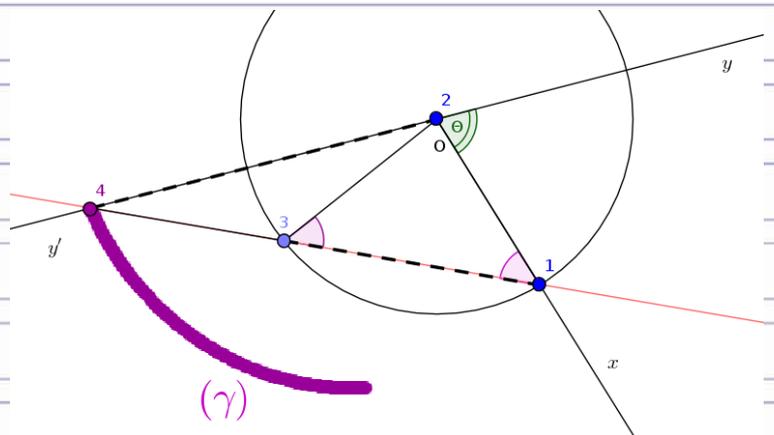


Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ *Cordes à nœuds*
- ✓ *Un sujet d'actualités (récurrent) : le calcul des taxes foncières*
- ✓ *L'énigme du type 14*
- ✓ *En mémoire d'Archimède*



© *Irem de Dijon – 2013*

Éditorial

Ce que vous trouverez, dans cette feuille de vigne, du moins, ce que moi j'y ai trouvé :

Un poète de l'alpha à l'oméga vous conduira en passant par lui. Au fait, l'antidote au fait d'aller de mal en pis c'est le « e » de l'espoir, de l'espérance, qui s'allie à l'imaginaire pur pour en neutraliser le poison et conduire à l'unité parfaite. Si vous me permettez de lui offrir, en votre nom à tous, un bouquet ce sera bien sûr de digitales pourpres qu'il sera.

Michel Lafond vous y propose un pré-lemme des mariages multiples, avec la bague au doigt en prélude ou préliminaire à ces trop belles démonstrations de joie qui parfois ne mènent à rien pour ne pas dire ne marchent pas. Et si cela vous crée problème n'oubliez pas qu'ici ce n'est que jeux et moi qui interprète.

A propos de mariage, et de nombres autres que ceux qui font tourner en rond, de taxes foncières à la clef de vos appartements, et de services fiscaux qui ne rasent pas gratis mais toujours de près et sans prêt aucun, JM Thomassin me donne l'occasion de bénir mon épouse comptable et enseignante de surcroît qui, oh quelle chance inestimable ai-je, me dispense, de m'occuper de ces choses-là. Je l'en remercie de me faire toucher du doigt cette jungle terrible pire que celle d'Amazonia dont par elle je suis protégé.

Le même Michel Lafond vous invite à participer à la recherche du quinzième élément. Pour l'heure, et comme pour vous allécher, partant d'un icône d'amour et de paix il met à nu le quatorzième, du tout dernier cri, dont il vous fait, pour Noël, cadeau en sus des treize autres. Et c'est au travers du Judas de la porte qu'il vous invite à regarder cet effeuillage qui d'étape en

étape, vous dévoile tout de a,b,c,d,e,O,P,Q,R,S jusqu'à ce que l'affaire soit close.

Enfin, vous y apprendrez à ne jamais trop visser la vis aux garçons ni trop serrer le ruban (de la bourse) aux filles, au risque de figer en leur esprit les figures, et de tuer leur imagination en brisant ainsi leurs aspirations à plus d'invention. Car c'est bien en laissant coulisser, qui les tringles des mécanos, qui les aiguilles à tricoter, que vous leur permettrez de découvrir que les mathématiciens ne se contentent pas d'aligner des items à la queue leu leu, le long d'une seule ligne rigide et dogmatique. Mais que c'est en s'échappant vers d'autres cieux qu'ils réussissent à couper les angles en trois, dessiner des pentagones et donc pas simplement à couper les cheveux en quatre comme il leur est souvent reproché. Et que diantre, avec un peu de poésie, une lettre changée, et à quelque permutation près, les cordes à nœuds donneront les cornes à bœufs (ou à deux), les aiguilles à tricoter, des trilles d'aigrettes et les boîtes de mecano, mes boîtes de cadeaux, bien sûr de Noël !

Je dirai bien ce n'est qu'un au revoir, mais la retraite m'appelle et je ne sais encore vers quels cieux. Ce sera donc mon dernier édito. C'est peut-être pour cela que j'ai pu me permettre en m'amusant, quelques impertinences, dont je sais que vous saurez m'absoudre.

Bon Noël à Vous Tous, et Bonne Année : B.A, comme certains l'on tagué sur mon carrosse.

Patrick GABRIEL ex directeur de l'IREM de Bourgogne et retraité en instance.

Sommaire

✓ Jeux et Problèmes	1
---------------------	---

Articles

✓ Cordes à nœuds	<i>Henry PLANE</i>	3
✓ Un sujet d'actualité (récurrent) : le calcul des taxes foncières	<i>Jean-Marie THOMASSIN</i>	13
✓ L'énigme du type 14	<i>Michel LAFOND</i>	25
✓ En mémoire d'Archimède	<i>David TAINURIER</i>	33

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 79.

Combien y a-t-il de façons de mettre b bagues à d doigts ?
Les bagues sont toutes distinctes, et à chaque doigt, l'ordre des bagues doit être considéré.

PROBLÈME – 79.

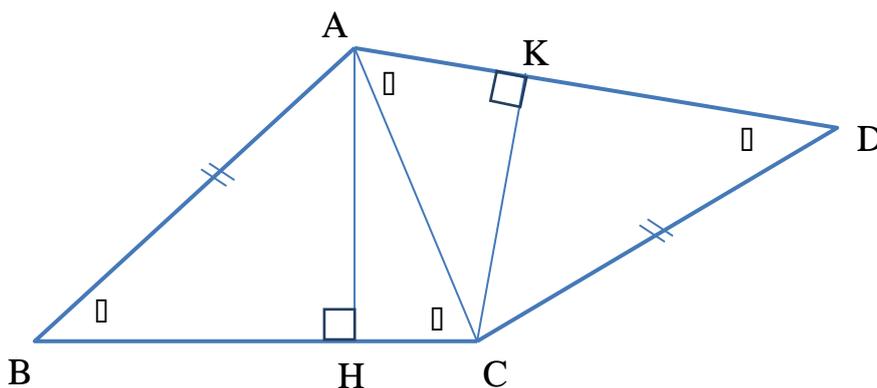
Soit $x = \frac{180\pi}{180+\pi}$. Démontrer que $\sin(x \text{ degrés}) = \sin(x \text{ radians})$.

Solutions du numéro précédent.

JEU – 78.

Soit le "théorème" : un quadrilatère convexe qui a deux côtés opposés égaux et deux angles opposés égaux est un parallélogramme.

Démonstration :



Par hypothèse : $AB = CD$ et les angles $[\alpha]$ en B et D sont égaux.
Projetons A sur BC et C sur AD [figure].
Les triangles ABH et CDK ont ce qu'il faut pour être égaux.
Donc $AH = CK$ et $HB = KD$.

Les triangles AHC et CKA sont égaux. [Ils sont rectangles avec 2 côtés resp. égaux].

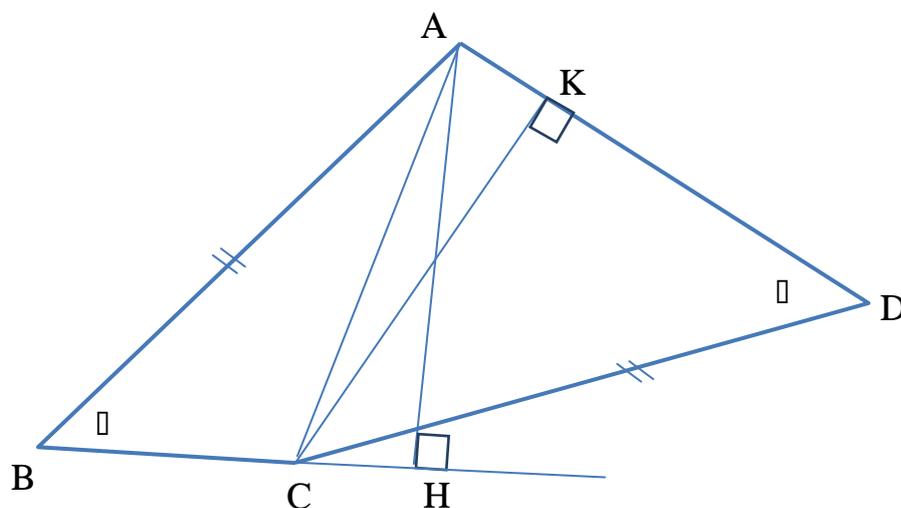
Donc $CH = AK$. De plus les angles $[\beta]$ sur la figure sont égaux ce qui entraîne le parallélisme de AD et BC.

Comme $AD = AK + KD = CH + HB = CB$, AD et BC sont parallèles et égaux. CQFD.

Solution :

Le "théorème" précédent est faux. Et comme dans presque toutes les "fausses démonstrations géométriques", l'explication est dans la figure (fausse).

Si on fait une figure exacte qui vérifie les hypothèses, on a par exemple :



Tout va bien dans la démonstration de l'énoncé sauf que l'égalité des angles $[\beta]$ n'entraîne plus le parallélisme de AD et BC. De plus l'égalité $CH + HB = CB$ ne fonctionne plus.

PROBLÈME – 78.

Sachant que les nombre réels a et b vérifient $2^a = 3$ et $3^b = 5$, comparer a et b sans calculette ni table d'aucunes sortes.

En fait, on peut le faire mentalement sans être calculateur prodige.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad 2^{1,5} &= 2\sqrt{2} < 3 = 2^a & \text{ donc } 1,5 < a. & \quad [2\sqrt{2} < 3 \text{ car } 8 < 9] \\ 3^{1,5} &= 3\sqrt{3} > 5 = 3^b & \text{ donc } b < 1,5. & \quad [3\sqrt{3} > 5 \text{ car } 27 > 25] \end{aligned}$$

Par conséquent $b < 1,5 < a$.

Cordes à nœuds

Henry Plane, auteur

Julien Lyotard, illustrateur

Mots clés : corde à nœuds ; triangle équilatéral ; losange ; carré ; triangle rectangle ; trisection d'un angle ; limaçon de Pascal ; milieu ; parallélogramme ; décagone régulier.

Résumé : cet article montre comment des cordes à nœuds permettent de faire apparaître des angles ou des polygones particuliers, de trisecter un angle, mais aussi fait le lien avec un jeu de meccano ou des aiguilles à tricoter.

Et d'abord, la plus célèbre : la corde à treize nœuds. Treize nœuds régulièrement espacés qui déterminent ainsi 12 intervalles égaux.

