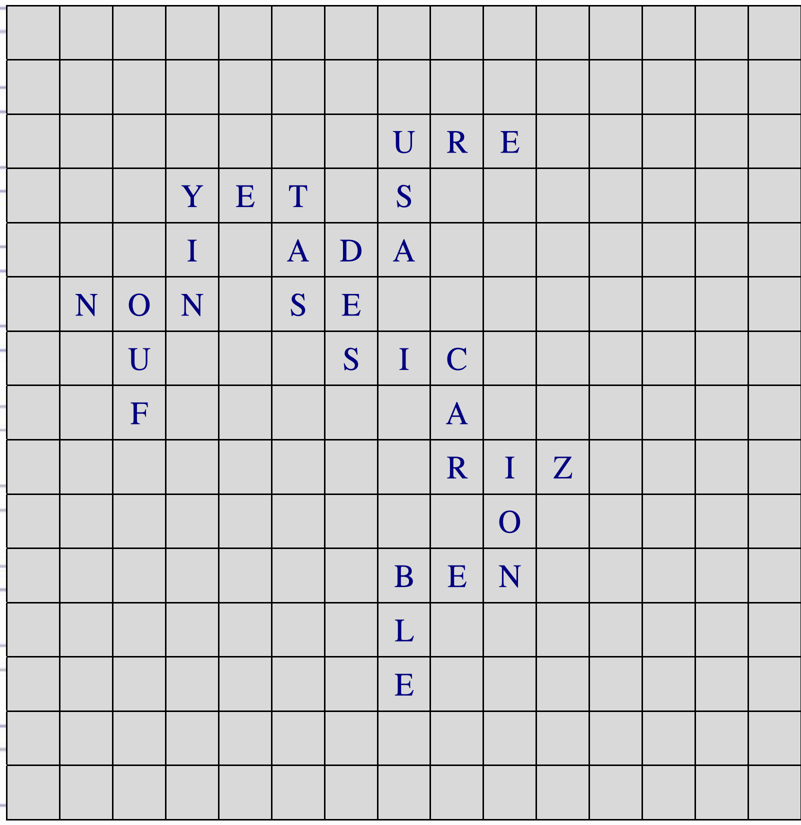
N° 127 – Avril 2013

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ Apprentis chercheurs sur la conjecture d'Erdős-Straus
- ✓ Probabilités et scrabble
- ✓ Un exemple d'algorithme : le problème des anniversaires



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Éditorial

Dans cette 127ème Feuille de Vigne, nous découvrons d'abord la deuxième partie d'un article de Denis et Marie-Line Gardes. Cet article relate une expérimentation où les élèves d'une classe de terminale scientifique ont pratiqué une activité de recherche mathématique sur le fameux problème d'Erdös-Straus. Expérimentation très intéressante dont nous avons été les cobayes, nous, public de la journée de formation du 7 février 2013 de l'IREM.

Viennent ensuite les probabilités et la statistique, très en vogue en ce moment !

Après plusieurs articles sur les Sudokus, Michel Lafond délaisse les chiffres pour s'attaquer aux lettres. Il nous propose une étude des probabilités d'apparition des mots au Scrabble. Nous avons donc, nous dit-il pour finir, à peu près une chance sur quatre de placer toutes les lettres dès la première fois…à condition bien sûr de connaître les 31 070 mots de sept lettres.

Dans l'article suivant, Jean-Marie Thomassin, partant du problème des anniversaires, voir l'article de Michel Plathey à ce sujet dans la Feuille de Vigne 121, propose une activité de programmation sur Algobox pour déterminer le nombre de jours de l'année où il y a au moins un anniversaire à fêter dans une classe prise au hasard. Les calculs nous disent qu'une classe de 36 élèves a 83,2 % de chance d'avoir au moins deux élèves nés le même jour, c'est-à-dire 83,2% de chance de manger seulement 35 fois (ou moins) du gâteau! En complément, il propose d'itérer cent fois cette simulation, ce qui permettra de vérifier ces calculs et même d'obtenir une estimation du nombre de jours moyens où il y a un anniversaire à fêter dans une classe qui est … le suspense est total !

Bonne lecture, bons calculs !

Catherine Labruère Chazal

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 77.

Comment démontrer sans calcul que :
Le triangle de côtés 5, 5, 6 et le triangle de côtés 5, 5, 8 ont la même aire ?

PROBLÈME – 77.

Dans un ensemble à 6 éléments, trouver le nombre maximal de sous-ensembles dont les intersections deux à deux sont non vides.

Solutions du numéro précédent :

JEU – 76.

Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et les 4 opérations, on peut approcher π à $2.\ 10^{-3}$ près par $\pi \approx 3 + \frac{1}{5+4-2} = 3{,}1428\ldots$

Faites de même
en approchant π à $8.\ 10^{-5}$ près avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et les 4 opérations,
en approchant π à $3.\ 10^{-7}$ près avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et les 4 opérations.

Solution :

Je n'ai pas mieux que :

$$3 + \frac{\frac{1}{6}+\frac{2}{5}}{4} = \frac{377}{120} \approx 3{,}146666\ldots \text{ avec un écart de } 7{,}4\ldots\ 10^{-5}$$

et
$$\frac{5\times(8\times9-1)}{(2+3)\times4\times6-7} = \frac{355}{113} \approx 3{,}1415929203\ldots \text{ avec un écart de } 2{,}6\ldots\ 10^{-7}$$

On reconnaît dans la fraction 355 / 113 une réduite du développement de π en fraction continue, bien meilleure que 22 / 7..

PROBLÈME – 76.

Démontrer pour tout x réel l'égalité :

$$(11^x + 111^x)^{10} \times (1001^{10} + 10101^{10})^x = (11^{10} + 111^{10})^x \times (1001^x + 10101^x)^{10}$$

Solution :

Deux identités seront utilisées plusieurs fois :
$1 + x^2 + x^4 = (1 - x + x^2)(1 + x + x^2)$ et $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$.

On a, en utilisant uniquement les règles sur les puissances, les deux identités ci-dessus et la distributivité :

$[(1 + y)^x + (1 + y + y^2)^x]^y \times [(1 + y^3)^y + (1 + y^2 + y^4)^y]^x =$

$[(1 + y)^x + (1 + y + y^2)^x]^y \times [(1 + y)^y(1 - y + y^2)^y + (1 - y + y^2)^y(1 + y + y^2)^y]^x =$

$[(1 + y)^x + (1 + y + y^2)^x]^y \times [(1 - y + y^2)^y((1 + y)^y + (1 + y + y^2)^y)]^x =$

$[(1 + y)^x + (1 + y + y^2)^x]^y \times (1 - y + y^2)^{yx} \times [(1 + y)^y + (1 + y + y^2)^y]^x =$

$[(1 + y)^x + (1 + y + y^2)^x]^y \times (1 - y + y^2)^{xy} \times [(1 + y)^y + (1 + y + y^2)^y]^x =$

$[(1 - y + y^2)^x((1 + y)^x + (1 + y + y^2)^x)]^y \times [(1 + y)^y + (1 + y + y^2)^y]^x =$

$[(1 + y^3)^x + (1 + y^2 + y^4)^x)]^y \times [(1 + y)^y + (1 + y + y^2)^y]^x$

Si on pose $y = 10$, l'égalité entre le premier et le dernier terme ci-dessus donne l'égalité demandée.

Apprentis chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus

(deuxième partie)

Marie-Line GARDES
gardes.marie-line@wanadoo.fr
Doctorante en didactique des mathématiques.
S2HEP, Université Lyon 1, ENS de Lyon
Denis GARDES
denis.gardes@wanadoo.fr
Professeur, lycée Henri Parriat Montceau-les-mines

Résumé : Dans cet article, nous rendons compte d'une expérimentation en classe de terminale scientifique où les élèves ont pratiqué une activité de recherche mathématique. Après présentation du problème et de quelques éléments mathématiques, nous détaillons le dispositif didactique mis en œuvre dans la classe puis nous analysons les travaux de recherche des élèves.

Mots clés : problème de recherche, terminale scientifique, conjecture d'Erdös-Straus, dimension expérimentale.

1. Les séances de production d'affiche et de débat

La cinquième séance a été consacrée à la production, par chaque groupe, de deux documents : une affiche pour présenter les résultats et un document écrit pour exposer les démonstrations. Ces deux productions représentent deux modes de communication dont les objectifs sont différents. L'objectif principal des productions d'affiche est de préparer le débat en dressant la liste des solutions, conjectures et résultats élaborés par les groupes. Elle sera un support pour la présentation orale lors du débat. La rédaction écrite, quant à elle, vise à obliger chaque groupe à un bilan précis de leurs recherches mais également à faire prendre conscience de la nécessité d'une bonne rédaction. Ce travail demande également aux élèves une exigence de démonstration qui leur permet de discuter de la validité de leurs résultats.
La séance suivante a été dédiée au débat en classe entière. Quatre semaines s'étant écoulées entre la séance de production d'affiche et celle du débat, nous avons proposé

aux élèves de reprendre leurs documents (affiche et rédaction de leurs démonstrations) afin de se remémorer leurs travaux. Ils ont ensuite présenté leurs recherches aux autres groupes puis répondu à leurs questions. L'objectif général de cette phase de débat est la communication des résultats en les soumettant au débat dans la classe. Les élèves sont alors amenés à tester la validité de leurs preuves.

