

CALCUL D'UNE POPULATION : UN EXEMPLE HISTORIQUE RECONSTITUE EN CLASSE AVEC LE TABLEUR

Philippe Martinet
Collège Maurice Clavel d'Avallon

Résumé

A partir d'une table de mortalité (en fait d'une table de survivants) obtenue de façon fiable, et du nombre de naissances, Kersseboom donne au début de son premier traité¹ le tableau par âges de la population de son pays, sans aucun détail. Un tableur permet, une fois entrée la table de mortalité, de retrouver rapidement la valeur donnée par Kersseboom. Ce calcul serait extrêmement long et fastidieux « à la main ». Le but de cet article est de montrer à travers le TP n°1 comment ce travail a été dévolu à une classe. Puis, dans un second temps, une fiche pédagogique permet de faire le lien entre le concept de « coefficient multiplicateur des naissances » obtenu à la fin de ce TP, concept au cœur de la pensée démographique du XVIIIème siècle, et la notion d'Espérance de vie. Vient alors un second TP, structuré sur le modèle du premier, dont l'objet est de retrouver l'espérance de vie de la population française à partir du nombre de naissances annuel et de la table de mortalité la plus récente disponible actuellement.

¹ KERSSEBOOM, Willem, *Essais d'Arithmétique politique*, réédition INED, 1970, pages 14 et 15

TP Statistiques

Evaluer une population : comment ? Un exemple historique.

Les objectifs en lien avec le programme de 4° sont d'une part d'utiliser des pourcentages (partie A/), et d'autre part d'utiliser un tableur dans un contexte mettant en œuvre des données réelles (partie B/).

Présentation

Le tableau 1 donné en annexe est extrait du premier des trois traités intitulé « Essai en vue de connaître la grandeur probable de la population de la province de Hollande et Frise occidentale (...) » paru en 1742, et écrit par Willem Kersseboom, un grand fonctionnaire hollandais, considéré aujourd'hui comme l'un des premiers grands démographes. C'est une des premières tentatives modernes pour dénombrer de façon scientifique une population.

Malheureusement, l'auteur ne donne dans ce premier traité que très peu d'informations sur la façon dont il a obtenu ces chiffres. Il ne semble même préoccupé que par une chose : le nombre d'enfants qui naissent chaque année dans son pays. Pourquoi ? C'est la réponse à cette question qui est l'objectif des activités qui suivent.

Dans l'extrait ci-dessous, l'auteur nous explique comment il a obtenu ce tableau :

Après avoir ainsi trouvé le nombre d'enfants qui atteignent l'année, on a procédé de la manière suivante pour trouver les autres données. On a relevé pour des milliers de rentes viagères², conclues dans cette province pendant les derniers 125 ans, les âges des personnes pour lesquelles elles étaient conclues. Ensuite on a enregistré exactement l'âge de décès de toutes ces personnes par groupes d'âges. Ainsi on a pu calculer le taux de mortalité par âge ou groupe d'âges. Sur la base de toutes ces données détaillées on a établi un tableau, lequel donne le quotient de mortalité par âge, à commencer par celui de moins d'un an et jusqu'à 100 ans par groupe d'âge. Le tableau ci-dessus en est le résultat.

Le but de la partie A/ ci-dessous est de retrouver comment Kersseboom a obtenu l'effectif de la classe [0-5ans] du tableau 1, à partir du tableau 2.

Avertissement : tous les pourcentages seront donnés avec deux chiffres après la virgule.

A/ Calculs « à la main » (sans utiliser le tableur)

Partie 1

A l'aide du tableau 2, répondez aux questions suivantes.

1° a/ Combien de nouveaux nés ont atteint l'âge d'un an ?

b/ Quel est le pourcentage de bébés qui ont survécu, la première année ?

2° a/ Combien de nouveaux nés ont atteint l'âge de 2 ans ?

b/ Quel est le pourcentage de survivants au bout de deux ans ?

² Une rente viagère est une espèce d'assurance vie

3° Calculez de même le pourcentage de survivants au bout de :

a/ 3 ans, b/ 4 ans, c/ 5 ans.

4° Présentez tous les résultats obtenus ci-dessus dans un tableau à deux colonnes : une colonne pour l'âge et une pour le pourcentage de survivants à cet âge.