Tous les ouvrages sur les vieux métiers en parlent, sa trace figure sur les murs de vieilles églises. En effet, si on dispose ces 12 longueurs pour former un triangle dont les côtés ont pour mesure 3, 4 et 5 de ces segments égaux, ce triangle est rectangle (figure 1). On avait ainsi un angle droit ; il y avait là un moyen pour charpentier ou tailleur de pierres du moyen-âge de s'assurer que son travail l'était également.

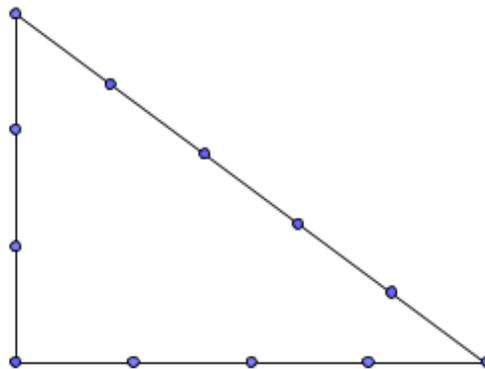


Figure 1

Mais, avec moins de nœuds réguliers, d'autres cordes ont mérité attention.

➤ Avec 4 nœuds, soit 3 segments égaux, on forme d'abord un triangle équilatéral, polygone à la fois équilatéral et équiangle (figure 2). Un angle de $\pi/3$ peut toujours être utile, mais nous allons trouver là le problème de la trisection de l'angle.

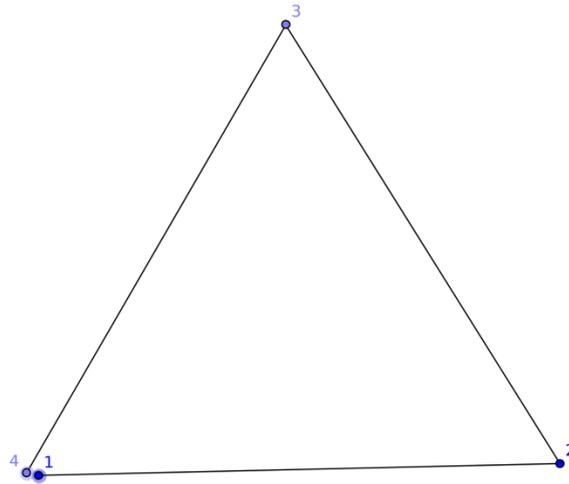


Figure 2

Soit un angle \widehat{xOy} (figure 3).

(Ox') opposée à (Ox) .

On pose le 2^e nœud en O et le 1^{er} sur Oy . On cherche alors à poser le 4^e nœud sur Ox' et à aligner les nœuds 1, 3 et 4 (une règle peut être utile).

Soit a la mesure de $\widehat{243}$.

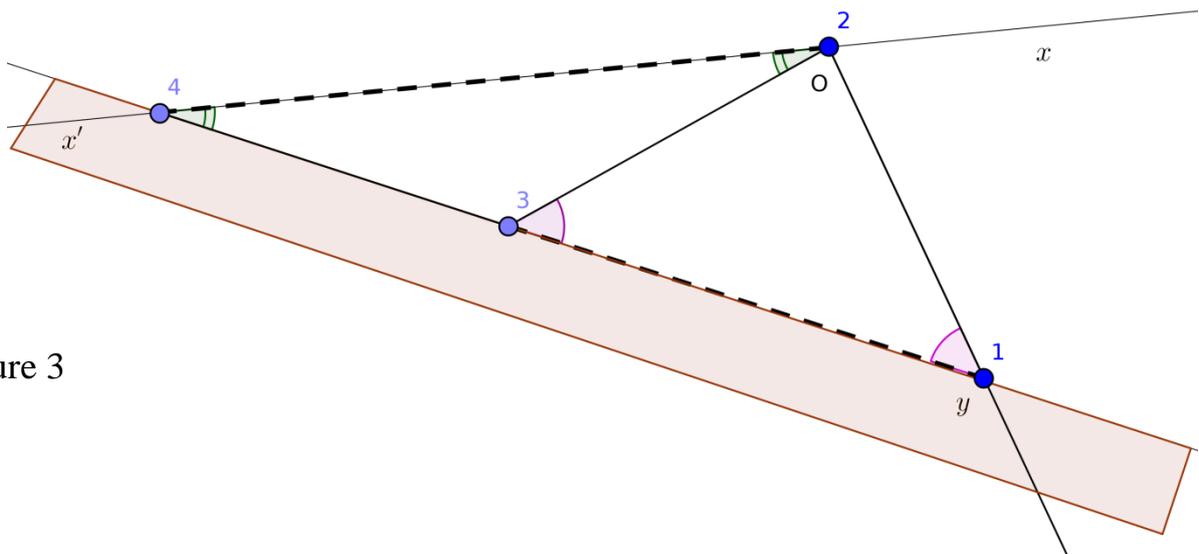


Figure 3

Il vient :

$$\text{Si } \widehat{423} = a$$

$$\widehat{231} = \widehat{423} + \widehat{243} = 2a$$

$$\widehat{213} = \widehat{231} = 2a$$

$$\widehat{xOy} = \widehat{241} + \widehat{214}$$

$$= a + 2a = 3a$$

On a, au 4^e nœud, le tiers de l'angle \widehat{xOy} (après avoir tracé $[Ox')$).

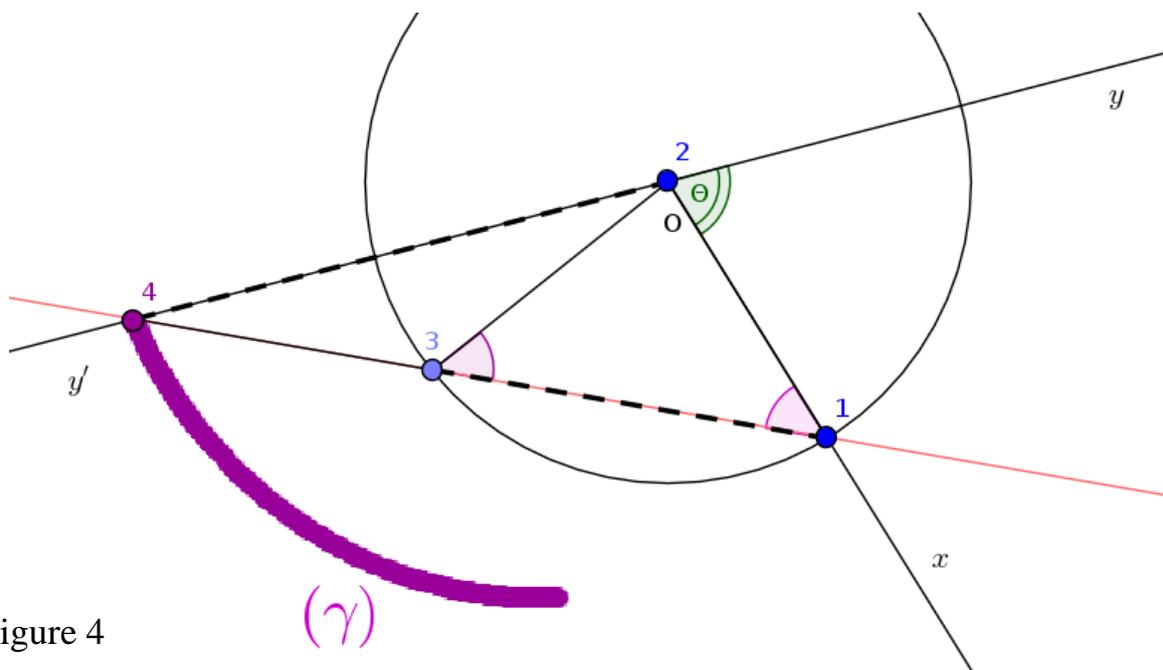


Figure 4

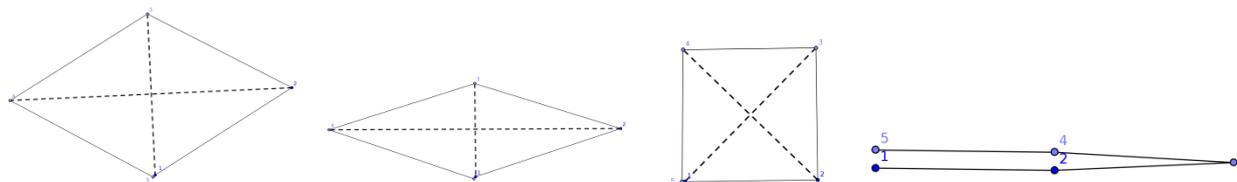
Ainsi lorsque l'angle de mesure Θ , représenté par \widehat{xOy} , varie (Ox) restant fixe, ($y'Oy$) pivote autour de O , le point 3 décrit le cercle de centre 2 et de rayon $[2,1]$ constant. Le point 4 décrit une courbe (γ) obtenue en prolongeant la corde $[1,3]$ du cercle d'une longueur $(3,4)$ égale au rayon de celui-ci. (γ) ne dépend que du cercle et du point 1.

Cette situation n'a pas échappé, semble-t-il, à Étienne Pascal, le père de Blaise. La seule connaissance de (γ) permet d'obtenir en 4 un angle de mesure $\frac{\Theta}{3}$ à partir de \widehat{xOy} convenablement placé.

C'est Roberval qui donna à (γ) le nom de *Limaçon de Pascal*. Cette courbe, conchoïde de cercle, se révélera par la suite également podaire et épicycloïde du cercle. Cela méritait de s'y arrêter...

➤ Avec 4 segments, donc 5 nœuds équidistants.

Si on réunit les deux extrêmes 1 et 5 en tendant le tout, il vient toujours un losange, polygone équilatéral, mais pas toujours équiangle, de périmètre constant mais d'aire variable...



biéquilatéral

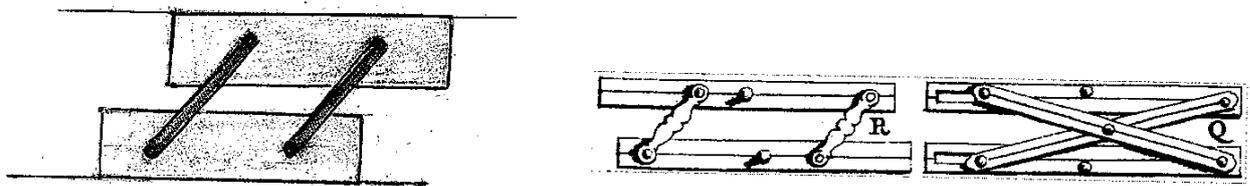
Carré, équiangle

Figures 5

Mais, toujours pour le géomètre, les diagonales médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles opposés. Tout cela bien utile pour obtenir le milieu d'un segment ou la moitié d'un angle et des droites orthogonales...
 Il n'y a pas que lui pour s'en être servi. Et puis il y a deux couples de droites parallèles.