2. La séance d'institutionnalisation et de synthèse

Dans un premier temps, nous avons demandé aux élèves de répondre à un questionnaire sur cette expérimentation avec des questions portant sur leur travail, sur le fait que le problème était non résolu, sur l'organisation et sur ce qu'ils avaient appris. Dans un second temps, nous avons travaillé tous ensemble sur le caractère algorithmique du problème qu'ils n'avaient traité que partiellement. Ensuite, nous avons étudié un théorème central de ce problème, le théorème des restes chinois. Enfin, nous leur avons montré les travaux de différents mathématiciens en les mettant en perspective avec leurs travaux.
Dans un premier temps, l'institutionnalisation permet au professeur de reconnaître la valeur des productions des élèves. Dans un second temps, l'institutionnalisation permet au professeur et à l'élève de reconnaître et légitimer les connaissances (mathématiques ou non) mises en jeu dans la situation, même s'ils les voient de façons différentes. Le problème de recherche proposé aux élèves étant non résolu, le premier objectif de la séance de synthèse est d'apporter aux élèves des informations sur l'avancée des travaux de mathématiciens. Le second objectif, important pour nous, est la valorisation de leurs recherches en les mettant en perspective avec les travaux des chercheurs.
Au vu des différents travaux des groupes et du programme de mathématiques de cette classe, nous avons choisi de porter l'institutionnalisation sur deux thèmes[1] : l'aspect algorithmique du problème et le théorème des restes chinois. Ces deux notions ont été plus ou moins repérées dans le travail des élèves. Le groupe 3 a par exemple émis l'idée de faire un algorithme et de le programmer pour représenter leurs différentes décompositions mais ils ne l'ont pas fait en raison *a priori* de leurs manques de connaissances sur l'algorithmique. Cependant ils ont quand même écrit un arbre pour résumer leurs recherches (voir page 28 FdV n°126). Le groupe 2 a utilisé le théorème des restes chinois intuitivement, sans le connaître lorsqu'ils sont passés des cas modulo 5 et 6 aux cas modulo 30 (voir page 25 FdV n°126). De même le groupe 1 a étudié les cas modulo 2, modulo 3 puis modulo 6 (voir page 22 FdV n°126).).
L'algorithmique est au programme de mathématiques des classes de lycées depuis 2009. Ces élèves ont donc suivi un enseignement d'algorithmique depuis la seconde. Cependant nous pouvons remarquer que ces connaissances sont difficilement disponibles pour eux. Cette recherche de problème peut donc être l'occasion de (re)travailler certaines notions d'algorithmique dans une situation où les élèves en éprouvent le besoin eux-mêmes. Concernant le théorème des restes chinois, il n'est pas explicitement au programme d'arithmétique de la spécialité mathématique mais il

[1] Voir les fiches en annexe 4.

repose sur des notions importantes de ce programme : les théorèmes de Gauss et de Bézout. De plus de nombreux exercices proposés à ce niveau utilisent ce théorème. Il est donc intéressant pour eux d'étudier ce théorème et une application.

Quelques mots sur le travail des mathématiciens sur cette conjecture

Erdös publie le problème en 1950 sous le nom de *conjecture d'Erdös et Straus* en précisant que Straus l'a démontrée pour $n < 5000$. Les premiers articles publiés concernant la résolution de ce problème semblent être ceux d'Oblath en 1950 puis de Rosati en 1954. Viennent ensuite les travaux de Bernstein (1962) et de Yamamoto (1964). Mordell fait une synthèse de ces différents articles en 1969 puis d'autres mathématiciens s'y intéressent, notamment Swett en 1999, Schinzel en 2000 ou Mizony en 2010.
Trois résultats résument ces recherches[2] :
Résultat 1 : Pour tout n non congru à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840, l'équation [*] a des solutions polynomiales en n.
Résultat 2 : Pour tout n congru à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840, l'équation [*] n'a pas de solution polynomiale en n.
Résultat 3: Actuellement, la conjecture est prouvée pour $n < 10^{17}$.
Le résultat 1 peut être établi selon deux méthodes, l'une empirique (Oblath), l'autre davantage formelle (Rosati, Yamamoto). La première méthode est explicitée par Oblath dans son article de 1950. Il étudie la conjecture pour les nombres premiers de la forme $24k$ puis de la forme $24 \times 5k$ et de la forme $24\times5\times7k = 840k$. Il remarque alors que pour les nombres de la forme 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, $23^2 + 840k$, il n'a pas de formule polynomiale générale. La seconde méthode, semblable chez Rosati et Yamamoto, consiste à déterminer une condition nécessaire et suffisante d'existence de solution. Ainsi, après avoir remarqué que les solutions ne pouvaient s'exprimer que sous l'une des deux formes paramétriques :

$$na + b + c = 4abcd$$
$$a + nb + nc = 4abcd$$

et en prenant certaines valeurs de a, b, c et d, ils retrouvent le résultat modulo 840. Cette méthode généralise celle de Oblath.
Le second résultat apparaît la première fois dans l'article de Yamamoto (1964) puis est repris par Schinzel (2000) qui en publie un résultat plus général. Ce résultat montre que les solutions, si elles existent pour ces nombres n congrus 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840, ne pourront pas être trouvées grâce à la même méthode, à savoir une méthode polynomiale.
Illustrons ces deux résultats par des exemples.
Exemple 1 : Pour n congru à 2 modulo 3, en posant $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{n-2}{3}$ et $d = 1$, on obtient la solution suivante : $x = \frac{n-2}{3}, y = n - 3, z = \frac{n-2}{3}(n-3)$.

[2] Nous résumons ici les idées des démonstrations, pour plus de détails, consulter Gardes 2009 ou Gardes et Mizony 2012.

D'où la décomposition :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n-2}{3}} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{\frac{n-2}{3}(n-3)}.$$

Exemple 2 : Pour *n* congru à 1 modulo 840, comme 2521 ou 3361, on ne peut pas exprimer a, b et c sous forme de polynôme. Cependant, on peut trouver des décompositions. Par exemple :

$$\frac{4}{2521} = \frac{1}{638} + \frac{1}{55462} + \frac{1}{804199}$$
$$\frac{4}{3361} = \frac{1}{850} + \frac{1}{84025} + \frac{1}{571370}$$

Ainsi on peut trouver une infinité de formules polynomiales mais pas de formules générales pour les nombres de cette forme.
Le résultat 3 résulte de recherches algorithmiques. Yamamoto a démontré la conjecture pour $n < 10^7$ à l'aide d'un ordinateur en 1964 puis Swett en 1999 pour $n < 10^{14}$ et récemment Mizony pour $n < 10^{17}$. L'idée générale sur laquelle repose ces différents algorithmes est la même[3] :

1. diminuer le nombre de classes de nombres à étudier. Par exemple modulo 840, il reste 6 classes ($1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$) soit 0,71 % pour lesquelles il n'y a pas de solutions générales polynomiales. De la même façon, modulo 27720, il ne reste que 96 classes soit 0,34%.
2. étudier plus particulièrement, au cas par cas les classes de nombres restantes. Par exemple trouver une décomposition particulière pour *n* congru à 1 modulo 840 (comme 2521 ou 3361).

Ce bref aperçu des travaux de différents mathématiciens sur la conjecture d'Erdös-Straus met en évidence différentes méthodes de recherche. Ainsi Oblath a *a priori* mené une recherche plutôt empirique alors que Rosati et Yamamoto semblent avoir cherché de manière plus théorique en établissant un résultat général sous forme de condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions. Les dernières recherches et notamment celles de Mizony se caractérisent par leur aspect algorithmique. Cependant une analyse plus fine de leurs articles nous permet de dire que leurs recherches articulent toujours les aspects empiriques ou algorithmiques avec la théorie. La dimension expérimentale a toujours une place et un rôle déterminant dans leurs travaux.
Une mise en perspective des travaux des élèves avec ceux des mathématiciens met en évidence deux similitudes, l'une concernant la démarche de recherche, l'autre les résultats produits. Nous pouvons ainsi observer que les recherches des groupes 1 et 3 s'ancrent davantage dans une recherche de type empirique, voire algorithmique avec l'essai d'éliminer successivement des classes de nombres premiers à étudier, comme ont procédé Oblath, Yamamoto ou Mizony. Au contraire, les travaux du groupe 2 ont

[3] Pour plus de détails sur les algorithmes, consulter Swett ou Mizony.

davantage une vision générale avec l'essai de déterminer une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions, dans la même idée que Rosati, Yamamoto ou Mizony. Concernant les résultats produits, nous en avons repéré, dans les travaux des élèves, qui sont présents dans les articles des chercheurs. Ce sont les premiers résultats établis par les mathématiciens dans leurs recherches, par exemple, la réduction aux nombres premiers, une relation de divisibilité entre n et abc, un résultat pour les nombres pairs, les multiples de 3 et les multiples de 5.

Quelques mots sur les réponses aux questionnaires

Lors de la séance de synthèse, nous avons demandé aux élèves de répondre à un questionnaire sur le travail mené lors de cette expérimentation. Nous proposons ici quelques résultats quant à leurs réponses concernant le fait que le problème soit non résolu puis concernant les apports de ce travail d'une part et leur vision de la recherche d'autre part.

A la question « avez-vous gardé en tête que ce problème était non résolu ou l'avez-vous oublié ? », sept élèves répondent qu'ils ont oublié cet aspect du problème lors de leur recherche et quatre élèves (ceux du groupe 2) répondent qu'ils l'ont toujours gardé en tête, surtout lorsqu'ils ont rencontré des difficultés (« dans les phases de vide »). Cependant deux d'entre eux précisent avoir cherché le problème « comme s'il était résolu, en faisant « abstraction » de son caractère ouvert. Comme en témoigne la réponse ci-dessous d'un élève, deux sentiments se dégagent face au caractère non résolu du problème : une motivation et un découragement possible.

Elle est à la fois stimulante car elle permet de maintenir un faible espoir d'être le premier à prouver ou non la véracité du problème. Elle peut cependant dans une moindre mesure « décourager » les participants dans le sens où même des chercheurs, des professionnels n'en sont pas venus à bout. (élève du groupe 3)

Plusieurs élèves précisent aussi que « c'est réconfortant » de savoir en amont que le problème est non résolu, surtout quand « on ne trouve pas ». Pour ces élèves, savoir que le problème était non résolu n'a donc pas freiné leurs recherches. Pour ceux qui l'ont oubliée, cette information n'a pas eu d'influence sur leur travail et pour les autres, cela leur a permis relativiser leurs résultats et d'étudier « toutes leurs idées ou pistes possibles ». Précisons cependant que ce n'est pas toujours le cas. Pour certains élèves, cela peut véritablement empêcher une recherche sur ce problème s'ils savent qu'il n'a jamais été résolu par la communauté mathématique. Dire ou ne pas dire que le problème est encore ouvert est donc une information à préciser selon le public concerné par la recherche.

Concernant les apports de cette recherche, les élèves sont assez unanimes pour dire qu'ils n'ont pas appris de notions mathématiques nouvelles mais qu'ils ont utilisé, revu et consolidé différentes connaissances telles que les fractions, les congruences et la partie entière. Sur l'activité de recherche en elle-même, ils pensent qu'elle demande de l'organisation, de la patience, une mobilisation de connaissances solides, un esprit inventif et ouvert afin de voir le problème sous différents angles. Un élève précise qu'il a découvert une activité « qui se vit ». Les élèves précisent également que cette expérimentation leur a apporté une nouvelle méthode de travail,

principalement en groupe. Ils se sont rendu compte ainsi de l'importance du raisonnement.
Les réponses concernant leur vision de la recherche mathématique sont assez identiques : cette expérience modifie leur vision générale des mathématiques (intérêt, curiosité) mais aussi celle des mathématiques dans l'enseignement supérieur. En revanche, ils pensent que cela n'aura pas d'influence sur leur pratique des mathématiques dans le cours ordinaire de mathématiques en terminale scientifique.