Partie 2

On suppose qu'une année donnée (1740 par exemple), sont nés 28 000 enfants.

1° En supposant que les pourcentages de survivants sont ceux obtenus à la partie 1 ci-dessus et qu'ils restent constants dans le temps, sur ces 28 000 enfants :

a/ Calculez le nombre de survivants au bout d'un an ; vérifier qu'on obtient environ 22 500.

b/ Calculez de même, en arrondissant à la dizaine, le nombre de survivants au bout de 2 ans, 3 ans, 4 ans et 5 ans.

2° Complétez alors le tableau ci-dessous, en commençant par griser les cases qui ne peuvent « accueillir » de valeur :

	Des 28 000 naissances au 31/12/1740, restera :	Des 28 000 naissances au 31/12/1741, restera :	Des 28 000 naissances au 31/12/1742, restera :	Des 28 000 naissances au 31/12/1743, restera :	Des 28 000 naissances au 31/12/1744, restera :
Restera au :					
31/12/1740	28 000				
31/12/1741	22 484				
31/12/1742					
31/12/1743					
31/12/1744					
31/12/1745					

3° a/ Observer la première colonne et la dernière ligne.

Que constatez-vous ?

b/ Que représente la somme des éléments de la dernière ligne ?

c/ Comparez cette valeur avec la valeur correspondante trouvée par Kerseboom (voir fiche annexe-Tableau 1).

4° Imaginez alors comment Kerseboom s'y est pris pour obtenir tout le tableau 1 ; décrivez-le ci-dessous.

.....

B/ Calculs avec un tableur (Salle multimédia)

Ouvrir la feuille de calcul « kerseboom_table_mortalite ».

1° Créez en troisième colonne une colonne intitulée « Pourcentage de survivants ».

Insérez une formule permettant de calculer le pourcentage de survivants au bout de la première année. Recopier et étendre alors cette formule vers le bas.

b/ Comparez les premières valeurs affichées avec celles que vous avez obtenues à la partie 1.

2° a/ Créez en quatrième colonne une colonne intitulée « Prévission du nombre de survivants des 28 000 naissances ».

Insérez une formule permettant de calculer le nombre de survivants de 28 000 naissances, au bout d'un an. Recopier et étendre alors cette formule vers le bas.

b/ Comparez les premières valeurs affichées avec celles que vous avez obtenues à la partie 2.

3° Comparaison avec les valeurs trouvées par Kersseboom

a/ Créez en cinquième colonne une colonne intitulée « Effectifs cumulés ».

Insérez une ligne à l'issue des 5 premières années, et dans la cellule de la cinquième colonne, faites apparaître la somme des 6 cellules situées au-dessus.

b/ Continuez ainsi à insérer des lignes pour faire apparaître les effectifs par classes d'âge comme dans le tableau 1 donné en annexe à la partie A/ du TP.

c/ Comparez alors vos résultats avec ceux obtenus par Kersseboom dans le tableau de l'annexe 1. Sont-ils en accord ? Détaillez.

Annexe 1 : population donnée au premier traité³

Age	Nombre
91 ans et plus	500
86-90 ans	2 500
81-85 ans	6 500
76-80 ans	13 000
71-75 ans	20 300
66-70 ans	27 300
61-65 ans	34 300
56-60 ans	40 800
51-55 ans	47 000
46-50 ans	53 000
41-45 ans	57 800
36-40 ans	62 500
31-35 ans	67 600
27-30 ans	58 400
21-26 ans	94 300
16-20 ans	83 400
11-15 ans	87 200
6-10 ans	91 800
0-5 ans	131 800
0-26 ans	488 500
Nombre total d'habitants	980 000

Tableau 1

³ KERSSEBOOM, Willem, *Essais d'Arithmétique politique, premier traité*, pages 14 et 15

Annexe 2 : tableau extrait du deuxième traité⁴, p 88

Table de survie représentant le nombre de personnes d'une génération de 1400, qui survivent chaque année. De ces 1400 personnes, il meurt 215 dans les 8 mois après la naissance, laissant 1 185 de cet âge.