Sur ce dernier point, il semble que les quatre morceaux de corde furent assez tôt remplacés par quatre baguettes dont les points d'articulation formaient le losange précédent. Ce fut l'outil qui figurait dans la besace de tout dessinateur, mais qui n'a pas laissé de nom.

Figures 6

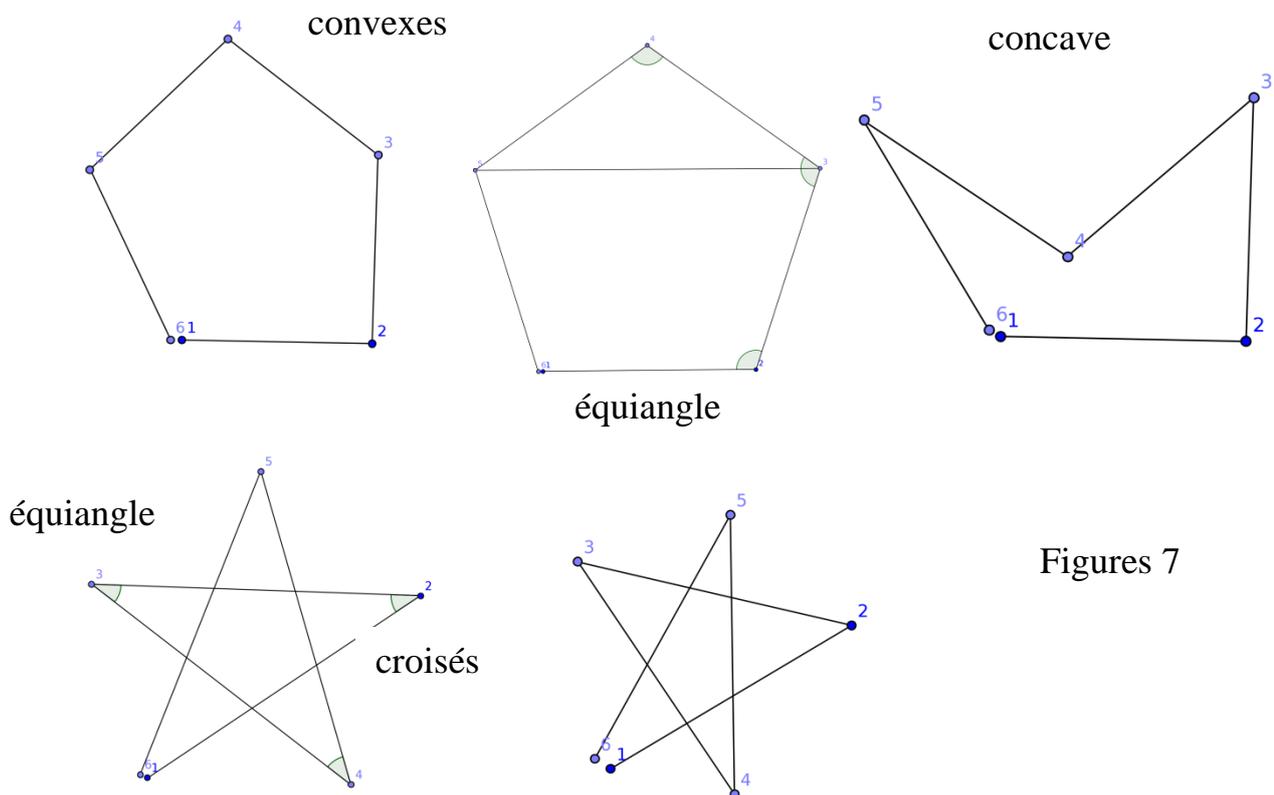


Modèles XVIII^e siècle

On ne sait quand ce « parallélogramme à parallèles » est apparu.

➤ Avec 5 segments égaux

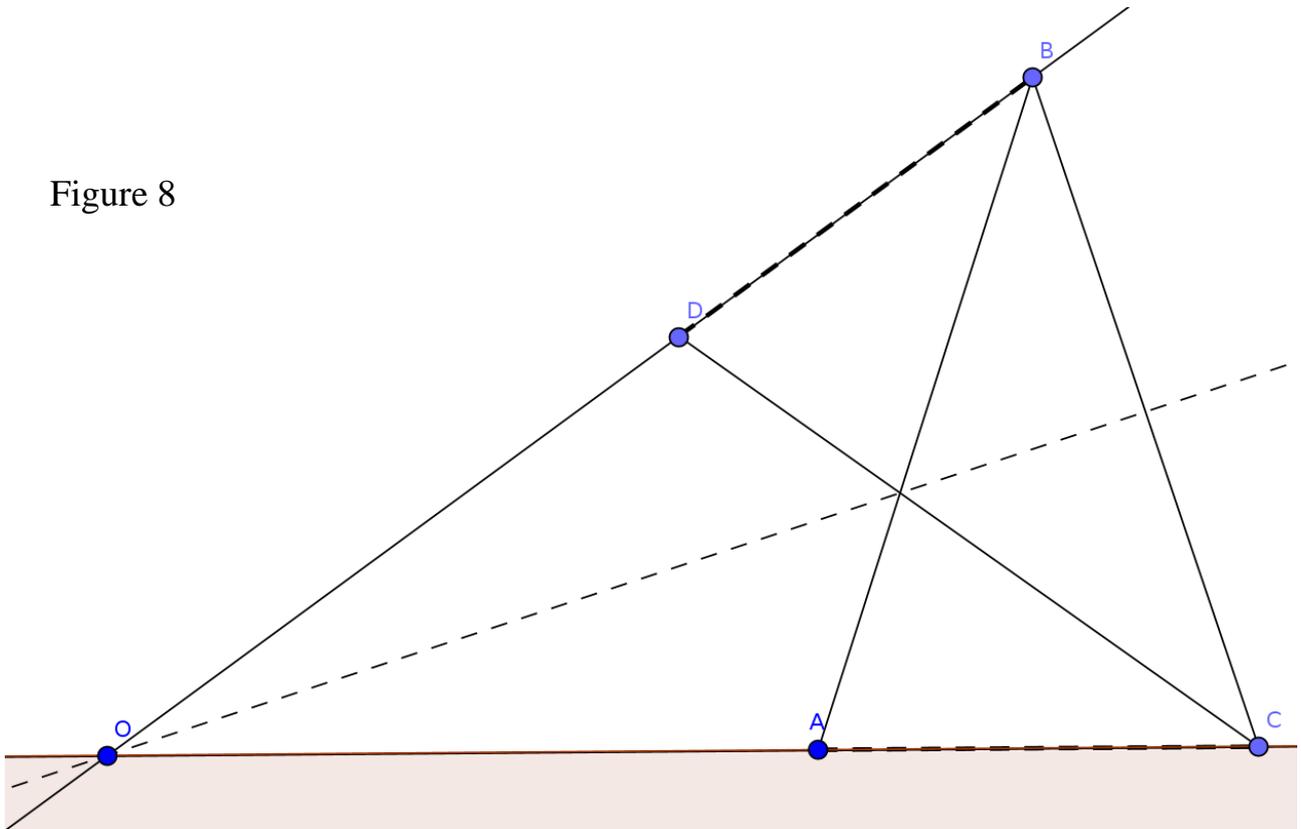
Même si on réunit les extrêmes, la variété des types de figures augmente nettement.



Figures 7

Dans ce dernier type, une figure attire notre attention, elle prolonge une observation déjà faite.

Figure 8



$OA=AB=BC=CD=DO$ avec O, A et C alignés et dans cet ordre d'une part, et O, D et B également alignés et dans cet ordre (une règle facilite l'opération).

On constate une symétrie de la figure par rapport à la médiatrice de $[BC]$. Que peut-on y lire ?

Triangle ODC isocèle, si $\widehat{COD} = \theta$:

$$\widehat{DCO} = \theta \text{ et } \widehat{CDB} = \widehat{COD} + \widehat{OCD} = 2\theta$$

Triangle BCD isocèle

$$\widehat{DBC} = \widehat{CDB} = 2\theta$$

Dans le triangle BOC : $\pi = \widehat{COB} + \widehat{OBC} + \widehat{BCO} = \theta + 2\theta + 2\theta = 5\theta$

L'angle en O a pour mesure $\frac{\pi}{5}$ donc BC est le côté du décagone régulier

inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $OC = \rho$.

Qui plus est, les triangles isocèles BOC et ABC sont semblables :

$$\frac{BC}{OB} = \frac{AC}{BC}, \text{ et } AC = OC - OA$$

En prenant [BC] comme unité de longueur il vient :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\rho-1}{1} \quad \text{ou} \quad \rho^{-1} = \rho - 1$$

C'est la fameuse relation définissant le « nombre d'or », donc $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Si C_{10} est le côté d'un décagone régulier, celui-ci est inscriptible dans un cercle de rayon $\frac{1+\sqrt{5}}{2} C_{10}$.

Et la « corde à 6 nœuds » permettait la construction.

N'en restons pas là.

Traçons le cercle de centre A et passant par O et B. (Tracer des cercles avec des cordes pour rayon, ce ne sont pas les géomètres qui s'y refuseront.)