Conclusion

Dans cet article nous avons rendu compte d'une expérimentation en classe de terminale scientifique où les élèves ont pratiqué une activité de recherche mathématique. Nous voulons déjà préciser que le temps long de la recherche (sept semaines) a été bénéfique sur la recherche des élèves et notamment pour leurs productions. Il n'a pas été un frein pour la dévolution du problème aux élèves qui s'est toujours réalisée au cours des différentes séances. Certains élèves regrettent même un manque de temps pour aller plus loin dans leur recherche sur la conjecture !
Les premières analyses des travaux des élèves (qui demandent à être affinées avec d'autres analyses complémentaires) ont mis en évidence leur richesse quant aux différents processus de recherche mis en œuvre, aux connaissances mobilisées et aux résultats produits. Notre méthodologie de mise en perspective avec les travaux des chercheurs nous a permis de confirmer ces aspects de leur activité mathématique lors d'une recherche. En effet, nous avons repéré des « similitudes » tant dans la démarche de recherche que dans les résultats produits. La phase d'institutionnalisation a été construite à partir de leurs travaux afin de revenir sur deux notions entrevues dans leur recherche et présentes dans les programmes de la classe. Cela a permis de consolider et approfondir leurs connaissances algorithmiques et arithmétiques.
Pour résumer, cette expérimentation a permis aux élèves d'utiliser et consolider un certain nombre de connaissances mathématiques, de pratiquer une « nouvelle méthode de travail » (expression d'un élève) et de découvrir un autre aspect de l'activité mathématique. Le point de vue de ces élèves est encourageant pour les effets et la mise en place de ce genre de travail en classe !

Bibliographie

ALDON, G., CAHUET, P.-Y., DURAND-GUERRIER, V., FRONT, M., KRIEGER, D., MIZONY, M., & TARDY, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* Cédérom INRP.

ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et Situation-problème*, IREM de Lyon, université Claude-Bernard, Lyon 1, 117p.

ARSAC, G. et MANTE, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, Scéren CRDP de Lyon.

BERNSTEIN, L. (1962). Zur Lösung der diophantischen Gleichung m/n = 1/x + 1/y + 1/z, insbesondere im Falle m = 4. *Journ. F. reine angew. Math.*, vol 211, 1-10.

BROUSSEAU, G. (1986) Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. *Thèse d'état*. Université Victor Segalen-Bordeaux II.
ERDÖS, P. (1950). On a diophantine equation. (Hungarian. Russian, English summaries), *Mat. Lapok 1*, 1950, pp. 192-210.
GARDES, ML. (2009). Etude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème ouvert en arithmétique. *Mémoire de master 2 recherche Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences (HPDS)*, soutenu en juin 2009. Université Claude Bernard Lyon 1.
GARDES, ML. (2010). Investigations arithmétiques en terminale: entre essais et conjectures. *Revue Petit x83*, Ed. IREM de Grenoble, 51-78.
GARDES, ML. et MIZONY, M. (2012). La conjecture d'Erdös-Straus: expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM 87* - pp. 79-90.
HOUDEMENT, C. (2012) Démarche expérimentale en résolution de problèmes. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21è siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp.1389-1399). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012
MIZONY, M. (2010) Sur la conjecture d'Erdös-Straus. *Revue Sésamath.* http://revue.sesamath.net/IMG/pdf/articleMichelMizony2.pdf
MORDELL, L.J(1969). *Diophantine equations*, London, New York : Academic press, 1969, chapter 30.
OBLATH, R. (1950). Sur l'équation diophantienne 4/n = 1/x1 + 1/x2 + 1/x3, *Mathesis* 59 ; 308-316.
ROSATI, LA. (1954). Sull'equazione diofantea 4/n = 1/x1 + 1/x2 + 1/x3. *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, serie 3, volume 9, n.1, 59-63.
SCHINZEL, A. (2000). On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx. Comment. Math*. 28 : 187-194, 2000.
SWETT, A. (1999). The Erdös-Strauss Conjecture. Disponible sur Internet : http://math.uindy.edu/swett/esc.htm (consulté le 30 juin 2011).
YAMAMOTO, K. (1965). On the diophantine equation 4/n = 1/x + 1/y + 1/z. *Mem. Fac. Sci. Kyushu University*. Ser A. 19, 37-47.

Annexe 1 : Productions du groupe 1

1.1 Synthèse pour l'affiche.

- Si on trouve pour un nombre, on trouve pour tous ses multiples → recherche limitée aux nombres premiers.
- On utilise l'écriture suivante :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z}$$

On constate que si on prend $y = \text{ent}\left(\frac{n}{4}\right)+1$, on a :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\text{ent}\left(\frac{n}{4}\right)+1} + \frac{x}{n \times \left(\text{ent}\left(\frac{n}{4}\right)+1\right)}$$

On cherche donc à écrire $\frac{x}{n \times (\text{ent}(\frac{n}{4})+1}$ en 2 fraction de la forme $\frac{1}{k}$ → on ne peut avoir que $x = 1$ ou $x = 3$ (sinon n est pair et donc pas premier)

↳ ~~on raisonne modulo 6.~~

- si $x = 1$, alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{\text{ent}(\frac{n}{4})+1} + \frac{1}{2n \times (\text{ent}(\frac{n}{4})+1)} + \frac{1}{2n(\text{ent}(\frac{n}{4})+1)}$
- si $x = 3$, on raisonne modulo 6.

* si $z \equiv 0 (6)$ ou $z \equiv 3 (6)$, $\frac{3}{z} = \frac{3}{3k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$

Donc $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$

$*$ si $z \equiv 2 (6)$ ou $z \equiv 4 (6)$ $\rightarrow$ ~~2k~~ z est divisible par 2 donc $z = 2k$.

$$\frac{3}{z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$$

Donc $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$.

$*$ si $z \equiv 1 (6)$ ou $z \equiv 3 (6)$, nous n'avons pas trouvé de possibilité pour décomposer $\frac{3}{z}$ en 2 fractions de la forme $\frac{1}{k}$.

Autre technique :

~~Conjecture :~~

On a $\frac{4}{n} = \frac{4k}{nk}$

Si on prend le 1er multiple de 8 ou de 12 supérieur à n pour $2k$, on trouve presque toujours une solution de la forme $\frac{2n}{kn} + \frac{x}{kn} + \frac{y}{kn}$ avec x et y des diviseurs de kn.

1.2 Démonstrations

GROUPE 1 = Démonstrations

• Quand on a trouvé la solution pour un nombre n, on a trouvé la solution pour tous ses multiples.

En effet, si $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, pour $n' = kn$, on aura : $\frac{4}{kn} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \times \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\iff \frac{4}{kn} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} + \frac{1}{kc}$$

Donc cette affirmation est vraie.

• Lorsque l'on écrit $\frac{4}{n}$ sous la forme $\frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ avec $y = \text{ent}\left(\frac{n}{4}\right) + 1$ et $z = n \times \left(\text{ent}\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right)$, on a conjecturé grâce à des essais que si $n \equiv 3(4)$, alors $x = 1$ et si $n \equiv 1(4)$, alors $x = 3$, mais nous ne l'avons pas démontré.

• On a cherché les cas pour lesquels $\frac{x}{z}$ peut se décomposer en 2 fractions de numérateur 1.

- si $x = 1$, on a : $\frac{x}{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}$

Ainsi $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}$

– si $x = 3$, on a : $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{z}$.

$*$ si $z \equiv 0\ (3) \iff \begin{cases} z \equiv 0\ (6) \\ \text{ou} \\ z \equiv 3\ (6) \end{cases}$

$$\frac{3}{z} = \frac{3}{3k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k},\ k \in \mathbb{N}$$

Ainsi $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2k}$, avec $k \in \mathbb{N} \,/\, 3k = z$.

$*$ si $z \equiv 2\ (6)$ ou $z \equiv 4\ (6)$, alors z est pair. On pose alors $z = 2q$, $q \in \mathbb{N}$.

On a : $\dfrac{3}{z} = \dfrac{3}{2q} = \dfrac{1}{2q} + \dfrac{2}{2q} = \dfrac{1}{2q} + \dfrac{1}{q}$

Ainsi $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{2q} + \dfrac{1}{q}$.

2 cas restent problématiques : si $x = 3$ et $z \equiv 1\ (6)$
ou $x = 3$ et $z \equiv 5\ (6)$.

Annexe 2 : Productions du groupe 2

1.1Synthèse pour l'affiche

SYNTHÈSE

n a prouvé qu'on peut toujours trouver des entiers a, b, c, tel que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$:

i $n \equiv 0 (2)$ (donc pour tout n, pair)

i $n \equiv 0 (3)$

i $n \equiv 0 (5)$

ous avons gardé la piste du parallélépipède rectangle, de la courbe en 3D et du raisonnement par

'absurde, mais qui n'ont pas abouti.

n a aussi prouvé que la relation est possible pour $abc \equiv 0 (4)$ et $ab + ac + bc \equiv 0 (16)$

et abc n'est pas une puissance de 4).

n a prouvé que $abc = nk$, $k \in \mathbb{Z}$.

ous avons abouti à une relation qui pourrait être utile : $16n^2 = a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2$

1.2Démonstrations

Groupe 2 Preuves :

* $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \iff \dfrac{4}{n} = \dfrac{ab+ac+bc}{abc}$

preuve : $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

$\iff \dfrac{4}{n} = \dfrac{bc}{abc} + \dfrac{ac}{abc} + \dfrac{ab}{abc}$

$\iff \dfrac{4}{n} = \dfrac{ab+ac+bc}{abc}$

* Si $n \wedge 4 = 1$, $abc \equiv 0\ (4)$ et abc ne peut pas être une puissance de 4.

$\dfrac{4}{n} = \dfrac{ab+ac+bc}{abc} \iff 4abc = (ab+ac+bc)n$

On se place dans le cas où $n \wedge 4 = 1$.
$n \mid 4abc$ et $n \wedge 4 = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, $\boxed{n \mid abc}$.
$4 \mid (ab+ac+bc)n$ et $n \wedge 4 = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, $4 \mid (ab+ac+bc)$ donc $ab+ac+bc \equiv 0\ (4)$.