Age	Survivants								
1	1125	21	808	41	596	61	369	81	87
2	1075	22	800	42	587	62	356	82	75
3	1030	23	792	43	578	63	343	83	64
4	993	24	783	44	569	64	329	84	55
5	964	25	772	45	560	65	315	85	45
6	947	26	760	46	550	66	301	86	36
7	930	27	747	47	540	67	287	87	28
8	913	28	735	48	530	68	273	88	21
9	904	29	723	49	518	69	259	89	15
10	895	30	711	50	507	70	245	90	10
11	886	31	699	51	495	71	231	91	7
12	878	32	687	52	482	72	217	92	5
13	870	33	675	53	470	73	203	93	3
14	863	34	665	54	458	74	189	94	2
15	856	35	655	55	446	75	175	95	1
16	849	36	645	56	434	76	160	96	0,6
17	842	37	635	57	421	77	145	97	0,5
18	835	38	625	58	408	78	130	98	0,4
19	826	39	615	59	395	79	115	99	0,2
20	817	40	605	60	382	80	100	100	0,0

Tableau 2

⁴ KERSSEBOOM, Willem, *Essais d'Arithmétique politique, second traité, page 88*

Fiche pédagogique

Comme son nom l'indique, cette séance est un complément à la séance sur Kerseboom. Il est donc nécessaire d'assurer le lien entre ces deux séances, afin de les remettre en perspective par rapport à la grande question posée au début de ce travail de statistiques : « Comment mesurer une population ? »

Citons en préambule J. Dupâquier dans « L'invention de la table de mortalité »⁵ :

La plupart des arithméticiens politiques, ainsi que les économistes et les hommes d'Etat, préconisent, dans la seconde moitié du XVIII siècle une nouvelle méthode pour mesurer la population : au lieu de procéder à des recensements, coûteux et peu fiables, il suffit à leur avis, de compter les baptêmes dans quelques paroisses pendant plusieurs années pour calculer une « année commune », puis de lui appliquer un coefficient multiplicateur adéquat (...) La difficulté était d'estimer correctement ce « multiplicateur universel ».

La démarche suivie pour ces séances est la suivante :

1. Dans le TP 1, on a retrouvé comment Kerseboom s'y était pris pour estimer une population en partant du nombre de naissances (supposé constant) et d'une table de mortalité.

Citons quelques extraits du premier des 3 traités :

Sur des bases sérieuses qui seront traitées ultérieurement, on peut déterminer, qu'il naît 28 000 enfants par an dans la province de Hollande et Frise occidentale. On connaît ensuite d'une manière digne de confiance, l'évolution des probabilités de survie pour chaque âge, par une étude précise de la mortalité à l'aide des rentes viagères traitées dans cette province pendant les cent dernières années.(...)

(...) Ce tableau montre que le nombre de personnes actuellement en vie se rapporte au nombre annuel de naissances comme 35 à 1. Cela veut dire qu'il y a 35 fois plus de personnes vivantes qu'il ne naît chaque année d'enfants.

2. C'est ce coefficient multiplicateur qui est au cœur des recherches de Kerseboom, et de nombreux chercheurs qui s'occupent de démographie aux XVIIème et XVIIIème siècles.

Citons de nouveau J. Dupâquier ⁶ :

Kerseboom espère de cette manière pouvoir calculer la population à partir du nombre moyen annuel des naissances et des probabilités de survie par âge, ce qui implique l'hypothèse d'une population fermée et stationnaire.

3. Le coefficient multiplicateur « 35 » évoqué par Kerseboom correspond (avec des hypothèses simplificatrices sur les populations) à l'espérance de vie. Ainsi, d'après les calculs de Kerseboom, l'espérance de vie à la naissance au début du XVIIIème siècle aurait été de 35 ans. Nous nous proposons dans la séance qui vient, de partir de la définition actuelle de l'espérance de vie pour la calculer, en adoptant le même raisonnement que celui de Kerseboom pour estimer la population de Hollande et Frise occidentale. Les « 28 000 naissances » de Kerseboom seront remplacées par une « génération de 100 000 individus », et sa table de survie est remplacée par la table de mortalité la plus récente (2009-2011) disponible actuellement (source INED). Mais attention : la table fournie par l'INED ne se déchiffre pas comme le tableau construit au premier TP ; dans le tableau construit au premier TP, chaque pourcentage calculé est un pourcentage déterminé en référence à la population des 1400 individus de départ, ce qui explique que la colonne présente des valeurs nécessairement décroissantes ; alors que dans le tableau de l'INED, chaque pourcentage est déterminé en

