque les élèves devaient calculer $(m{+}n)$, ils ont compris $(m) + (n)$. Dès lors, au lieu de prendre 0,072 dans la table pour la question 3), ils ont choisi 0,507 + 0,584 = 1,091. Le coefficient $\frac{(m+n)}{(m)}$ devenait donc $\frac{1,091}{0,507} = 2,15$. Le rapport $\frac{(m+n)}{(m)}$ étant supérieur à un, les élèves se sont trouvés face à un problème : le nombre de vivants augmentait avec l'âge. Ceci a conduit directement les élèves à reconsidérer leur calcul.

La suite de l'activité fut plus délicate. Certains des groupes trouvaient que le texte d'Euler était de plus en plus difficile et les formules mathématiques de plus en plus présentes.

La question 5 permettait de définir les termes « espérance » et « force de la vie ». Cette notion était intéressante à aborder car les élèves ont des idées erronées sur la notion d'espérance. Une fois l'activité terminée, je me suis rendu compte que la question 5 était mal formulée. Une autre formulation possible aurait été : « Selon vous, quel(s) sens Euler donne-t-il aux termes *espérance* et *force de vie* ? ».

Voici deux réponses différentes à la question 5 :


espérance : c'est le nombre d'années que l'on peut espérer vivre
force de vie : ce qui nous reste à vivre.


Espérance : Age moyen jusqu'a laquelle l'homme peut mourrir.
Force de vie : C'est la difference des deux qu'il lui reste à vivre

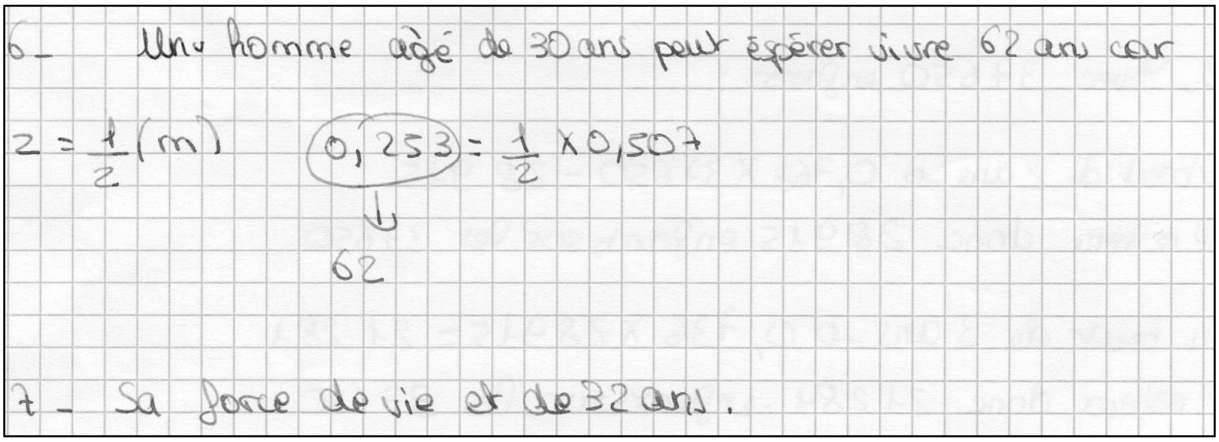
A la lecture de leur réponse, la discussion s'est tournée vers l'espérance de vie donnée actuellement par les médias. Les élèves pensent que si l'espérance de vie est annoncée à 80 ans par exemple, cela signifie que n'importe quelle personne issue de la population donnée vivra en moyenne jusqu'à 80 ans. Les élèves ont du mal à intégrer l'idée que l'espérance évolue avec l'âge de la personne concernée. La discussion s'est alors tournée sur la différence entre l'espérance et la force de vie.

Il est vrai qu'il y a une réelle difficulté à aborder les termes d'espérance de vie et de force de vie avec les élèves.

La définition actuelle donnée par l'institut national de la statistique et des études économiques (I.N.S.E.E.) de l'espérance de vie est la suivante : *L'espérance de vie à la naissance (ou à l'âge 0) représente la durée de vie moyenne – autrement dit l'âge moyen au décès – d'une génération fictive soumise aux conditions de mortalité de l'année*.

Peu de groupes sont arrivés à répondre aux questions 6) et 7) du document par manque de temps.