(sans intervertir ab, ac et bc)
$ab+ac+bc \equiv 0\ (4)$ donc il y a quatres possibilités :

$$\left.\begin{array}{l} * \ ab \equiv ac \equiv bc \equiv 0\ (4) \\ * \ ab \equiv ac \equiv 2\ (4) \text{ et } bc \equiv 0\ (4) \\ * \ ab \equiv 1\ (4),\ bc \equiv 3\ (4),\ ac \equiv 0\ (4) \end{array}\right\} \text{par conséquent, } abc \equiv 0\ (4)$$

* $ab \equiv ac \equiv 1\ (4)$ et $bc \equiv 2\ (4)$

On cherche à déterminer à quoi est congru abc modulo 4 dans le dernier cas.

$$\left\{\begin{array}{l} ab \equiv 1\ (4) \\ ac \equiv 1\ (4) \\ bc \equiv 2\ (4) \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{l} abc \equiv c\ (4) \\ abc \equiv b\ (4) \\ abc \equiv 2a\ (4) \end{array}\right. \quad b \equiv c \equiv 2a\ (4)$$

$ab \equiv 1(4) \Longleftrightarrow a \equiv b \equiv 1(4)$ ou $a \equiv b \equiv 3(4)$

$ac \equiv 1(4) \Longleftrightarrow a \equiv c \equiv 1(4)$ ou $a \equiv c \equiv 3(4)$

Or, $c \equiv b \equiv 2a\ (4)$, il est donc impossible que $ab \equiv ac \equiv 1(4)$ et $bc \equiv 2(4)$

Donc dans tous les cas, $\boxed{abc \equiv 0(4)}$

De plus, $n \mid abc$ et $n \wedge 4 = 1$. Ce n'est possible que si abc n'est pas une puissance de 4.

$4(abc) = n(ab + ac + bc)$

or $n \wedge 4 = 1$ d'où d'après le théorème de Gauss

$ab + ac + bc \equiv 0(16)$ car $abc \equiv 0(4)$

$abc \equiv 0(n)$ d'où $abc = nk$ $k \in \mathbb{N}$

$(bc + ac + ab)n = 4nk$

$(bc + ac + ab) = 4k$

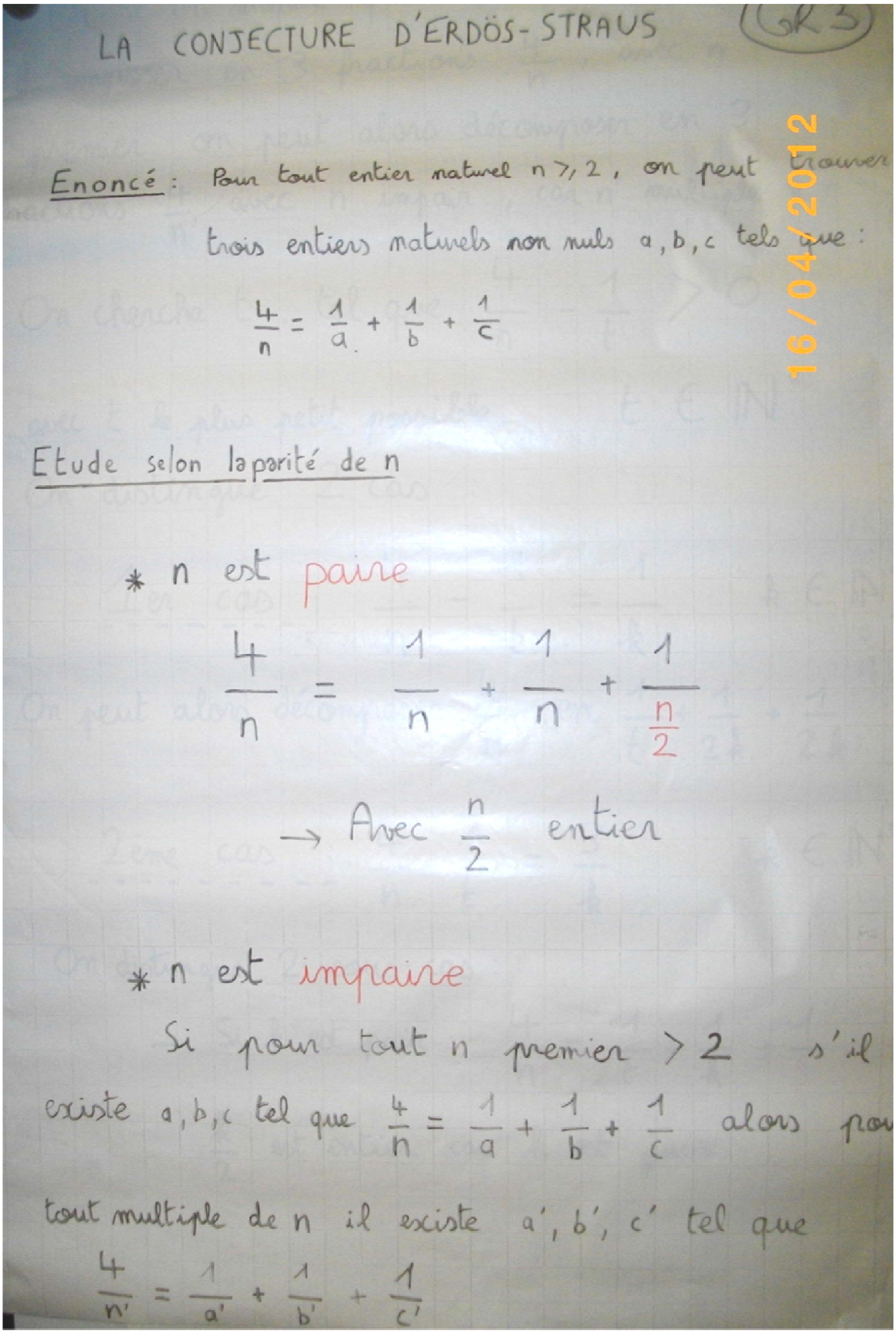
$bc + ac + ab \equiv 0(16)$

$bc + ac + ab = 16k'$

$$\begin{cases} abc = nk \\ ab + bc + ac = 16k' \end{cases}$$

Annexe 3 : Productions du groupe 3

1.1 Affiches



LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS (GR 3)

Enoncé : Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut trouver trois entiers naturels non nuls a, b, c tels que :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Etude selon la parité de n

* n est paire

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$$

$\rightarrow$ Avec $\frac{n}{2}$ entier

* n est impaire

Si pour tout n premier > 2 s'il existe a, b, c tel que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ alors pou[r] tout multiple de n il existe a', b', c' tel que

$$\frac{4}{n'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$$

② GR3

16/04/2012

Or si on montre que l'on peut décomposer en 3 fractions $\frac{4}{n}$, avec n premier on peut alors décomposer en 3 fractions $\frac{4}{n'}$ avec n impair, car n' multiple de n.

On cherche t, tel que $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} > 0$

avec t le plus petit possible. $t \in \mathbb{N}^*$

On distingue 2 cas :

→ 1er cas : $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} = \frac{1}{k}$ $\quad k \in \mathbb{N}^*$

On peut alors décomposer $\frac{4}{n}$ en $\frac{1}{t} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$

→ 2ème cas : $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} = \frac{3}{k}$ $\quad k \in \mathbb{N}^*$

On distingue 2 sous-cas :

– Si k est pair : $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{\frac{k}{2}}$

$\frac{k}{2}$ est entier car k est pair

– Si k est impair : On distingue à nouveau 2 sous-cas.

* Si k possède un diviseur congru à 2 modulo 3 alors : $\frac{4}{n} = \frac{3d-1}{dk'} + \frac{1}{t} + \frac{1}{k\left(\frac{d+1}{3}\right)}$

* Si k n'a pas de diviseur congru à 2 modulo 3 ou 0 modulo 3 alors il est plus difficile de trouver une solution. Il faut alors changer t

1.2 Démonstration

Propriété : Soit (P_n) : $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$ avec $n \equiv 0 (2)$

Initialisation :

On vérifie la propriété (P_n) au rang 1.

$n = 2$.

$$\begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ $2 = 2$ donc (P_n) est vraie au rang 1.

Hypothèse :

On suppose la propriété vraie au rang k.

$(P_n) = \frac{4}{2k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{\frac{2k}{2}}$ car $n = 2 \times k$.

Hérédité :

On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.

$\frac{4}{2k+2} = \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{k+1}$.

On pose $k' = k+1$

donc $\frac{4}{2k'} = \frac{1}{2k'} + \frac{1}{2k'} + \frac{1}{k'}$

L'hérédité est donc prouvée

Alors la propriété (P_n) est vrai pour tout $n \equiv 0 (2)$

En conclusion on a trouvé 3 réels notés a ; b et c qui vérifie $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ pour tout $n \equiv 0 (2)$.

Annexe 4 : Fiche de travail pour la phase d'institutionnalisation

1 Au sujet de l'algorithmique

Le groupe 3 a émis l'idée de faire un algorithme mais ne l'a pas fait. Nous proposons donc de travailler sur cet aspect de la recherche grâce au logiciel ALGOBOX.

Question 1

Lire et décrire ce que fait l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  z EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  SI (n%2==0) ALORS
    DEBUT_SI
    x PREND_LA_VALEUR n
    y PREND_LA_VALEUR n
    z PREND_LA_VALEUR n/2
    AFFICHER x
    AFFICHER y
    AFFICHER z
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "pas de décomposition avec cette formule pour n= "
      AFFICHER n
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Question 2

A partir de vos recherches, essayez de construire un algorithme avec Algobox permettant de décomposer d'autres nombres. Vous préciserez alors les nombres restants, c'est à dire ceux dont vous n'avez pas de décomposition.

2 Au sujet d'un résultat général

Vous avez montré que si l'équation admet des solutions pour n alors elle en admet pour tout multiple de n. Ainsi, grâce au théorème de décomposition en facteurs premiers, la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus peut se réduire au cas $n = p$ premier. Dans cet exercice, nous allons montrer que le problème peut être encore réduit en éliminant d'autres cas.

Question 1

1. Le groupe 1 a écrit que pour $n \equiv 3[4]$, il existait une décomposition. Prouver cette conjecture.
2. Pour quels nombres, modulo 4, la conjecture reste-t-elle à prouver ?

Question 2

A l'aide des résultats du groupe 1, montrer que :

1. Pour $n \equiv 0[6]$ et $n \equiv 3[6]$, la conjecture est vérifiée.
2. Pour $n \equiv 2[6]$ et $n \equiv 4[6]$, la conjecture est vérifiée.