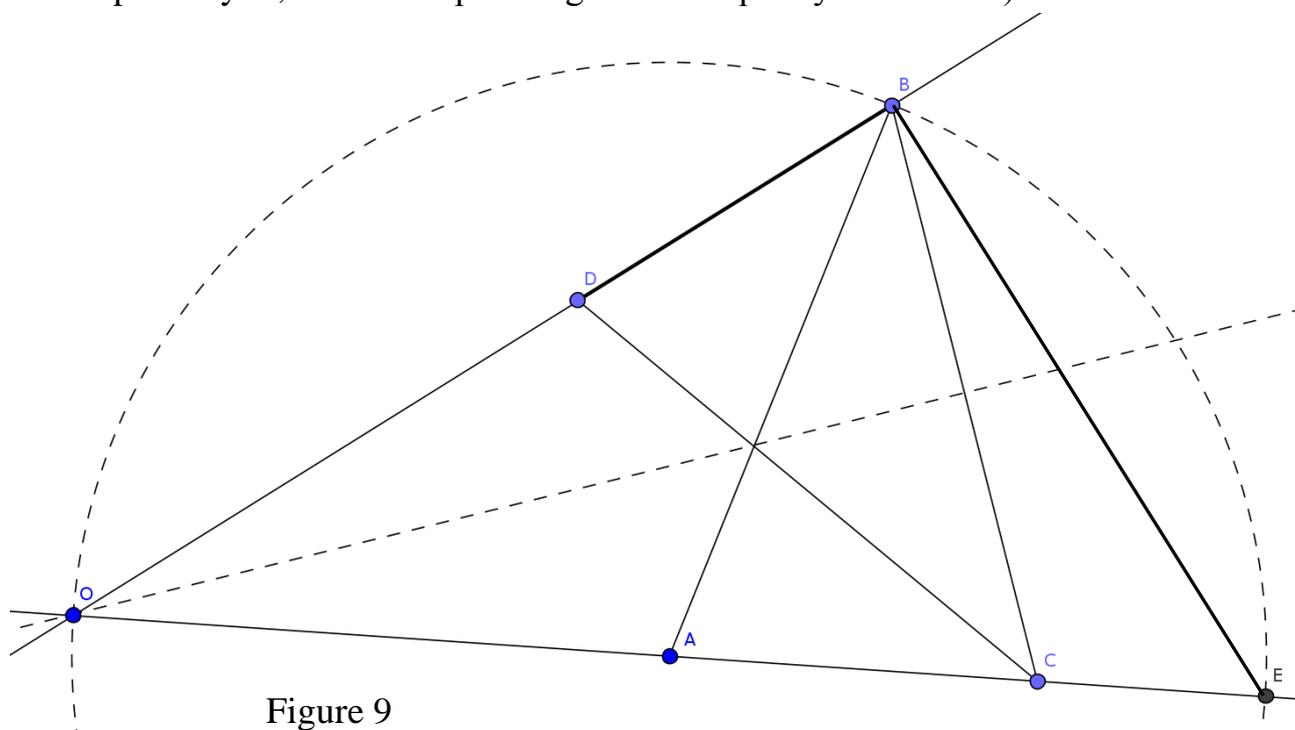


Figure 9

Ce cercle recoupe (OC) en E ; le triangle ABE est isocèle et

$$\widehat{BAE} = 2 \times \widehat{BOC} = 2 \times \left(\frac{\pi}{5}\right)$$

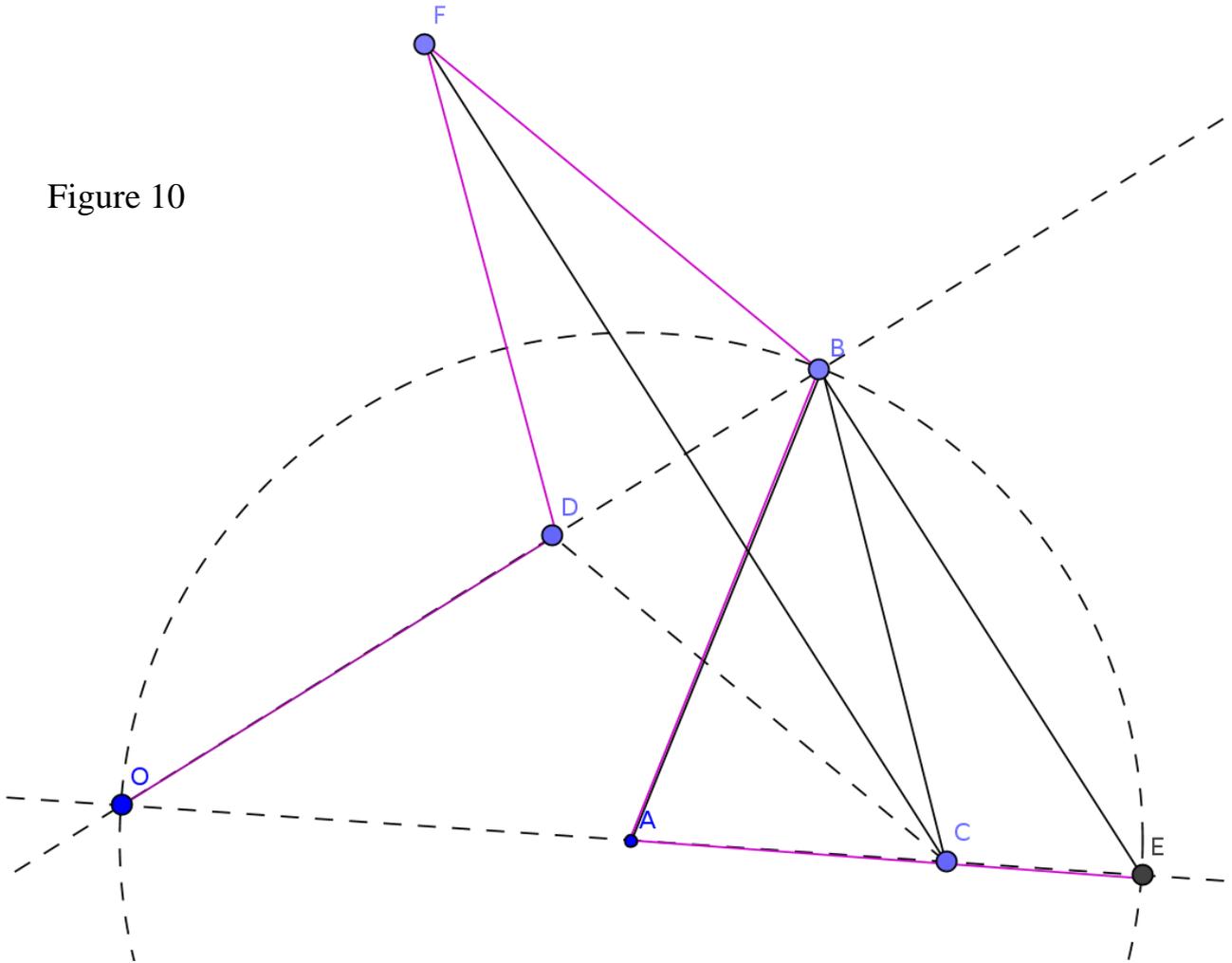
$\frac{2\pi}{5}$ est la mesure de l'angle au centre défini par le côté du pentagone régulier inscrit.

BE est donc le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre A.

Remarques. 1) Les points O, A, B, C, D étant marqués (figure 10), on a fait pivoter le segment [OA] en [AE] (demi-tour) et si on fait pivoter le couple de segments [BC], [CD] symétrie autour de (BD), on a un nouveau continu de la corde, à savoir EABFDO, avec sommets remarquables.

Dans le cercle de centre O, on a EB côté du décagone régulier inscrit et CF côté du pentagone régulier inscrit.

Figure 10



2) Pour le calcul de BE, on n'oubliera pas que \widehat{OBE} est droit (OE diamètre)

$$BE^2 = OE^2 - OB^2 \quad BE^2 = 2^2 - \rho^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{On notera : } AE = 1 \quad ; \quad BE = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

- Cette construction d'un angle de $\frac{\pi}{5}$ fournit-elle une voie d'approche d'angles parties entière de π ?

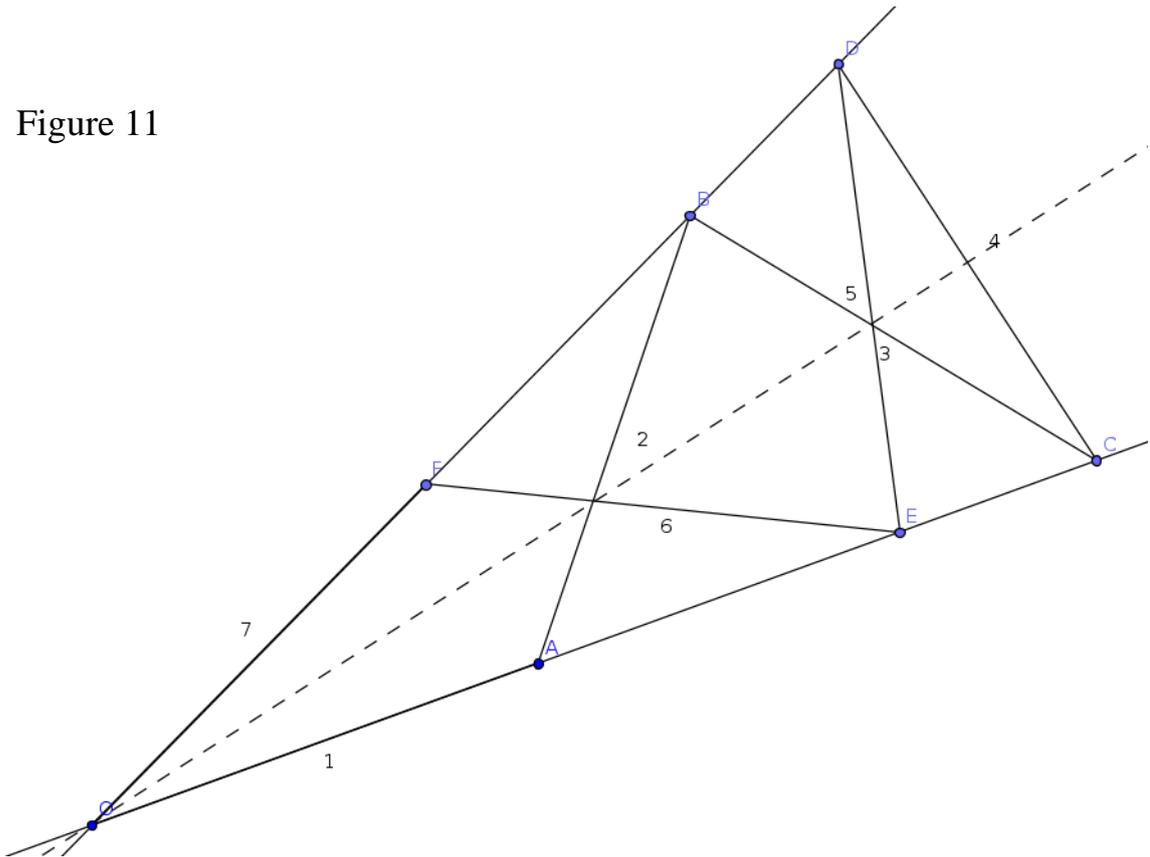
- Ne parlons pas de $\frac{\pi}{6}$ et l'hexagone régulier inscrit. Toutes les rosaces en dessins ou d'architectures sont là pour témoigner.

- Mais $\frac{\pi}{7}$? avec 7 segments égaux ?

Peut-on réaliser la figure suivante ?

$$OA=AB=BC=CD=DE=EF=FO$$

Figure 11



Bien sûr, symétrie par rapport à la médiatrice de [CD], le segment médian ; il faut l'alignement des nœuds O, A, E et C d'une part, O, F, B et D d'autre part.

Si on peut réaliser cela, alors, avec $\widehat{COD} = \alpha$, il vient :

triangle isocèle FOE : $\widehat{FEO} = \alpha$ et $\widehat{DFE} = \widehat{FOE} + \widehat{FEO} = \alpha + \alpha = 2\alpha$

triangle isocèle EFD : $\widehat{FDE} = \widehat{DFE} = 2\alpha$

triangle OED : $\widehat{DEC} = \widehat{DOE} + \widehat{ODE} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$

triangle isocèle DEC : $\widehat{DCE} = \widehat{DEC} = 3\alpha$

triangle DOC : $\pi = \widehat{DOC} + \widehat{OCD} + \widehat{CDO} = \alpha + 3\alpha + 3\alpha = 7\alpha$

$$\alpha = \frac{\pi}{7}$$

Le cheminement a été le même que précédemment.

Pour le cercle de centre O et passant par C et D, la corde [CD] est le côté du polygone régulier inscrit de 14 côtés.