⁵ DUPAQUIER, Jacques, *L'invention de la table de mortalité*, PUF 1996, note 1 p 89

⁶ *Ibid*

référence au nombre de survivants de l'année précédant l'année considérée. On ne revient pas à chaque fois à l'effectif de départ, c'est ce qui explique par exemple que les deux premières valeurs ne soient pas décroissantes. Il nous semble donc que ce TP2 rédigé tel quel en se basant sur le tableau brut fourni par l'INED s'adresse plus particulièrement aux lycéens. Pour le proposer à des collégiens, il nous semblerait préférable de transformer ce tableau pour le présenter comme celui du TP1. Un tel tableau est fourni en fichier joint sous le nom « *tableau68..._eleve_vierge_college* ». Pour le reste, la structure de la séance est la même que dans le premier TP : dans un premier temps, on fait quelques calculs « à la main » pour bien comprendre les données et la définition de « l'espérance de vie » puis dans un second temps, on passe au tableur pour le calcul effectif de cette espérance de vie.

4. Il reste alors à comparer la population française totale estimée fin 2012 à 65,5 millions avec le produit de l'espérance de vie trouvée au 5^o partie C/ par le nombre de naissances actuellement en France (environ 796 000 par an sur les années 2009-2011) :

$$796\ 000 \times 81,3 = 64,7 \text{ millions, ce qui n'est pas si loin !}$$

Exercice pour les professeurs :

Enumérer des raisons qui expliquent qu'on ne retrouve pas précisément 65,5 millions.

TP Statistiques n°2 : espérance de vie aujourd'hui

Les objectifs pédagogiques, en lien avec le programme de quatrième, sont d'une part d'utiliser des pourcentages (partie A/), d'autre part d'utiliser un tableur dans un contexte mettant en œuvre des données actuelles officielles (partie B/).

L'objectif mathématique est de montrer comment, à partir de la table de mortalité la plus récente fournie par l'INED, on peut trouver l'espérance de vie à la naissance de la population française (tous sexes confondus).

A/ Présentation

Voici la définition que donne l'INED (Institut National de la Démographie) de l'espérance de vie :

L'espérance de vie à la naissance (ou à l'âge 0) représente la durée de vie moyenne - autrement dit l'âge moyen au décès - d'une génération fictive qui serait soumise à chaque âge aux conditions de mortalité de l'année considérée.

Remarque : En général, la génération fictive dont il est question ici est une population de 100 000 individus qu'on suppose nés la même année.

On donne ci-dessous la fin de la table de mortalité la plus récente (2011) disponible actuellement (source : INED).

Guide de lecture

Pour 100 000 individus nés la même année :

$S(x)$ désigne le nombre de survivants à l'âge x .

$Q(x, x+1)$ est le quotient de mortalité pour 100 000 survivants à l'âge x ; prenons un exemple pour comprendre :

A la ligne « 90 », on peut lire pour $Q(x, x+1)$ le nombre 13 533. Cela signifie que s'il restait 100 000 individus âgés de 90 ans, 13 533 mourraient dans l'année.

Comme il n'en reste que 30 363, il faut donc utiliser un tableau de proportionnalité pour calculer combien de ces 30 363 vont mourir dans l'année.

Age x	$S(x)$	$Q(x, x+1)$	$D(x, x+1)$
90	30 363	13 533	
91	26 254	14 826	
92	22 362	16 269	
93	18 724	18 425	
94	15 274	20 370	
95	12 163	22 260	
96	9 455	24 943	
97	7 097	26 646	
98	5 206	28 882	
99	3 702	30 945	

B/ Pour tester sa compréhension, avant d'aller sur le tableur

1° a/ Si, sur 100 000 individus âgés de 90 ans, 13 533 meurent, combien peut-on estimer qu'il meurt d'individus sur 30 363 ?

Vous pouvez compléter le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Nombre total d'individus	100 000	
Nombre de décès	13 533	

b/ Vérifier qu'on peut aussi obtenir le résultat ci-dessus en multipliant 30 363 par $\frac{13533}{100000}$.

c/ A l'aide du résultat précédent, déterminer le nombre d'individus qui atteignent les 91 ans et vérifier que le résultat trouvé est bien en accord avec la valeur donnée dans le tableau.

