Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 77.

Comment démontrer sans calcul que :
Le triangle de côtés 5, 5, 6 et le triangle de côtés 5, 5, 8 ont la même aire ?

PROBLÈME – 77.

Dans un ensemble à 6 éléments, trouver le nombre maximal de sous-ensembles dont les intersections deux à deux sont non vides.

Solutions du numéro précédent :

JEU – 76.

Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et les 4 opérations, on peut approcher π à $2.\ 10^{-3}$ près par $\pi \approx 3 + \frac{1}{5+4-2} = 3{,}1428$ ...

Faites de même
en approchant π à $8.\ 10^{-5}$ près avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et les 4 opérations,
en approchant π à $3.\ 10^{-7}$ près avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et les 4 opérations.

Solution :

Je n'ai pas mieux que :

$$3 + \frac{\frac{1}{6}+\frac{2}{5}}{4} = \frac{377}{120} \approx 3{,}146666 \ldots \text{ avec un écart de } 7{,}4\ldots\ 10^{-5}$$

et

$$\frac{5\times(8\times 9-1)}{(2+3)\times 4\times 6-7} = \frac{355}{113} \approx 3{,}1415929203 \ldots \text{ avec un écart de } 2{,}6\ldots\ 10^{-7}$$

On reconnaît dans la fraction 355 / 113 une réduite du développement de π en fraction continue, bien meilleure que 22 / 7..

PROBLÈME – 76.

Démontrer pour tout x réel l'égalité :

$$(11^x + 111^x)^{10} \times (1001^{10} + 10101^{10})^x = (11^{10} + 111^{10})^x \times (1001^x + 10101^x)^{10}$$

Solution :

Deux identités seront utilisées plusieurs fois :
$1 + x^2 + x^4 = (1 - x + x^2)(1 + x + x^2)$ et $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$.

On a, en utilisant uniquement les règles sur les puissances, les deux identités ci-dessus et la distributivité :

$$[(1+y)^x + (1+y+y^2)^x]^y \times [(1+y^3)^y + (1+y^2+y^4)^y]^x =$$
$$[(1+y)^x + (1+y+y^2)^x]^y \times [(1+y)^y(1-y+y^2)^y + (1-y+y^2)^y(1+y+y^2)^y]^x =$$
$$[(1+y)^x + (1+y+y^2)^x]^y \times [(1-y+y^2)^y((1+y)^y + (1+y+y^2)^y)]^x =$$
$$[(1+y)^x + (1+y+y^2)^x]^y \times (1-y+y^2)^{yx} \times [(1+y)^y + (1+y+y^2)^y]^x =$$
$$[(1+y)^x + (1+y+y^2)^x]^y \times (1-y+y^2)^{xy} \times [(1+y)^y + (1+y+y^2)^y]^x =$$
$$[(1-y+y^2)^x((1+y)^x + (1+y+y^2)^x)]^y \times [(1+y)^y + (1+y+y^2)^y]^x =$$
$$[(1+y^3)^x + (1+y^2+y^4)^x)]^y \times [(1+y)^y + (1+y+y^2)^y]^x$$

Si on pose $y = 10$, l'égalité entre le premier et le dernier terme ci-dessus donne l'égalité demandée.