Même si les triangles OCD et DEC sont semblables, on ne peut pas obtenir une relation simple entre OC et CD car EO ne s'exprime pas directement en fonction de CD et OC.

On s'arrêtera à $\frac{\pi}{7}$ sachant qu'une certaine généralisation est possible. Affaire à suivre...

La corde à nœuds apportait bien des ressources jadis. Avec l'apparition des machines à diviser, des règles graduées, des cercles gradués et autres outils précis largement répandus, il ne restait plus qu'à déposer la corde à nœuds au musée. *Sic transit gloria mundi...*

PS : Au XX^e siècle, dans les collèges et lycées de garçons, il y eut des professeurs qui se souvinrent d'un jeu de construction métallique qui avait accompagné leur jeunesse. Ceux-ci pensèrent que les éléments de ce jeu pouvaient remplir un rôle éducatif en géométrie !

Soit un des montages ainsi réalisable :

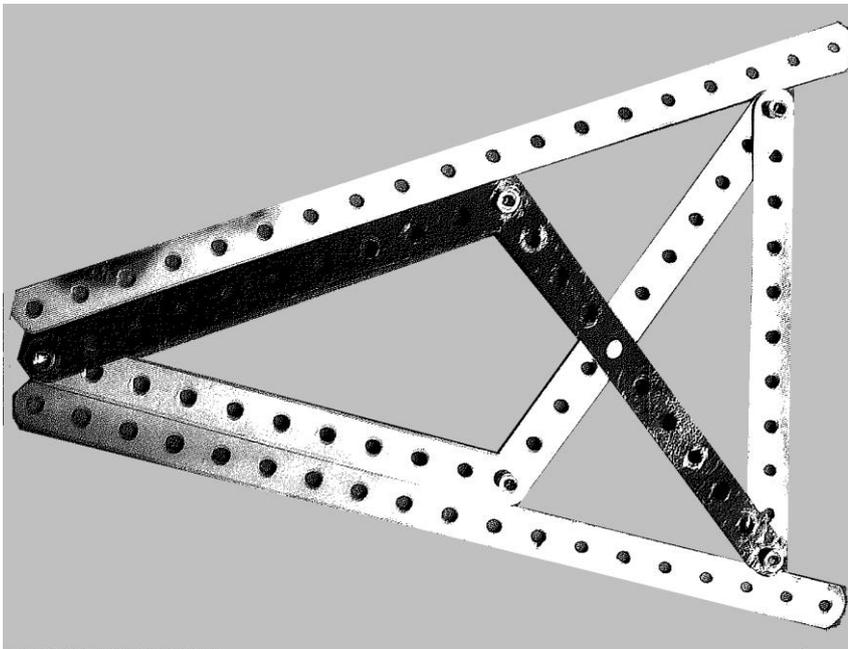
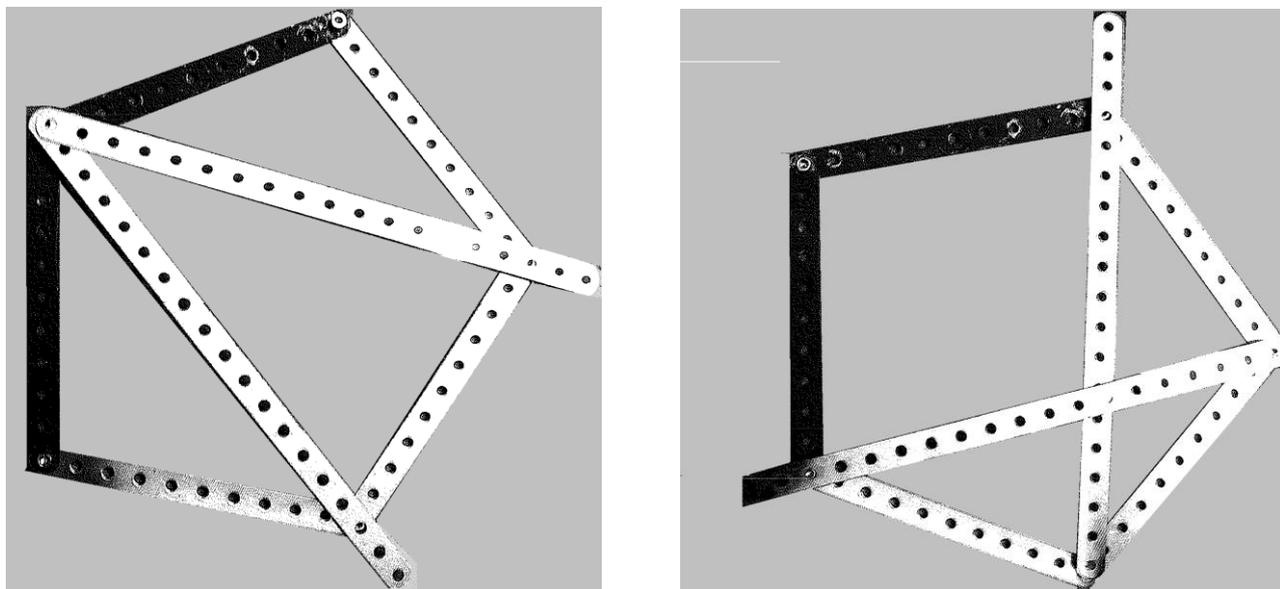


Figure 12

On notera que pour un côté de décagone régulier de 10 intervalles - c'est-à-dire tige à 11 trous - il faut un rayon du cercle circonscrit d'un peu plus de 17 trous - c'est-à-dire un peu plus de 16 intervalles or $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$

Figures 13



Dans les établissements de jeunes filles, il a plutôt été fait appel au jeu des cinq aiguilles à tricoter les bas et chaussettes :

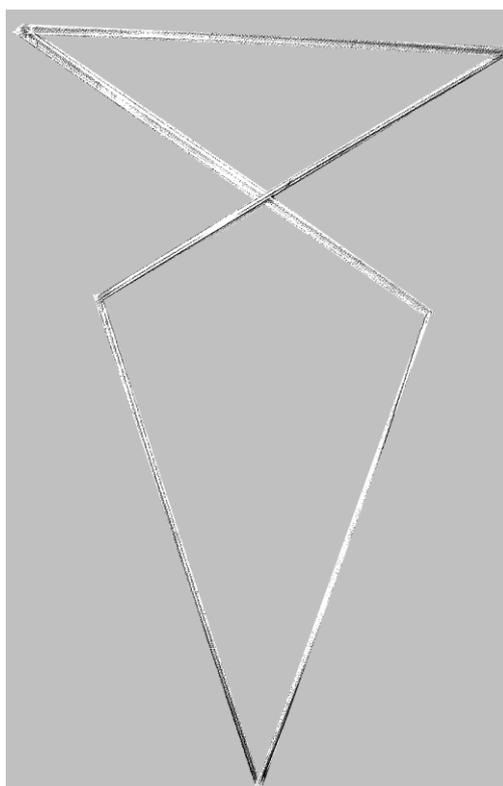


Figure 14

Un sujet d'actualité (récurrent) : le calcul des taxes foncières.

Jean-Marie THOMASSIN

Résumé : Au moment où arrivent les taxes locales, variables suivant les villes, on peut proposer aux élèves de faire ou d'étudier quelques comparaisons ; c'est un bon prétexte pour remettre en mémoire quelques règles de calcul sur les pourcentages pas toujours bien maîtrisées, quelques « paradoxes » apparents des pourcentages et de rappeler qu'un élément fondamental est trop souvent oublié : la description de l'ensemble de référence. Ce sujet est un exemple classique d'une situation où il ne faut pas oublier d'avoir à l'esprit les éléments implicites.

Mots clés : Taxes ; pourcentages ; évolution ; comparaison.

A. Etude de la situation :

1. Mi-septembre 2013 :

Les propriétaires ont reçu leurs avis d'imposition relatifs aux taxes foncières. Un journal à diffusion nationale (*les échos*) s'empare de ce sujet particulièrement brûlant, établit un classement : la ville de Dijon est citée comme étant parmi les villes où les taxes foncières, impôts locaux par excellence, ont le plus augmenté. Ne citer que le nom de la ville, c'est tendre à faire porter la responsabilité entière de cette hausse à la municipalité, ce à quoi les édiles locaux ont répondu derechef : « ce n'est pas nous, c'est la faute au département ». Essayons donc d'y voir plus clair en observant un exemple et en détaillant les modes de calcul.

2. Une première étape :

La première étape, avec les élèves sera de calculer, sur un exemple, en données brutes puis en pourcentages, l'augmentation des taxes foncières entre 2012 et 2013. Voici un exemple dijonnais :

Année 2012 : 1718€

Année 2013 : 1829€

Soit une augmentation de 111€ ce qui donne une hausse de près de 6,42%, largement supérieure à l'inflation. On peut donc dire que les taxes augmentent « plus vite » que les prix (affirmation à faire expliquer par un élève).

En faisant ressortir l'argument adéquat, on fera remarquer que cette « vérification sur un exemple » suffit à justifier l'affirmation, ce qui est très rare en mathématique.

On peut s'étonner que le journal déjà cité donne une valeur différente ; en effet il indique pour hausse entre 2012 et 2013 un taux de 7,3%. Comment un tel écart est-il possible ? Cela tient au mode de calcul de ce dernier taux. En effet, au lieu de procéder comme précédemment, c'est-à-dire en comparant les taux de cette pression fiscale d'une année avec l'autre pour un contribuable donné, toutes choses égales par ailleurs, il définit un « contribuable moyen » et affirme que, **en moyenne**, le contribuable paye, à Dijon, en 2013, 1177€ de taxes foncières puis il compare avec ce que le contribuable payait, en moyenne, en 2012. On retrouve donc, sous-jacent, les paradoxes apparents de l'évolution d'une moyenne. En effet, le parc des immeubles taxés en 2012 est différent de celui taxé en 2013 : Dijon fait l'objet d'une vaste campagne de destruction de logements vétustes, de rénovation d'appartements et de construction d'immeubles neufs modernes, confortables, voire haut de gamme. (La destruction de casernes militaires a entraîné la création de nouveaux quartiers « haut de gamme » ; la percée de voies larges nécessaires au nouveau tram a entraîné la destruction d'immeubles vétustes remplacés par des immeubles collectifs abritant de nombreux logements équipés de tout le confort moderne). Or les taxes foncières sont directement fonction du confort du logement. Les logements les moins taxés sont donc progressivement remplacés par des logements (souvent plus nombreux) soumis à des taxes beaucoup plus élevées. Ainsi donc, même sans hausse du taux des taxes, la moyenne doit mécaniquement augmenter, d'où l'écart entre les deux informations (6,42 et 7,3).