2° On peut obtenir ainsi le nombre de décédés à chaque âge, en multipliant le nombre de survivants par $\frac{Q(x,x+1)}{100\,000}$.

a/ Compléter la quatrième colonne du tableau, intitulée « D(x,x+1) » en indiquant dans cette colonne le nombre de décédés à chaque âge (entre 90 et 99 ans).

b/ Vérifier les valeurs trouvées en faisant la différence entre deux lignes consécutives de la colonne « S(x) ».

3° Pour l'ensemble des individus âgés de 90 à 99 ans révolus, on voudrait estimer l'âge moyen au décès. Pour cela, on suppose qu'à chaque âge, les décès sont également répartis sur toute l'année, c'est à dire qu'il y a en moyenne autant de décès sur la première moitié de l'année que sur la seconde. On fait donc comme si tous les décès avaient lieu le même jour : au milieu exact de l'année.

Par exemple, pour la classe d'âge « 90 ans », on supposera donc que tous les décès ont eu lieu à l'âge de 90 ans et six mois.

a/ Exprimer 90 ans 6 mois en nombre décimal d'années : 90 ans 6 mois = ans

b/ Compléter la première colonne du tableau.

c/ Reporter la quatrième colonne obtenue au 2° ci-dessus dans la troisième colonne ci-contre.

d/ Compléter alors la dernière colonne du tableau ci-contre.

e/ Compléter la dernière ligne du tableau.

f/ En déduire alors l'âge moyen au décès pour cette population.

Age x	Age moyen au décès pour l'âge x	Nombre de décés à l'âge x D(x,x+1)	Estimation du nombre total d'années vécues par l'ensemble des décédés à l'âge x
90			
91			
92			
93			
94			
95			
96			
97			
98			
99			
Total			

C/ Sur tableur

Ouvrir le fichier « tableau68-ined-tablemortalite2009-2011_eleve_vierge ».

Ce tableau 68 de l'INED ne donne pas les mortalités au-delà de 99 ans ; afin de pallier cette insuffisance de données, on considèrera dans cette partie que les survivants à 99 ans meurent tous dans leur centième année.

1° Créer ligne 109 une ligne permettant d'intégrer la considération ci-dessus.

2° Créer colonne D une colonne intitulée « Décès à l'âge x » : écrivez ce titre en D8.
 Insérez alors en D9 une formule permettant de calculer le nombre de décès avant 1 an.
 Recopier et étendre cette formule vers le bas.
 Vérifier en faisant le calcul à la main pour une ligne choisie au hasard.

3° Créer colonne E une colonne intitulée « Estimation du nombre total d'années vécues par les individus morts à l'âge x » : écrivez ce titre dans la cellule E8.

Insérez alors en E9 une formule permettant d'estimer le nombre total d'années vécues par les individus morts avant 1 an ; comme à la partie B/ ci-dessus, on considérera que les bébés en question sont tous morts à l'âge de 6 mois, donc 0,5 ans.

Recopier et étendre cette formule vers le bas.

Vérifier que la cellule E70 affiche bien le nombre 42 992,75 (ou un nombre proche si le format est différent).

Si ce n'est pas le cas, cherchez l'erreur puis appelez le professeur si vous ne trouvez pas.

4° Faire ensuite afficher en D110 la somme de tous les éléments de la colonne D, et en E110 la somme de tous les éléments de la colonne E.

5° Faire alors afficher en F110 le quotient de E110 par D110.

Que représente le résultat affiché ?

D/ Pour ceux qui vont vite

En fait l'espérance de vie donnée par l'INED est de 81,32 ans.

1° En revenant sur la considération faite au début du C/, on peut faire l'hypothèse moins simpliste que 50 % des survivants à 100 ans meurent dans leur centième année et que les survivants restants meurent tous dans leur 101^{ème} année.

a/ Modifier la feuille de calcul pour prendre en compte ces nouvelles hypothèses.

b/ Quelle nouvelle estimation obtient-on alors pour l'espérance de vie ? Comparez avec celle obtenue précédemment et celle fournie par l'INED.

2° a/ Faites de nouvelles hypothèses encore plus réalistes :

.....
.....
.....

b/ Modifier de nouveau la feuille de calcul pour prendre en compte ces nouvelles hypothèses. Observez comment évolue la valeur obtenue en F110.