Reste donc les cas $n \equiv 1[6]$ et $n \equiv 5[6]$ à traiter.

On va montrer que les cas $n \equiv 1[4]$ et $n \equiv 1[6]$ ouis $n \equiv 1[4]$ et $n \equiv 5[6]$ reviennent respectivement aux cas $n \equiv 1[12]$ et $n \equiv 5[12]$.

Question 3

Proposition. *Si m et n sont premiers entre eux alors la condition*

$$\begin{cases} a \equiv b[n] \\ a \equiv b[m] \end{cases}$$

est équivalente à la condition $a \equiv b[mn]$.

1. En utilisant le théorème de Gauss, démontrer cette proposition.

Soit m et n premiers entre eux. On cherche toutes les solutions entières de

$$\begin{cases} x \equiv c[m] \\ x \equiv d[n] \end{cases}$$

On considère u et v tels que $um + vn = 1$.

Théorème. *On obtient une solution en prenant $x = cum + dvn$. Toutes les solutions sont alors de la forme $x + kmn$.*

1. Vérifier que $x = cum + dvn$ est une solution.
2. Vérifier que pour tout k entier, $x + kmn$ est une solution.
3. Si x et y sont deux solutions, montrer, en utilisant la proposition ci-dessus que $y = x + kmn$.

Question 4

1. Montrer que le cas $n \equiv 1[6]$ et $n \equiv 1[4]$ revient au cas $n \equiv 1[12]$.
2. Montrer que le cas $n \equiv 5[6]$ et $n \equiv 1[4]$ revient au cas $n \equiv 5[12]$.

Question 5

Le groupe 3 a travaillé de manière semblable mais en utilisant d'autres congruences. Leur recherche montre qu'ils ont une décomposition pour tout n non congru à 1 modulo 8 et 1 modulo 3.
Montrer, grâce au théorème ci-dessus que cela revient à $n \equiv 1[24]$.

Question 6

Un résultat général, énoncé la première fois par Oblath en 1950 et utilisé dans de nombreuses recherches sur la conjecture est le suivant : pour tout n non congrus à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840, la conjecture est vérifiée.

$840 = 24 \times 5 \times 7$.
Modulo 24, nous avons montré qu'il ne restait qu'une classe de nombres pour lesquels la conjecture reste à prouver : $n \equiv 1[24]$.
Modulo 5, on peut trouver des solutions pour $n = 2$ et $n = 3$. Il reste donc deux classes pour lesquelles la conjecture reste à prouver : $n \equiv 1[5]$ et $n \equiv 4[5]$.
Modulo 7, on peut trouver des solutions pour $n = 3$, $n = 5$ et $n = 6$. Il reste trois classes pour lesquelles la conjecture reste à prouver : $n \equiv 1[7], n \equiv 2[7]$ et $n \equiv 4[7]$.
Grâce à ces informations et à l'aide du théorème des restes chinois, démontrer le résultat modulo 840.

Annexe 5 : Questionnaire

Sur l'activité de recherche mathématique

Arsac et Mante dans *Les pratiques du problème ouvert* expliquent que
« Le but de la pratique du problème ouvert est [...] de placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique, c'est à dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur en mathématiques. (p.13) »

1. Selon vous, quel serait le travail d'un chercheur sur la conjecture d'Erdös-Straus ?

2. Pensez-vous que votre travail s'en est approché ? Si oui par quels côtés, si non pourquoi ?

3. Si vous aviez à communiquer à une autre classe cette expérience de recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, que mettriez-vous en avant ?

Sur le fait que ce soit un problème non résolu

Au début des séances, nous vous avions dit que vous alliez travailler sur un problème non résolu.
4. Avez-vous gardé en tête que ce problème était non résolu ou l'avez-vous oublié ?

5. Si vous n'avez pas oublié, à quels moments de votre recherche avez-vous pensé que c'était un problème non résolu ?

6. Comment cela a-t-il influé sur votre recherche ?

Sur l'organisation des séances

Indiquez un indice de pertinence concernant l'organisation des différents temps de recherche.

1. Lors de la première séance, vous avez disposé de 45 min de recherche individuelle. Que pensez-vous de cette phase de travail individuel ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent

Commentaires :

2. Les séances collectives de recherche ont duré 2 heures. Que pensez-vous de ces séances de travail ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent

Commentaires :

3. Vous avez fait une présentation de votre travail aux autres groupes après 2 séances de travail. Que pensez-vous de ce temps de mise en commun ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent

Commentaires :

4. Lors de la séance 4, vous avez rendu deux productions : une affiche et un compte-rendu des démonstrations de vos résultats. Que pensez-vous de ce travail demandé ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent

Commentaires :

5. Lors de la séance 6, nous avons fait un débat sur les différentes productions des groupes. Que pensez-vous de ce débat ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent

Commentaires :

6. Que pensez-vous de la répartition temps de travail individuel / temps de travail collectif ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent

Commentaires :

7. Que pensez-vous de la répartition temps de travail en groupe / temps de mise en commun ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent

Commentaires :

8. Que pensez-vous de la durée globale de ce travail ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent

Commentaires :

Sur votre travail

1. Quelles connaissances mathématiques avez-vous apprises, revues ou consolidées durant ce travail de recherche ?

2. Qu'avez-vous appris sur l'activité de recherche en mathématiques ?

3. Plus généralement, pour vous, quels sont les apports de cette expérience ?

4. Que vous manque-t-il, selon vous, pour avancer dans votre recherche ?

5. Avez-vous pensé au problème entre les séances ? Si oui, pour quelles raisons ?

6. Avez-vous eu envie d'aller sur Internet ? Si oui, pour quelles raisons ?

7. Cette expérience aura-t-elle une influence sur votre manière de faire des mathématiques ?

Probabilités et scrabble.

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

Résumé : Dénombrements, calculs de probabilités et usage des outils statistiques dans les tirages aléatoires de lettres au Scrabble.

Mots clés : Probabilités, Scrabble, statistique inférentielle, intervalles de confiance, simulation.

Rappelons que "Scrabbler" signifie faire un mot avec toutes les lettres du tirage (en principe de 7 lettres).
(Ce verbe figure dans l'ODS* 2012 mais pas dans le petit Larousse 2012).
* ODS = "Officiel du Scrabble" contient tous les mots autorisés avec de courtes définitions.
Il est tentant de se lancer dans le calcul de la probabilité de "scrabbler" à partir d'un tirage aléatoire dans le sac plein. Mais attention aux pièges de l'équiprobabilité !

1 Dénombrement du nombre de tirages de 7 lettres possibles.

Le sac français contient 102 lettres dont : 15 E, 9 A, 8 I, 6 N, 6 O, 6 R, 6 S, 6 T, 6 U, 5 L, 3 D, 3 M, 2 B, 2 C, 2 F, 2 G, 2 H, 2 P, 2 V, 2 jokers (notés *) et 1 J, 1 K, 1 Q, 1 W, 1 X, 1 Y, 1 Z.

On fonctionne donc avec un alphabet de 27 lettres, le joker, considéré comme une lettre (appelé parfois lettre blanche), est la 27ème lettre. On suppose que le tirage est effectué aléatoirement sans remise dans le sac (ou par informatique de plus en plus souvent maintenant) et que tout tirage est accepté.
En effet, dans la plupart des parties, on refuse les tirages qui, par exemple, ne contiennent pas au moins 2 voyelles et au moins 2 consonnes (en tous cas dans les premiers tours).

Combien y-a-t-il de tirages distincts de 7 lettres ? Voilà un bon exercice pour commencer.

Pour l'instant, les 15 E, les 9 A etc. sont indiscernables (comme c'est le cas dans la réalité).

On définit un tirage de type $(x_1 , x_2 , x_3 , ---, x_k)$ comme un ensemble composé d'un mot de x_1 lettres L_1, d'un mot de x_2 lettres L_2, --- Les lettres L_1, L_2 --- étant distinctes et les effectifs étant décroissants au sens large.
Ainsi, {AA, C, D, EEE} est un tirage de type (3, 2, 1, 1).
Dans ces conditions il y a **2 954 029** tirages distincts de 7 lettres.

Pour le démontrer, répartissons les tirages selon leurs types en utilisant le petit tableau ci-dessous :

Effectif de la lettre	Lettres concernées	Nombre de lettres concernées	cumul
15	E	1	1
9	A	1	2
8	I	1	3
6	N O R S T U	6	9 *
5	L	1	10
3	D M	2	12
2	B C F G H P V *	8	20
1	J K Q W X Y Z	7	27

* Ainsi, on lit ci-dessus qu'il y a 9 lettres dont l'effectif est au moins égal à 6.
Si C_n^p est le nombre de combinaisons de p éléments parmi n, voici le décompte :

type	commentaire	exemple	dénombrement
(7)	7 lettres identiques donc 7 E, 7 A ou 7 I	{SSSSSSS}	3
(6, 1)	6 lettres identiques + 1 lettre distincte	{EEEEEE, Z}	9 × (27 – 1) = 234
(5, 2)	5 lettres identiques + 2 lettres identiques distinctes de la première	{PPPPP, SS}	10 × (20 – 1) = 190
(5, 1, 1)	5 lettres identiques + 2 lettres distinctes entre elles et de la première	{UUUUU, C, A}	10 × C_{26}^2 = 3250
(4, 3)	4 lettres identiques + 3 lettres identiques distinctes de la première	{TTTT, DDD}	10 × (12 – 1) = 110
(4, 2, 1)	4 lettres identiques + 2 lettres identiques distinctes de la 1ère + 1 lettre	{AAA, OO, W}	10 × (20 – 1) × (27 – 2) = 4 750
(4, 1, 1, 1)	4 lettres identiques + 3 lettres distinctes entre elles et de la 1ère	{UUUU,*, E, G}	10 × C_{26}^3 = 26 000
(3, 3, 1)	2 fois 3 lettres identiques + 1 lettre distincte	{RRR, SSS, E}	C_{12}^2 × (27 – 2) = 1 650
(3, 2, 2)	3 lettres identiques + 2 fois 2 lettres identiques distinctes des autres	{RRR, **, VV}	12 × C_{19}^2 = 2 052
(3, 2, 1, 1)	3 lettres identiques + 2 lettres identiques + 2 lettres distinctes	{RRR, EE, W, M}	12 × 19 × C_{25}^2 = 68 400
(3, 1, 1, 1, 1)	3 lettres identiques + 4 lettres distinctes entre elles et de la 1ère	{SSS, R, E, Z, A}	12 × C_{26}^4 = 179 400
(2, 2, 2, 1)	3 fois deux lettres identiques + 1 lettre distincte	{MM, BB, EE, Z}	C_{20}^3 × (27 – 3) = 27 360
(2, 2 1, 1, 1)	2 fois deux lettres identiques + 3 lettres distinctes	{MM, BB, P, R, Z}	C_{20}^2 × C_{25}^3 = 437 000
(2, 1, 1, 1, 1, 1)	1 fois deux lettres identiques + 5 lettres distinctes	{CC, B, A, P, R, Z}	20 × C_{26}^5 = 1 315 600
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	7 lettres distinctes	{A, B, C, D, E, F, G}	C_{27}^7 = 888 030

Avec un total de 2 954 029 tirages possibles de 7 lettres.