3. Le calcul des taxes foncières :

Un certain nombre de taxes sont regroupées sous l'appellation « taxes foncières ». Il y a celle perçue par la commune, celle perçue au profit de l'intercommunalité, celle perçue par le département, une taxe spéciale d'équipement et la taxe pour l'enlèvement des ordures ménagères. Toutes ces taxes sont calculées sur une même base de calcul appelée « valeur locative », dépendant du lieu où est situé le local taxé, de sa surface, de sa composition, de son type, de ses dépendances et d'un certain nombre d'éléments de confort ou de luxe (WC, douche, baignoire, évier, lavabos, eau courante, gaz, électricité, existence et type de chauffage... voisinage, ascenseur, balcons, terrasses, piscine, etc...). Il y a longtemps que cette base ne représente plus la valeur locative réelle, même si, chaque année, elle est réévaluée. (Heureusement, sinon, pour un local mis en location, en ajoutant tous les impôts liés à ce revenu foncier, on dépasserait les 100% d'impôts).

On reprend l'exemple précédent. La valeur locative du lieu induit une base de tous les calculs qui est, en 2013, de 3158€. Chaque taxe est un pourcentage de cette valeur. Les taux, en 2013, sont les suivants :

Commune	Intercommunalité	Département	Taxe spéciale d'équipement	Ordures ménagères
27,5%	0,598%	21%	0,341%	6,45%

On peut alors faire calculer par les élèves, sur la base de 3158€ la somme perçue au titre de chacune des rubriques et la somme totale due par le contribuable. On la comparera aux 1829€ indiqués précédemment. On pourra aussi évoquer les problèmes d'arrondis, sachant que chacune des sommes perçues doit être exprimée sans décimale. On pourra aussi comparer entre eux ces différents taux.

On pourra, en rappelant la justification, faire remarquer que, pour calculer le taux de pression fiscale lié à ces taxes, on peut, dans le cas présent, ajouter les pourcentages. (Soit un taux de près de 56%, que l'on peut éventuellement commenter, en liaison avec l'économie ; on pourra évoquer la courbe de Laffer). On peut aussi proposer de calculer la part respective de chaque organisme dans l'ensemble des taxes.

En fait, dans ce qui précède, une rubrique, séparée du reste a été oubliée : à tout ce qui précède, il faut ajouter des frais de gestion de la fiscalité directe locale (les services fiscaux ne rasant pas gratis). Dans le cas présent, ils se montent à 64€. On retrouve alors la somme due.

4. Evolution du taux des taxes :

Les taux des différentes taxes pour l'année 2012 sont les suivants :

Commune	Intercommunalité	Département	Taxe spéciale d'équipement	Ordures ménagères
27,23 %	0,592 %	18,75 %	0,336 %	6,53 %

On peut faire étudier, par les élèves, l'évolution de chacun de ces taux entre 2012 et 2013 et les comparer entre eux ; on attirera leur attention sur les deux types de réponses possibles :

- En valeurs absolues (en économie, on parle de points) ;
- En pourcentages (seule cette notion permet des comparaisons).

On pourra aussi étudier l'évolution du « taux global de pression fiscale ».

5. Evolution des cotisations :

Pour le logement qui a servi d'exemple précédemment, les services fiscaux fournissent le tableau suivant, indiquant les sommes à payer dans chacune des rubriques :

	Commune	Intercommunalité	Département	Taxe spéciale d'équipement	Ordures ménagères
2012	845	18	582	10	203
2013	868	19	663	11	204
Variation en %	+2,72 %	+5,56 %	+13,92 %	+10 %	+0,49 %

On pourra comparer ces évolutions avec celles précédemment calculées, constater un certain écart dont on va chercher l'origine. Une indication est donnée par la hausse (modeste) de la redevance des ordures ménagères alors que le taux associé a baissé ; une seule solution : **la base de calcul n'est pas la même, la valeur locative a évolué. (On peut donc à la fois baisser une taxe et prélever plus).**

On pourra faire remarquer que, dans trois des colonnes, **la hausse en « valeurs absolues » est la même mais que, en pourcentages, elles sont différentes.** On pourra éventuellement commenter et comparer ces variations d'évolution en pourcentages.

6. Evolution de la valeur locative :

Sur l'exemple étudié, la base de calcul était, en 2012 de 3102€, sans évolution du bien taxé, en 2013, elle est passée à 3158€ soit une hausse de 1,8053%. En effet, chaque année la valeur locative d'un bien non transformé évolue dans une fourchette définie par le législateur. Pour 2013, la réglementation limitait la hausse à 1,8% maximum (égale à l'inflation ?) ; la plupart des communes ont choisi cette valeur. Vérifions :

$$3102 \times 1,018 = 3157,836 \text{ arrondi à } 3158.$$

Dans l'étude de l'évolution des taxes locatives, il ne faut pas seulement considérer l'évolution de leur taux mais aussi celle de la base de calcul et les cumuler en tenant compte des règles de calcul sur les pourcentages. IL est donc nécessaire de connaître les deux informations, ce qui est rarement le cas.

En outre, les frais de gestion sont passés de 60€ à 64€ Soit une hausse de près de 6,7% que l'on peut éventuellement commenter...

On pourra faire remarquer que, si on veut que ces taxes suivent l'inflation (1,8%), il ne faut augmenter de 1,8% que la base de calcul ou que le taux de pression fiscale mais pas les deux à la fois (sinon ?).

7. Remarques sur la valeur locative :

La valeur locative d'un logement, base de calcul des taxes foncières, est une valeur établie en fonction de catégories (de « luxe » à « logement insalubre » voire « ruines »), de divers critères caractéristiques ou de confort dont certains ont déjà été cités précédemment. Ces valeurs ont été redéfinies en 1970 et sont réévaluées périodiquement, d'une part en fonction des améliorations (connues des services concernés) éventuellement apportées au logement ou à son environnement et d'autre part en utilisant un coefficient de réévaluation défini annuellement par le législateur. Pour les logements neufs ou réhabilités, les services fiscaux déterminent la valeur locative de 1970, en utilisant les critères et les prix de 1970, puis déterminent la valeur locative de 2013 en utilisant les coefficients multiplicateurs appliqués lors de chaque réévaluation annuelle effectuée.

Ce qui importe n'est pas le calcul de la valeur locative (si la même méthode et les mêmes critères sont utilisés pour tous) mais le taux de pression fiscale appliqué à cette valeur (2000€ avec un taux de 60% donnent le même impôt que 4000€ avec un taux de 30%). De plus le système doit être équitable (à logements identiques, taxes

identiques) et la fonction ainsi définie croissante. On peut citer quelques critiques ou limites au système ainsi élaboré :

- Il est nécessaire que tous les travaux d'amélioration, de réhabilitation, de transformation d'un logement ou d'un quartier soient déclarés et pris en compte (ce qui n'est pas toujours le cas pour une douche supplémentaire, une piscine...).
- Moyens trop insuffisants pour une vérification réelle du statut de chaque logement n'ayant pas fait l'objet d'une demande de permis de construire ou de modification relativement récente.
- Certaines caractéristiques considérés en 1970 comme éléments de confort ou de « luxe » (comme : évier, lavabo, douche, baignoire, WC à l'intérieur de l'appartement...) sont désormais devenus des éléments indispensables dans un logement décent ; les critères associés sont donc devenus obsolètes.
- Des logements considérés comme très confortables en 1970 ont beaucoup vieilli, perdu de leur qualité mais ont conservé leur catégorie fiscale.
- Des quartiers ont pris de la valeur sans que cela ait été pris en compte.
- Un déséquilibre s'est créé entre quartiers. Des injustices sont apparues.
- Trop de pouvoir est donné aux « répartiteurs », membre des commissions communales de répartition des logements dans les différentes catégories.
- Le système engendre la délation.

Remarques :

Certains prônent une réactualisation du calcul des valeurs locatives afin d'obtenir un alignement sur les prix du marché locatif ; ceci entraînerait une augmentation importante de la base de calcul des taxes foncières et donc de ces taxes (sans avoir à augmenter la pression fiscale) et des rentrées fiscales associées, ce qui pourrait devenir financièrement difficile à supporter par certains propriétaires, entraînant des ventes et une baisse des prix. En outre, si les loyers étaient très inférieurs en 1970, les taux des taxes aussi ; redéfinir les valeurs locatives devrait aussi entraîner une redéfinition du taux des taxes, ce que certains ne souhaitent pas. De beaux débats en perspectives...

La créativité fiscale est sans limite... Tous les arguments sont bons pour inventer un impôt nouveau. Ainsi, il fut une époque où les portes et les fenêtres étaient considérées comme un élément de luxe, on avait donc créé un impôt sur les portes et les fenêtres. Cet impôt a été créé à la révolution et aboli en 1926 car à l'origine d'appartements devenus insalubres par manque de fenêtres (certains n'en avaient qu'une voir une seule porte-fenêtre ; d'autres ont vu certaines de leurs fenêtres être murées ; soupirail et fenêtre de toit sont exonérés). Chez les britanniques, à l'inverse, un impôt analogue a transformé les fenêtres en signes extérieurs de richesse : ceux qui voulaient paraître appartenir à une classe aisée ont bâti des demeures truffées de fenêtres. On a aussi créé, à une certaine époque, un impôt sur les pianos, d'où la

Indiquer la ou les bonnes réponses. Expliquer, commenter.

La hausse annuelle des prix est estimée à 2%, quelle solution choisir pour que les taxes foncières suivent l'inflation et donc que les services qui la prélèvent ne perdent pas de pouvoir d'achat :

1. Augmenter la valeur locative de 2%
2. Doubler la valeur locative
3. Augmenter chaque taxe de 2 points
4. Augmenter chaque taxe de 2%
5. Augmenter les taxes et la valeur locative de 2%
6. Augmenter les taxes ou la valeur locative de 2%.
7. Augmenter les taxes ou bien la valeur locative de 2%.

4. Pour des comparaisons, il est judicieux de tenir compte des évolutions des années précédentes :

On donne, pour trois villes, les taux de pression fiscale des trois dernières années ; calculer la croissance, en points et en pourcentages, pour chaque ville, entre 2011 et 2012 puis entre 2012 et 2013, puis globalement. Comparer les différentes évolutions.

Ville	A	B	C
Taux 2011	42%	47%	51%
Taux 2012	48%	53%	55%
Taux 2013	50%	56%	57%

Remarque : une stratégie classique concernant la préparation des élections est d'augmenter beaucoup les taxes 2 ans avant les élections afin de pouvoir ne les augmenter que peu ou modérément l'année précédant les échéances électorales.

5. Commenter ces affirmations et indiquer qui a raison :

Mr le Maire : cette année, nous n'avons pas augmenté la pression fiscale ; elle a même baissé !!!

Un contribuable : mes taxes ont d'une part augmenté et d'autre part plus que l'inflation (1,9%) alors que mon bien n'a pas évolué.

Données fiscales :

	Année 2012	Année 2013
Valeur locative	1846€	1959€
Taux de pression fiscale	56%	55%

Remarque : On peut donc augmenter les rentrées fiscales sans taxer plus.

Variante : Supprimer un abattement fiscal ; augmenter les frais de gestion ; prélever des frais d'encaissement pour « taxes élevées ».