Voici les réponses d'un groupe :


6 – Unu homme âgé de 30 ans peut espérer vivre 62 ans car

$2 = \frac{1}{2}(m)$ $\quad (0,253) = \frac{1}{2} \times 0,507$

62

7 – Sa force de vie et de 32 ans.

Une autre expérimentation de cette activité a été réalisée avec une classe de seconde générale. Les élèves étaient répartis en 10 groupes de 3 ou 4 élèves. Une fois que le professeur eut expliqué l'activité, notamment sur la notation (n), les élèves n'ont pas eu de réelles difficultés pour répondre aux questions 1), 2) et 3). Ils ont su écrire les formules et bien utiliser la table.

En revanche, la réponse à la question 4) a été davantage discutée, au sujet de l'utilisation de la formule $\frac{(m+n)}{(m)}M$: quelles valeurs donner à m et n ? Comment gérer le $m + n$? L'erreur fréquemment commise a été de confondre $(m+n)$ et $(m)+(n)$. À cause de cette confusion, deux groupes trouvent plus d'hommes en vie au bout de 50 ans qu'au bout de 20 ans !

PROLONGEMENTS POSSIBLES

Dès lors, le questionnement des élèves s'est tourné vers l'évolution de cette table : C'est-à-dire faire le même travail avec une table utilisant les données actuelles. Le fort taux de mortalité dès la première année ne semblait pas connu des élèves.

Ils restaient étonnés du nombre énorme de décès des nouveaux nés. Un élève remarqua même que cette proportion était proche de 20%, soit 1 enfant sur 5 qui disparaît lors de la première année de sa vie.

Par ailleurs, un groupe s'est interrogé sur la méthode utilisée par Euler. Quel était son échantillon pour réaliser cette table ?

La page suivante comporte une table de mortalité actuelle, issue de l'institut national d'études démographiques (INED). La présentation est volontairement la même que celle des tables utilisées par Euler.

BIBLIOGRAPHIE

EULER, Leonhard, « Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain ». *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, tome 16, 1767, pages 144 à 164.
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k814735/f1.image

INED, tables de mortalité,
http://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/chiffres/france/mortalite-cause-deces/table-mortalite/

INSEE, définitions,
http://www.insee.fr/fr/methodes/default.asp?page=definitions/esperance-vie.htm

TABLE DE MORTALITÉ DES ANNÉES 2010 - 2012, données provisoires arrêtées fin décembre 2013

(1)	0,996	(31)	0,988	(61)	0,905	(91)	0,268
(2)	0,996	(32)	0,987	(62)	0,898	(92)	0,228
(3)	0,996	(33)	0,986	(63)	0,891	(93)	0,190
(4)	0,996	(34)	0,985	(64)	0,883	(94)	0,156
(5)	0,996	(35)	0,985	(65)	0,875	(95)	0,124
(6)	0,996	(36)	0,984	(66)	0,866		
(7)	0,995	(37)	0,983	(67)	0,857		
(8)	0,995	(38)	0,982	(68)	0,847		
(9)	0,995	(39)	0,981	(69)	0,837		
(10)	0,995	(40)	0,980	(70)	0,826		
(11)	0,995	(41)	0,979	(71)	0,815		
(12)	0,995	(42)	0,977	(72)	0,803		
(13)	0,995	(43)	0,976	(73)	0,789		
(14)	0,995	(44)	0,974	(74)	0,775		
(15)	0,995	(45)	0,972	(75)	0,759		
(16)	0,995	(46)	0,970	(76)	0,743		
(17)	0,994	(47)	0,968	(77)	0,724		
(18)	0,994	(48)	0,966	(78)	0,705		
(19)	0,994	(49)	0,963	(79)	0,683		
(20)	0,993	(50)	0,960	(80)	0,659		
(21)	0,993	(51)	0,957	(81)	0,634		
(22)	0,992	(52)	0,953	(82)	0,606		
(23)	0,992	(53)	0,949	(83)	0,575		
(24)	0,991	(54)	0,945	(84)	0,543		
(25)	0,991	(55)	0,940	(85)	0,508		
(26)	0,990	(56)	0,935	(86)	0,471		
(27)	0,990	(57)	0,930	(87)	0,432		
(28)	0,989	(58)	0,924	(88)	0,392		
(29)	0,989	(59)	0,918	(89)	0,351		
(30)	0,988	(60)	0,912	(90)	0,309		