Si on imposait au moins 1 voyelle et au moins 1 consonne, ce nombre serait de 2 424 847.
Si on imposait au moins 2 voyelles et au moins 2 consonnes, ce nombre serait de 1 489 775.
Mais attention ! **Ces 2 954 029 tirages ne sont pas équiprobables**.

Par exemple, il est évident que le tirage EELRSTT (qui permet de scrabbler LETTRES) est bien plus fréquent que le tirage JKQWXYZ qui ne permet pas de scrabbler grand-chose en dehors de la Pologne.

Un calcul simple $[C_{15}^{2} \times 5 \times 6 \times 6 \times C_{6}^{2}]$ montre, compte tenu des effectifs des lettres, que le tirage EELRSTT est 283500 fois plus fréquent que JKQWXYZ !

Le calcul de la probabilité de scrabbler avec un tirage aléatoire de 7 lettres du sac ne sera donc pas facile, et nous commencerons par examiner une situation plus simple.

2 Probabilité de scrabbler avec un tirage de DEUX lettres.

Dans toute la suite, on appellera "TIRAGE" un mot dont les lettres sont <u>classées par ordre alphabétique</u>.
On dira <u>qu'un tirage est BON s'il permet de scrabbler</u>.

Calculons la probabilité de scrabbler au premier tirage, c'est-à-dire la probabilité qu'une anagramme du tirage soit l'un des 80 mots de deux lettres autorisés au Scrabble en 2013.
Rappelons que les lettres sont classées par ordre alphabétique, que "*" désigne un joker. "?" désignera une lettre quelconque parmi les 27.
Dans ces conditions, il y a 371 tirages (non équiprobables) de 2 lettres se décomposant ainsi :
27 tirages A? (de AA à A*), 26 tirages B? (de BB à B*), 25 tirages C?, 24 tirages D?, 23 tirages E?, 22 tirages F?, 21 tirages G?, 20 tirages H?, 19 tirages I?, 17 tirages J? (de JK à J* car il n'y a pas le tirage JJ), 16 tirages K?, (de Kl à K*), 16 tirages L? (de LL à L*), 15 tirages M?, 14 tirages N?, 13 tirages O?, 12 tirages P?, 10 tirages Q? (de QR à Q*) , 10 tirages R?, 9 tirages S?, 8 tirages T?, 7 tirages U?, 6 tirages V?, 4 tirages W?, 3 tirages X?, 2 tirages Y?, le tirage Z* et le tirage **.

On vérifie facilement en examinant la liste des 80 mots de 2 lettres autorisés que parmi ces 371 tirages, il y en a exactement 88 qui scrabblent, ce sont :
AA, AB, AC, AD, AF, AH, AI, AK, AL, AM, AN, AR, AS, AT, AU, AV, AY, A*, BE, BI, BU, B*, CE, CI, CO, C*, DE, DO, DU, D*,EH, EJ, EL, EM, EN, ER, ES, ET, EU, EV, EX, E*, FI, F*, GO, G*, HI, HO, H*, IL, IM, IN, IP, IR, IS, IX, I*, J*,K*, LU, L*, MO, MU, M*, NO, NU, N*, OR, OS, OT, OU, O*, PU, P*, RU, R*, SU, SV, S*, TU, T*, UV, UW, U*, V*, W*, Y*, **.

Liste des 80 mots de 2 lettres autorisés au Scrabble (en 2013) :

AA AH AI AN AS AU AY BA BÊ BI BU ÇA CE CI DA DE DO DU EH EN ES ET EU EX FA FI GO HA HÉ HI HO IF IL IN JE KA LA LE LI LU MA ME MI MU NA NE NI NÔ NU OC OH OM ON OR OS OU PI PU RA RÉ RI RU SA SE SI SU TA TE TO TU UD UN US UT VA VÉ VS VU WU XI
Remarque : AA, BA, KA, BE, TO, VS, WU sont des mots bien connus des scrabbleurs.

Mais la probabilité de "scrabbler" au premier tirage n'est pas égale à $\frac{88}{371} =$ 0,237 ... car on n'a pas l'équiprobabilité. Pour rectifier le tir, la seule façon est de distinguer (par des indices par exemple) les 15 E, les 9 A, etc. et de pondérer les possibilités des bons tirages.

Ainsi, il y a désormais C_{102}^{2} = 5151 tirages <u>équiprobables</u> parmi lesquels sont bons :
Les C_9^2 = 36 tirages AA (à savoir A_1A_2, A_1A_3, --- A_8A_9), les $9 \times 2 = 18$ tirages AB, (A_1B_1, A_1B_2, --- A_9B_2), ---, les 2 tirages Y* et le tirage ** des deux jokers.
Un décompte manuel est facile (un tableau sur une page suffit) et donne un cumul de 2 362 bons tirages équiprobables.
La probabilité de scrabbler en tirant 2 lettres du sac plein est égale à $\frac{2\,362}{5\,151}$ = 0,458.

J'ai calculé que la probabilité de scrabbler avec un tirage de 3 lettres est environ 0,463. Il faut pour cela connaître la liste des 610 mots de 3 lettres autorisés en 2013 (donnée en annexe) et examiner un par un les 3 457 tirages possibles. Quelques heures suffisent. Le même travail serait difficile manuellement à partir de 4 lettres, à moins de travailler en équipe...

3 Probabilité de scrabbler avec un tirage de SEPT lettres.

En tapant "scrabble" dans le moteur de recherche de Wikipédia, on trouve un long article dans lequel on peut lire :
Au total, dans l'édition 2012 (ODS 6), 386 264 mots sont admis, dont 80 de 2 lettres, 610 de 3 lettres, 2 509 de 4 lettres, 7 645 de 5 lettres, 17 318 de 6 lettres, 31 070 de 7 lettres et 46 329 de 8 lettres.

Pour calculer la probabilité de scrabbler avec un tirage de 7 lettres, on pourrait procéder de la même manière que dans le paragraphe précédent pour un tirage de 2 (ou 3) lettres, mais il faudrait la liste des 31 070 mots de 7 lettres.

Je n'ai pas trouvé cette liste sur Internet, mais même si c'était le cas, encore faudrait-il pouvoir utiliser le fichier dans un programme. Il y a C_{102}^{7} = 18 466 953 120 tirages équiprobables de 7 lettres, et pour un ordinateur actuel, le calcul exact du nombre de bons tirages est parfaitement envisageable.

Ne disposant pas du fichier des 31 070 mots de 7 lettres, on ne peut pas calculer la fréquence exacte des bons tirages, mais on va l'évaluer en utilisant les gros outils de la statistique.

Considérons l'ensemble des 18 466 953 120 tirages équiprobables comme une population au sens statistique.
Un élément quelconque de cette population (un tirage) est bon (SUCCES) ou non. Un tirage sans remise de 7 lettres du sac plein constitue donc une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès est le nombre p qu'on aimerait bien connaître.

Considérons maintenant un échantillon aléatoire de 300 tirages du sac plein (J'ai construit un tel échantillon par informatique pour éviter les biais du tirage manuel, à l'aide d'un programme donné en annexe). Pour chaque tirage de cet échantillon, cherchons sur un site (donné en annexe) s'il existe une anagramme autorisée au Scrabble.
(Lorsqu'il y a un joker c'est pénible car il faut essayer dans le pire des cas les 26 possibilités de remplacement, le logiciel n'admettant pas le joker comme lettre).
J'ai trouvé 71 bons tirages sur les 300 tirages de l'échantillon.

Ce qu'on appelle en statistique inférentielle la fréquence échantillon, c'est-à-dire la proportion de SUCCES dans l'échantillon est ici $f = \frac{71}{300} = 0{,}2366$ ... et la théorie nous dit que, puisque la taille n de l'échantillon est supérieure à 30 (ici $n = 300$), la fréquence théorique F des succès (c'est-à-dire la variable aléatoire égale à la fréquence d'un échantillon aléatoire) suit à peu près la loi normale $N\left(f\ ;\ \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\right)$
soit ici N (0,237 ; 0,0246).
[Sa moyenne est $m = 0{,}237$ et son écart-type est $\sigma = 0{,}0246$].
La théorie nous dit enfin que l'intervalle de confiance de p à 95% est :

$$[m - 1{,}96\,\sigma\ ;\ m + 1{,}96\,\sigma] = [0{,}189\ ;\ 0{,}285].$$

Cela signifie qu'il y a 95% de chances que la probabilité p de scrabbler en tirant 7 lettres (sans remise) du sac plein soit dans l'intervalle [0,189 ; 0,285].

En d'autres termes, il y a **un peu moins d'une chance sur 4 de scrabbler lors du premier tirage au Scrabble**, ce que l'on constate en jouant (en tout cas les très bons joueurs).

Si on élimine les tirages qui ont trop de consonnes ou trop de voyelles, cette probabilité augmente, mais je n'ai pas fait les calculs. Par ailleurs, tous les 4 ans, le vocabulaire autorisé au Scrabble est revu (en ajoutant certains des nouveaux mots qui apparaissent perpétuellement dans tous les pays francophones) et toutes les probabilités calculées dans cet article devront être revues à la hausse prochainement.

4. Annexe.

- De nombreux sites Internet prétendent trouver les anagrammes d'une liste de lettres donnée, mais la plupart utilisent une base de données très insuffisante. J'ai trouvé un seul site (incontournable pour les mots croisés) permettant (entre autres) de trouver absolument toutes les anagrammes d'une liste de lettres. C'est :

http://www.mots-croises.ch/

Dans la page d'accueil, taper "Dictionnaires" puis "Recherche d'anagrammes---"
Dans la case, entrez vos lettres, et vous aurez en quelques secondes, si elles existent, toutes les anagrammes, y compris les noms propres. Comme le vocabulaire utilisé est considérable (plus de 700.000 mots !), pour le problème qui nous intéresse, il faut que vous vérifiiez vous-même (avec le dictionnaire officiel ou avec un logiciel) que ces anagrammes sont bien autorisées au Scrabble. On trouve aussi dans le commerce pour environ 60 euros, une petite "calculette" dédiée au Scrabble qui donne pour chaque liste de lettres entrées les mots autorisés réalisables avec ces lettres.