6. La taxe moyenne peut augmenter sans que les taxes individuelles n'augmentent :

Un ensemble immobilier comporte des appartements constitués de 1 à 5 pièces ; dans un même type, tous les appartements sont équivalents et soumis à la même taxe foncière. On définit la « taxe moyenne » payée par le « contribuable moyen » de cet ensemble comme étant la moyenne arithmétique pondérée de toutes les taxes foncières payées dans cet ensemble immobilier. Les données pour 2013 sont les suivantes :

Type	1 pièce	2 pièces	3 pièces	4 pièces	5 pièces
Nombre d'appartements	12	6	5	4	3
Taxes foncières due par appartement	450€	625€	850€	1150€	1650€

Le syndic de l'ensemble immobilier est chargé d'étudier l'évolution des taxes foncières dues par les copropriétaires en fonction de l'évolution de différents paramètres.

1. Calculer la taxe foncière moyenne due par le contribuable moyen de cet ensemble immobilier ; existe-t-il ?

2. Si la hausse des prix pour 2014 est de 3% et si la valeur locative de chaque appartement subit une hausse égale à l'inflation, sachant que les taxes sont proportionnelles à cette valeur locative, quelles seront les évolutions des taxes foncières et de la taxe moyenne, toutes choses égales par ailleurs ?

3. Dans la situation précédente, les bénéficiaires des taxes foncières souhaitent eux aussi augmenter leurs taux d'un pourcentage égal à l'inflation ; quelle sera alors le pourcentage d'évolution de la taxe moyenne ?

4. L'ensemble immobilier comporte un petit bloc ne comportant que 8 appartements de 1 pièce, difficiles à louer. Il est décidé de détruire ce bloc et de le remplacer par un espace vert. Comment évoluent la taxe moyenne et les taxes individuelles ? Même question dans le cas où cette opération écologique entraîne une remise de 25€ sur chaque taxe foncière.

7. Un autre exemple :

On ne dispose que d'une partie d'un document relatif à l'établissement des taxes foncières dans un petit village vosgien. Il donne les taux 2012 et 2013 dans le tableau suivant :

	Commune	Syndicat de commune	Inter-communalité	Département	Taxe spéciale équipement	Ordures ménagères	Pression fiscale
Taux 2012	16,55%	3,77%	2,13%	22,32%	0,261%		
Taux 2013	16,55%	4,06%	2,16%	22,70%	0,253%		
Variation absolue							
Variation relative							

Les ordures ménagères font l'objet d'une taxation à part, comprenant un abonnement, le prix de chaque enlèvement et une somme fonction du poids des ordures (ou comment payer plus en jetant moins...) ; somme à laquelle s'ajoutera éventuellement une amende pour volume d'ordures trop faible...

1. Comparer avec les situations précédemment proposées.
2. Compléter le tableau fourni en indiquant le taux de pression fiscale en 2012 et en 2013 ; donner, pour chaque rubrique, les évolutions absolues et relatives ; quelles taxes ont le plus augmenté ?
3. On dispose aussi du tableau suivant donnant les cotisations brutes réglées en 2012 et 2013.

	Commune	Syndicat de commune	Inter-communalité	Département	Taxe spéciale équipement	Ordures ménagères	Total
Cotisation 2012	466	107	60	630	7		
Cotisation 2013	475	117	63	652	7		1314
Variation absolue							
Variation relative							

- a. Donner, pour chaque rubrique, les évolutions absolues et relatives ; comparer ; quelles taxes ont le plus augmenté ? Comparer les évolutions étudiées pour chaque taux de taxes avec les évolutions trouvées à la question 2. Pourquoi la cotisation communale augmente alors que le taux est inchangé ?
- b. En utilisant par exemple les cotisations communales, évaluer les valeurs locatives 2012 et 2013 de cette propriété.

8. Quelques affirmations :

L'union nationale de la propriété immobilière affirme (UNPI) : « les taxes foncières, en France, ont augmenté en moyenne de 21,17% pour la période 2007-2012 ».

1. Estimer, en moyenne, l'augmentation annuelle des taxes foncières sur cette période (on pourra utiliser les fonctions d'une calculatrice).
2. L'UNPI affirme aussi que « sur la même période, les valeurs locatives, assiette de l'impôt, ont été majorées de 9,43% et les taux des taxes de 10,73% ». Cette affirmation est-elle compatible avec la précédente, pourquoi ? L'UNPI complète en précisant que : « si chacune de ces augmentations, prises isolément, peut paraître raisonnable car à peu près comparable à l'inflation sur cette période, la conjonction des deux entraîne une forte hausse » (non comparable à l'inflation). Expliquer, justifier, commenter ces affirmations.

9. Question complémentaire :

Le prix du timbre-poste a augmenté plusieurs fois, successivement, de 0,03€ Justifier l'affirmation :

« Le prix du timbre augmente de moins en moins vite ».

C. Taxes foncières et taxes locatives

1. Mi-novembre : le décompte des taxes locatives vient d'être reçu par les contribuables. Peut-on établir une comparaison avec les taxes foncières ?

On peut proposer aux élèves de débattre de ce sujet ; on fera ressortir des échanges que l'on ne peut comparer que des objets de même nature, or, ces deux taxes portent sur des objectifs différents, les unes étant liées à la propriété d'un bien et les autres sont liées à l'occupation de ce bien. Les unes sont acquittées par le propriétaire du bien, les autres par l'occupant du bien qui peut ne pas en être le propriétaire ; toutes deux ont cependant un élément en commun : le bien taxé, ce qui semble nécessaire pour pouvoir envisager des comparaisons valables. Si, pendant quelques instants, on est amené à quitter les mathématiques au sens strict, on entre dans le registre interdisciplinaire fondamental de la formation du citoyen que l'on souhaiterait « raisonnable », doté d'un esprit d'analyse et de maîtrise de l'information reçue.

2. Etude d'un exemple :

On peut reprendre le premier des exemples traités.

Taxes foncières :

	Commune	Syndicat de commune	Inter-communalité	Département	Taxe spéciale équipement	Ordures ménagères	Pression fiscale
Taux 2013	27,50%		0,598%	21,00%	0,341%	6,45%	
Cotisation	868	0	19	663	11	204	Total :

Frais de gestion : 64€

Montant de l'impôt : 1829€

Base de calcul : 3158€

Taxes d'habitation :

	Commune	Syndicat de communes	Intercommunalité	Taxe spéciale d'équipement	Total
Taux	22,44%		8,95%	0,239%	
Cotisation	1229		490	13	1732

Frais de gestion : 18€ Prélèvement pour base élevée : 11€

Montant de l'impôt : 1761€

Contribution à l'audiovisuel public : 131€

Somme totale à payer : 1892€

Valeur locative brute : 6313€

Abattement : 836€

Base de calcul : 5477€

Tentons maintenant quelques comparaisons ; avec les élèves, il peut être fort instructif de les laisser explorer seuls quelques pistes puis de consacrer un temps à des échanges et argumentations. En effet, il faut établir des règles de comparaison et être bien conscient des choix faits : trop souvent, certains médias diffusent des comparaisons ou classements sans en préciser les « implicites » ; certaines des activités que nous proposons à nos élèves peuvent les aider à comprendre, analyser et dégager une opinion critique face à l'information reçue.

1^{ère} méthode : la somme totale à payer

a. Avec les données brutes.

C'est le souci premier du contribuable. 1829 contre 1892, le résultat est clair : les taxes foncières sont « moins chère » que les taxes d'habitation. On pourra faire remarquer que cette comparaison a un sens (et même est de bon sens) car elle porte, dans la même ville, sur le même local, avec la même unité de compte.

b. Sans TV :

Oui, mais la deuxième intègre la redevance audiovisuelle, qui n'est pas payée par ceux qui ne possèdent pas de téléviseur, qui, jadis, était perçue à part et qui ne bénéficiait pas aux instances locales ; on peut donc logiquement penser qu'elle est abusivement intégrée aux taxes locales ; on peut donc être amené à penser qu'il faut la retirer du montant à payer pour faire une comparaison. Avec ce procédé, on compare alors 1829 à 1761 ; l'ordre des taxes est alors inversé. On a donc ici un bel exemple où la méthode utilisée est fondamentale.

c. Une autre méthode :

On pourrait aussi être enclin à ne comparer que les sommes qui sont effectivement perçues par les instances locales, c'est-à-dire déduire les frais de gestion, taxe TV et taxe pour base élevée. A ce sujet, on peut faire remarquer que, dans ces deux taxes, les bénéficiaires ne sont pas les mêmes.

d. Remarque :

Puisque toutes les taxes sont définies par des pourcentages d'une même base de calcul et que, à priori, les règles de calcul sont les mêmes pour tous les foyers fiscaux d'une même ville, les résultats obtenus « sur un exemple », seront les mêmes pour tous les foyers fiscaux de cette ville (sauf exonérations spéciales).

2^{ème} méthode : avec des pourcentages

On cherche alors à comparer les « taux de pression fiscale ».

a. Avec les pourcentages fournis par les avis d'imposition :

Pour chacun des deux décomptes, tous les pourcentages sont calculés sur la même base de calcul, on peut donc les ajouter. On trouve alors un total de 55,889% pour le

taux de pression fiscale relatif au foncier et 31,629% pour le taux de pression fiscale relatif au locatif. La contribution relative au locatif semble donc, à priori, beaucoup plus « légère » que celle liée à la propriété foncière. Observer les données brutes déjà citées doit entraîner un doute sur la méthode utilisée. Trois remarques sont alors à faire :

i. Doit-on tenir compte des frais de gestion et taxes annexes ? On est amené à répondre par l'affirmative si on se place du point de vue du contribuable et par la négative si on choisit celui du bénéficiaire des taxes. On choisira par la suite le premier point de vue.

ii. Doit-on tenir compte de la contribution à l'audiovisuel public ? Le contribuable occupant des lieux répondra « oui », contrairement aux autorités municipales.

iii. Le local taxé est le même dans les deux cas mais, pourtant, la base de calcul est différente, ce qui rend peu pertinente (sauf, éventuellement, pour des objectifs électoraux) la comparaison des pourcentages précédents.

b. Calcul d'un « taux de pression fiscale » à partir des sommes versées :

On compare chaque somme due à la base de calcul de l'impôt concerné (valeur locative diminuée des abattements).

Taxes foncières :

On compare 1829 à 3158 ; on obtient alors un taux de près de 57,92%.

Taxes d'habitation, redevance TV comprise :

On compare 1892 à 5477 ; on obtient alors un taux de près de 34,55%.

On constate alors une inversion entre l'ordre des valeurs absolues et l'ordre des valeurs relatives. On insistera donc, avec les élèves sur la nécessité de connaître le contexte et la méthode utilisée, ceux-ci pouvant influencer les conclusions obtenues. On peut aussi comparer chacune de ces taxes à la valeur locative brute, avant abattement, c'est-à-dire, ici, à 6313€

Cas du propriétaire occupant :

Il paie les deux taxes soit un total de 3721€ à comparer à l'une des bases de calcul. On obtient 118% de celle utilisée pour établir les taxes foncières, 68% de celle utilisée pour établir les taxes locatives, 58,95% de la valeur locative brute. Tout est une question de point de vue ou d'objectif politique...