- Ci-dessous un programme (MAPLE) permettant de simuler n tirages aléatoires sans remise de lm lettres chacun :

```
#maple16-jeux-scrabble-proba-01
 sac := array(1..102) :  a := array(1..102) :
 listemots := NULL :
 lm := 7 : # longueur des mots
sac := [E, E, E, E, E, E, E, E, E, E, E, E, E, E, E, A, A, A, A, A, A, A, A,
     A, I, I, I, I, I, I, I, I, N, N, N, N, N, N, O, O, O, O, O, O, R, R, R, R, R,
     R, S, S, S, S, S, S, T, T, T, T, T, T, U, U, U, U, U, U, L, L, L, L, L, D,
     D, D, M, M, M, B, B, C, C, F, F, G, G, H, H, P, P, V, V, J, K, Q, W,
     X, Y, Z,'jok','jok'] :
n := 100 : #nb de tirages de lm lettres,
for i to n do imot := NULL : for j to 102 do a[j] := j : od:
   for k from 1 to lm do kk := 103 - k :
     h := floor(rand()·1e-12·kk + 1) : imot := imot, a[h] :
    t := a[kk] :  a[kk] := a[h] : a[h] := t :
   od:
   imot := [imot] : mot := NULL : for j to lm do mot := mot,
     sac[imot[j]] : od:
   listemots := listemots, [mot] :
od:
print(listemots) :
```

- ***Liste des 610 mots de 3 lettres (autorisés en 2013)***

AAS	ACE	ADA	ADO	AGA	ÂGE	AGI	AÏD	AIE	AIL	AIR	AIS
AIT	ALE	ALU	ÂME	AMI	ANA	ÂNE	ANI	ANS	API	ARA	ARC
ARE	ARS	ART	ASA	ASE	AUX	AVE	AXA	AXE	AYS	BAC	BAH
BAI	BAL	BAN	BAR	BAS	BÂT	BAU	BÉA	BEC	BÉE	BEL	BEN
BER	BEY	BIC	BIO	BIP	BIS	BIT	BLÉ	BOA	BOB	BOF	BOG
BOL	BON	BOP	BOT	BOX	BOY	BRU	BUE	BUG	BUN	BUS	BUT
BYE	CAB	CAF	CAL	CAP	CAR	CAS	CEP	CES	CET	CHU	CIF
CIL	CIS	CLÉ	COB	COI	COL	COM	CON	COQ	COR	COU	COX
CRÉ	CRI	CRU	CUL	CUT	DAB	DAH	DAL	DAM	DAN	DAO	DAW
DEB	DÉO	DER	DES	DEY	DIA	DIN	DIS	DIT	DIX	DOC	DOL
DOM	DON	DOP	DOS	DOT	DRU	DRY	DUB	DUC	DUE	DUO	DUR
DUS	DUT	DZO	EAU	ÉCO	ÉCU	EGO	ÉLU	ÉMU	ÉON	ÉPI	ÈRE
ERG	ERS	EST	ÊTA	ÉTÉ	EUE	EUH	EUS	EUT	EUX	ÉWÉ	EXO
FAC	FAF	FAN	FAQ	FAR	FAT	FAX	FÉE	FER	FEU	FEZ	FIA
FIC	FIÉ	FIL	FIN	FIS	FIT	FLA	FOB	FOC	FOG	FOI	FOL
FON	FOR	FOU	FOX	FUI	FUN	FUR	FUS	FUT	GAG	GAI	GAL
GAN	GAP	GAY	GAZ	GEL	GÉO	GEX	GIN	GIS	GÎT	GLU	GOI
GON	GOS	GOY	GRÉ	GUÉ	GUI	GUR	GUS	GYM	HAI	HAN	HEM
HEP	HEU	HIA	HIC	HIE	HIP	HIT	HOP	HOT	HOU	HUA	HUB
HUE	HUI	HUM	HUN	IBN	IBO	ICI	IDE	IFS	ÎLE	ILS	ION
IPÉ	IRA	IRE	ISO	IVE	IXA	IXÉ	JAB	JAM	JAN	JAR	JAS
JET	JEU	JOB	JUS	KAN	KAS	KAT	KÉA	KEN	KET	KHI	KID
KIF	KIL	KIP	KIR	KIT	KOB	KOÏ	KOP	KOT	KRU	KSI	KWA
KYU	LAC	LAD	LAI	LAO	LAS	LED	LEI	LEK	LEM	LES	LET
LEU	LEV	LEZ	LIA	LIE	LIN	LIS	LIT	LOB	LOF	LOG	LOI
LOS	LOT	LUE	LUI	LUO	LUS	LUT	LUX	LYS	MAC	MAI	MAL
MAN	MAO	MAS	MAT	MAX	MEC	MÉL	MÉO	MER	MES	MET	MIE
MIL	MIN	MIR	MIS	MIT	MIX	MMM	MOA	MOB	MOI	MOL	MON
MOR	MOS	MOT	MOU	MOX	MUA	MUE	MUG	MUR	MUS	MUT	MYE
NAC	NAN	NAY	NÉE	NEF	NEM	NÉO	NES	NET	NEY	NEZ	NIA
NIB	NID	NIE	NIF	NIM	NIT	NOM	NON	NOS	NUA	NUE	NUI
NUL	NUS	OBA	OBI	ODE	OFF	OHÉ	OHM	OIE	OÏL	OKA	OLA
OLÉ	ONC	ONT	OPE	ÖRE	ORS	OSA	OSE	OST	OTA	OTE	OUD
OUF	OUH	OUI	OUT	OVE	OXO	OYE	PAF	PAL	PAN	PAP	PAR
PAS	PAT	PEC	PEP	PET	PEU	PFF	PHI	PHÔ	PIC	PIE	PIF
PIN	PIS	PIU	PLI	PLU	POP	POT	POU	PRÉ	PRO	PSI	PST
PSY	PUA	PUB	PUE	PUR	PUS	PUT	PUY	QAT	QIN	QUE	QUI
RAB	RAC	RAD	RAI	RAM	RAP	RAS	RAT	RAY	RAZ	RÉA	RÉE
REG	REM	REZ	RHÉ	RHÔ	RIA	RIE	RIF	RIO	RIS	RIT	RIZ
ROB	ROC	ROI	ROM	ROS	ROT	RUA	RUE	RUS	RUT	RUZ	RYE
SAC	SAÏ	SAL	SAR	SAS	SAX	SEC	SEL	SEN	SEP	SES	SET
SIC	SIL	SIR	SIS	SIX	SKA	SKI	SOC	SOI	SOL	SOM	SON
SOT	SOU	SPA	SPI	SUA	SUC	SUD	SUE	SUP	SUR	SUS	SUT
TAC	TAF	TAG	TAN	TAO	TAR	TAS	TAT	TAU	TEC	TEE	TEK
TEL	TEP	TER	TES	TÊT	TEX	THÉ	TIC	TIF	TIN	TIP	TIR
TOC	TOF	TOI	TOM	TON	TOP	TOS	TÔT	TRI	TUA	TUB	TUE
TUF	TUS	TUT	UDS	UNE	UNI	UNS	URE	USA	USE	UTE	VAL
VAN	VAR	VAS	VAU	VER	VÉS	VÊT	VIA	VIE	VIF	VIL	VIN

VIS	VIT	VOL	VOS	VUE	VUS	WAD	WAP	WAX	WEB	WOH	WOK
WON	WUS	YAK	YAM	YEN	YET	YIN	YOD	YUE	ZEC	ZÉE	ZEF
ZEK	ZEN	ZIG	ZIP	ZOB	ZOÉ	ZOO	ZOU	ZUP	ZUT		

Un exemple d'algorithme : le problème des anniversaires.

Jean-Marie Thomassin
jeanmarie.thomassin@laposte.net

Résumé : Présentation d'un algorithme écrit dans le langage Algobox ayant pour but de construire aléatoirement une classe de 36 élèves puis de déterminer si, dans cette classe, plusieurs élèves fêteront leur anniversaire le même jour.

Mots clés : Anniversaire ; algorithme ; Algobox ; classement ; dénombrement ; simulation ; tri ; tableau.

1. Le problème abordé :

Dans un précédent numéro de la Feuille de Vigne, notre collègue Michel Plathey a proposé une étude approfondie du problème des anniversaires. Rappelons qu'il s'agissait d'étudier si, dans une classe de 36 élèves, le fait que deux d'entre eux aient le même jour anniversaire est fréquent ou pas. Après avoir abordé le premier problème des « doubles anniversaires », il étudiait aussi celui des « triples anniversaires », celui des « doubles doubles-anniversaires »... Seule la recherche de l'éventualité d'un « double anniversaire » sera abordée dans ce texte.

L'algorithme proposé ci-dessous en est une illustration simplifiée. On considère une classe de 36 élèves ; on adopte la règle suivante : le jour précis de son anniversaire (dimanche, jour de fête ou de vacance compris), chaque élève amène un gros gâteau que l'on se partagera. La question est alors la suivante : combien de jours de l'année, y aura-t-il du gâteau à manger ?

Pour répondre à cette question, on considère une année ordinaire de 365 jours ; on peut raisonnablement estimer que la répartition des jours anniversaires est uniforme dans l'année ; ainsi, pour chaque élève, le jour anniversaire sera représenté par un nombre entier pris au hasard entre 1 et 365.

Dans ce qui suit, on propose une description des différentes étapes de la construction de l'algorithme proposé ; celui-ci met en œuvre plusieurs notions élémentaires d'algorithmique et peut donc être proposé à des élèves, soit, en une seule fois, comme illustration d'un enchaînement de plusieurs outils, soit en plusieurs étapes construites progressivement ; on peut imaginer aussi des travaux de groupes, chacun devant traiter une partie du programme avec, ensuite, une partie de mise en commun (et donc la définition d'un « cahier des charges » à respecter...).

2. Le langage :

Le langage choisi est Algobox, logiciel gratuit et couramment utilisé dans les classes ; la version utilisée est numérotée : 0.7 ; c'était la plus récente disponible sur Internet lorsque Michel Plathey écrivait son article. Par rapport à la version initiale, des fonctions aléatoires plus sophistiquées et une fonction donnant le minimum dans une liste ont été introduites ; en complément, on peut éventuellement proposer à des élèves motivés de les recréer à partir d'outils plus rustiques.

3. Construction d'une classe :

Pour chaque élève, il nous suffit d'en connaître la date anniversaire, c'est-à-dire le quantième de ce jour dans l'année. Une classe sera donc définie par la donnée des numéros de ces 36 jours de l'année ; ce sera donc une liste de 36 nombres entiers choisis au hasard, avec répétitions possibles, dans l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 365. Mathématiquement, à partir de la classe de 1$^{\text{ère}}$, on peut utiliser la notion de suite. Avec un tableur ou certains langages informatiques, on utilisera un tableau d'une ligne et de 36 colonnes ou d'une colonne et de 36 lignes. Plus simplement, on peut considérer qu'il s'agit de définir une fonction de l'ensemble des entiers allant de 1 à 36 dans l'ensemble des quantièmes de l'année ; il s'agit donc d'une liste (ordonnée) de nombres que l'on numérote. Informatiquement, on utilise donc la notion de liste ; l'objet à construire, appelé dans cet algorithme « classe » est déclaré à la ligne 3 dans la catégorie « liste » et, pour désigner chaque élément de cette liste, on utilise la notation fonctionnelle. On obtient ainsi :

Déclarations à faire :

```
1 VARIABLES
2 I EST_DU_TYPE NOMBRE
3 Classe EST_DU_TYPE LISTE
```

Exemples d'utilisations :
Classe[5] désigne le jour de naissance de l'élève n°5.
Classe[I] désigne le jour de naissance de l'élève n°I.

Pour construire cette liste, il faudra donc procéder successivement à 36 tirages au sort dans l'ensemble des entiers de 1 à 365. La version du langage Algobox utilisée possède une fonction permettant de réaliser simplement ce tirage. En effet, la fonction : ALGOBOX_ALEA_ENT(n,p) renvoie un entier choisi au hasard entre n et p, bornes comprises. On utilise donc la boucle suivante :

```
POUR I ALLANT_DE 1 A 36
DEBUT_POUR
Classe[I] PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,365)
FIN_POUR
```

On peut proposer éventuellement aux élèves les plus motivés de reconstruire cette fonction à partir d'une procédure élémentaire donnant un nombre réel aléatoire choisi dans l'intervalle [0 ; 1[.

Dans une première étape de construction de l'algorithme, à titre de vérification, on fera afficher la classe ainsi construite, on pourra alors observer « à la main » la répartition des jours anniversaires. Une simple boucle suffit :

```
1 POUR I ALLANT_DE 1 A 36
2 DEBUT_POUR
3 AFFICHER Classe[I]
4........AFFICHER " ; "
5 FIN_POUR
```

On obtient alors la liste des 36 nombres choisis au hasard ; ils se présenteront tous sur la même ligne, ce qui est plus facile à lire ; pour pouvoir conserver cet affichage pendant l'élaboration de l'étape suivante et donc vérifier que le tri à réaliser est correct, on placera à la suite de ces instructions, c'est à dire en 6ème ligne de cette liste d'instructions, un affichage « vide » (ou contenant un « blanc ») avec, cochée, l'option « retour à la ligne ».

4. Un tri

On dispose maintenant de la liste des jours où on va fêter un anniversaire ; la deuxième étape consiste à trier cette liste par ordre croissant. On va donc ranger les éléments de cette liste par ordre croissant ; puisque la liste initiale ne sera plus, par la suite, utilisée, on peut utiliser ce même objet informatique pour stocker la liste ordonnée. Le procédé utilisé pour réaliser ce tri est le suivant :

1. Chercher le plus petit élément de la liste
2. Le placer en premier en permutant cet élément avec le premier de la liste
3. Recommencer avec la liste privée de son premier élément.

A chaque étape, le nombre d'éléments à trier diminue d'une unité donc le processus s'arrêtera.

La version utilisée du logiciel Algobox possède deux fonctions très utiles :

- La fonction ALGOBOX_MINIMUM(Liste,I,N) renvoie le plus petit des éléments de la partie de la liste comprise entre le rang n°I et le rang n°N.

- La fonction ALGOBOX_POS_MINIMUM(Liste,I,N) renvoie le rang du nombre obtenu en utilisant la fonction précédente.

Pour réaliser la permutation entre deux nombres d'une même liste, afin de n'en écraser aucun, on est obligé d'utiliser une mémoire auxiliaire, couramment appelée mémoire-tampon, d'où le nom choisi pour cette variable numérique : « Tampon ».

On construit donc la boucle suivante :

```
POUR I ALLANT_DE 1 A 36
DEBUT_POUR
Tampon PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_MINIMUM(Classe,I,36)
J PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_POS_MINIMUM(Classe,I,36)
Classe[J] PREND_LA_VALEUR Classe[I]
Classe[I] PREND_LA_VALEUR Tampon
FIN_POUR
```

Si le logiciel utilisé ne propose pas de fonction permettant de rechercher un minimum dans une liste, il faudra alors la créer. Le principe en est le suivant : on définit un variable « minimum » ; on affecte à priori à cette variable la première valeur de la liste puis on compare avec la valeur suivante : si cette dernière est plus petite, « minimum » prend cette nouvelle valeur sinon elle est inchangée ; ensuite on compare la valeur de « minimum » ainsi obtenue à l'élément suivant de la liste etc. Une boucle est donc nécessaire ; il faudra aussi stocker le rang de cette valeur. Cette construction peut être un excellent exercice.

A titre de contrôle, lors de l'élaboration de l'algorithme, on pourra faire afficher la liste obtenue ; pour cela, il suffit de recopier (avec l'outil « copier-coller ») l'algorithme d'affichage proposé dans le paragraphe précédent ; si on a conservé l'affichage proposé lors de la construction initiale de la première liste, on obtient une vérification rapide. Pour des raisons de clarté, on a fait disparaître ces affichages du programme définitif proposé ci-dessous.

5. Décompte des jours où on mange du gâteau.

Il s'agit ici de compter combien, dans la liste « classe » y a-t-il de nombres différents. Puisque, maintenant, la liste obtenue contient des nombres rangés par ordre croissant, il suffit de comparer chaque nombre à son successeur.
On utilise un « compteur », la variable « NbreJourFete ». On l'initialise à la valeur 1 puis on parcourt le tableau en comparant chaque élément de la liste à son successeur immédiat ; à chaque fois que les deux nombres sont différents, on ajoute 1 au compteur. Classe[I+1] devant rester un élément de la liste, on arrête la boucle lorsque I vaut 35.

« NbreJourFete » donne alors le nombre de jours où on mangera du gâteau ; on peut facilement le comparer à 36, le nombre d'élèves de la classe. On peut faire tourner plusieurs fois le programme et observer les divers résultats obtenus.
36-NbreJourFete est le nombre d'élèves qui apporteront un gâteau alors qu'il y en a déjà à manger. On n'a pas cherché ici à dénombrer les cas où il y aurait exactement deux anniversaires le même jour (respectivement exactement trois...)

6. Compléments :

Dans le programme proposé, on a ajouté une boucle supplémentaire proposant de réaliser 100 fois la simulation et de calculer la moyenne des nombres de jours de fête obtenu pour ces 100 simulations.

7. L'algorithme complet :

ClasseNombrJourFeteRepetition100fois

Cet algorithme détermine les âges des 36 élèves de la classe puis range ces âges par ordre croissant. IL donne ensuite le nombre de jours où il y aura du gâteau à manger.
Il répète 100 fois le processus et calcule la moyenne.

```
VARIABLES
I EST_DU_TYPE NOMBRE
Classe EST_DU_TYPE LISTE
Tampon EST_DU_TYPE NOMBRE
J EST_DU_TYPE NOMBRE
RangMin EST_DU_TYPE NOMBRE
NbreJourFete EST_DU_TYPE NOMBRE
NbANMultiple EST_DU_TYPE NOMBRE
CumulNBjourFete EST_DU_TYPE NOMBRE
CumulNbmultiple EST_DU_TYPE NOMBRE
MoyenneNbjourFete EST_DU_TYPE NOMBRE
MoyenneNbMultiple EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
CumulNBjourFete PREND_LA_VALEUR 0
CumulNbmultiple PREND_LA_VALEUR 0
POUR k ALLANT_DE 1 A 100
DEBUT_POUR
POUR I ALLANT_DE 1 A 36
DEBUT_POUR
Classe[I] PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,365)
FIN_POUR
```

```
POUR I ALLANT_DE 1 A 36
DEBUT_POUR
Tampon PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_MINIMUM(Classe,I,36)
J PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_POS_MINIMUM(Classe,I,36)
Classe[J] PREND_LA_VALEUR Classe[I]
Classe[I] PREND_LA_VALEUR Tampon
FIN_POUR
NbreJourFete PREND_LA_VALEUR 1
POUR I ALLANT_DE 1 A 35
DEBUT_POUR
SI (Classe[I]!=Classe[I+1]) ALORS
DEBUT_SI
NbreJourFete PREND_LA_VALEUR NbreJourFete+1
FIN_SI
FIN_POUR
AFFICHER " "
AFFICHER "Le nombre de jours où on mangera du gâteau d'anniversaire est : "
AFFICHER NbreJourFete
AFFICHER "Le nombre d'èlèves amenant du gâteau lorsqu'il y en a déjà à manger est : "
NbANMultiple PREND_LA_VALEUR 36-NbreJourFete
AFFICHER NbANMultiple
CumulNBjourFete PREND_LA_VALEUR CumulNBjourFete+NbreJourFete
CumulNbmultiple PREND_LA_VALEUR CumulNbmultiple+NbANMultiple

FIN_POUR
MoyenneNbjourFete PREND_LA_VALEUR CumulNBjourFete/100
MoyenneNbMultiple PREND_LA_VALEUR CumulNbmultiple/100
AFFICHER " "
AFFICHER "Nombre moyen de jours de fête : "
AFFICHER MoyenneNbjourFete
AFFICHER "Moyenne Nombre jours Fêtes multiples : "
AFFICHER MoyenneNbMultiple

FIN_ALGORITHME
```

MISE EN PAGE :
Céline PETITJEAN

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Marie-Line GARDES
Denis GARDES
Michel LAFOND
Marie-Noëlle RACINE
Michel BRIDENNE
Catherine LABRUERE CHAZAL
Jean-Marie THOMASSIN

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 205 – 1er semestre 2013

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://math.u-bourgogne.fr/IREM