3. Remarques concernant l'établissement des bases de calcul :

Dans les deux cas, on utilise la valeur locative du local dont on a précédemment décrit l'établissement.

Taxes foncières :

On déduit de cette valeur locative un abattement de l'ordre de 50% représentant forfaitairement les frais liés à l'entretien et la conservation en état du local. On obtient alors la base de calcul.

Taxes d'habitation :

L'abattement, beaucoup plus faible, est censé représenter les frais engendrés par l'occupation du local.

L'énigme du type 14

Michel LAFOND

Mots clés : pavage, pentagone, pavé, trigonométrie.

Résumé : Étude d'un pavage pentagonal, permettant en examinant tous les indices présents sur une figure, à la manière d'une enquête policière, de lever toutes les incertitudes sur le pavé de base.

Les calculs (trigonométrie, calculs vectoriels) sont assez simples pour être effectués dans les classes.

1) Le type 14 signifie ici, la dernière classe de pentagones convexes pouvant paver le plan.

En effet, si on sait depuis longtemps que tout triangle et tout quadrilatère (même non convexe) peut paver le plan, chez les pentagones la propriété est plutôt rare et le problème ardu.

La preuve, on ne connaît aujourd'hui que 14 types de pentagones convexes qui ont été trouvés laborieusement : Cinq en 1918, trois en 1968, un en 1975, quatre entre 1975 et 1984 et un récemment en 1985, le quatorzième, qui fait l'objet de cet article.

Contrairement à ce qui s'est passé plusieurs fois dans le passé, personne aujourd'hui ne se hasarde à dire que la liste des 14 types connus est complète. Les 14 pavages sont visibles en annexe.

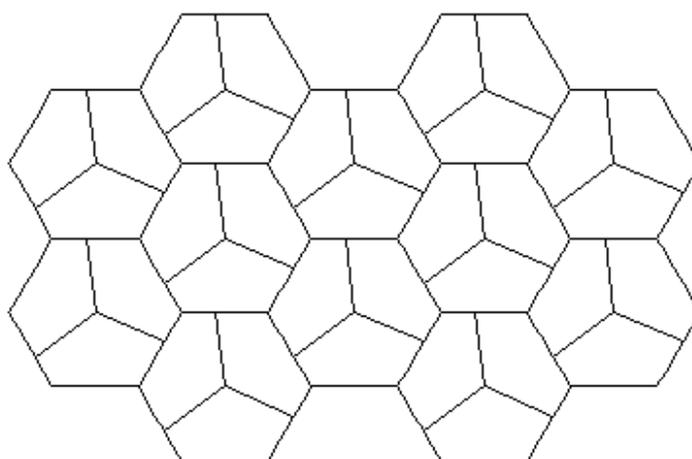


Figure 1
Pavage de type 3

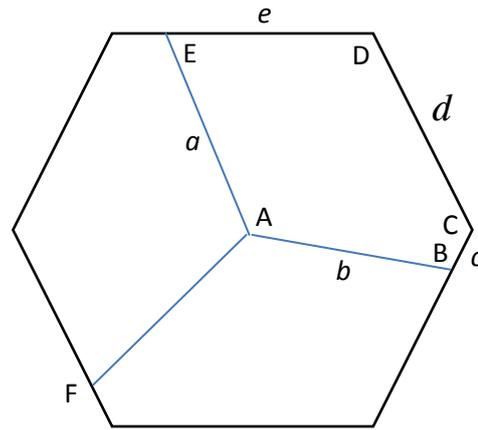


Figure 2

2) Un type de pavage pentagonal dépend en général d'un paramètre comme on le voit avec le cas du type 3 [Figure 1 ci-dessus].

C'est l'un des types les plus simples, on part d'un hexagone régulier [Figure 2], et du centre A, on trace trois rayons AB, AE, AF faisant entre eux des angles de 120° . On obtient trois pentagones égaux, et le pavé ainsi obtenu peut être défini (à une similitude près) par les seules conditions suivantes :

- Les angles A, C et D doivent mesurer 120° (comme sommets de l'hexagone).
- Les côtés a et b doivent être égaux.
- Le côté d doit être égal à la somme des deux petits côtés $c + e$ (pour assurer le contact dans le pavage).

C'est la raison pour laquelle ce type 3 est résumé traditionnellement par :

$$\text{Type 3 : } A = C = D = 120^\circ \quad a = b, d = c + e$$

avec les notations fixées une fois pour toutes des angles A, B, C, D, E et des côtés a, b, c, d, e qu'on retrouvera dans toute la suite..

Ce type de pavage dépend d'un paramètre car le seul choix qu'on a est celui du premier rayon (par exemple AB) dans l'hexagone. Après quoi l'angle E est défini, donc l'angle B aussi et le pavé est parfaitement déterminé.

Sur les 14 types, un seul ne dépend d'aucun paramètre, c'est-à-dire que le pavé correspondant est unique.

C'est le dernier découvert, donc son "appellation" est pavage pentagonal de type 14. Le voici (Figure 3) :

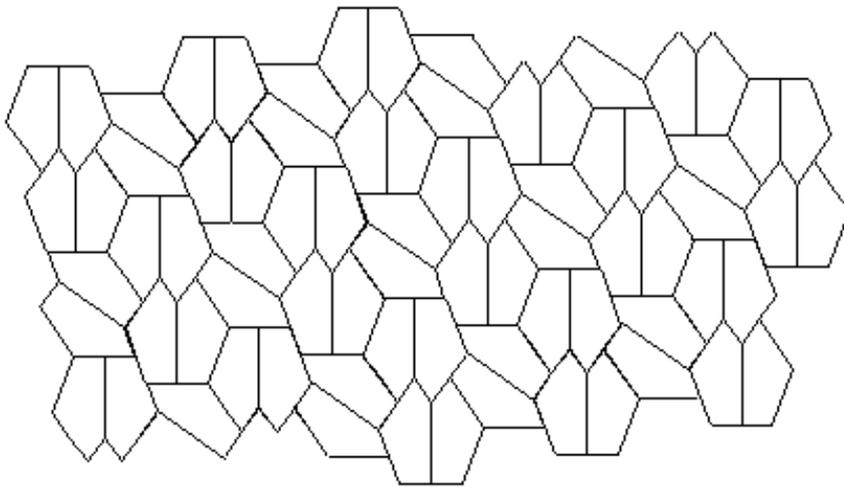


Figure 3

Comme on va le voir, la seule connaissance de cette figure permet le calcul de toutes les caractéristiques (côtés et angles) du pavé, à l'échelle près évidemment.

Voici ce pavé qu'on notera (P) :

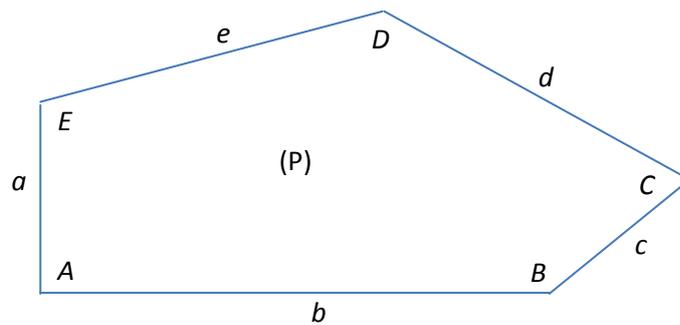


Figure 4

On prendra comme unité $a = 1$.

Il s'agit maintenant de calculer tout le reste en commençant l'enquête :

- 3) Un coup d'œil sur la figure 3 montre qu'un groupement judicieux de 6 pavés (P) forme un nouveau pavé (en trait gras) qui par simples translations pave également le plan. (Figure 5 ci-dessous)

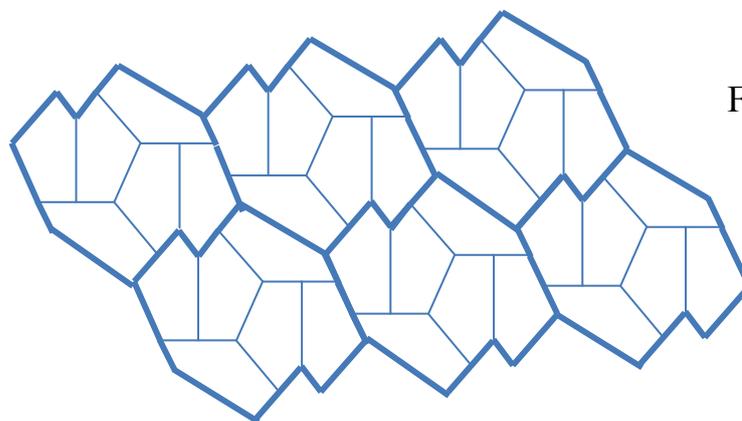


Figure 5

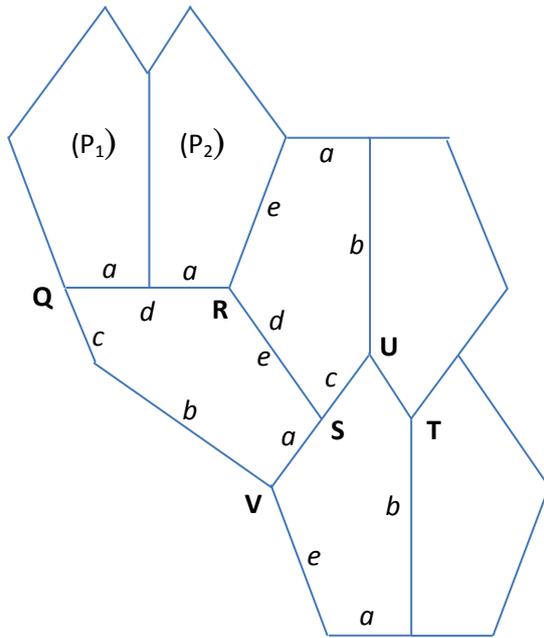


Figure 6

Ce nouveau pavé, isolé dans la figure 6, examiné sous tous les angles, va nous donner tous les renseignements souhaités. Rappelons que les notations sont celles de la figure 4.

Commençons par les angles :

La symétrie des pavés (P_1) et (P_2) montre que $A = \frac{\pi}{2}$.

Les angles en S montrent que $C + E = \pi$. (1)

Les angles en T montrent que $2B + C = 2\pi$. (2)

Les angles en R montrent que $2D + E = 2\pi$. (3)

Par ailleurs la somme des 5 angles vaut $3 \times 180 = 540^\circ$ comme dans tout pentagone convexe.

Comme on connaît $A = 90^\circ$, il reste $B + C + D + E = \frac{5\pi}{2}$ (4)

On a bien 4 équations pour 4 angles inconnus, mais elles ne sont pas indépendantes, et tout ce qu'on peut en tirer pour l'instant (exercice laissé au lecteur) est :

$$E = 2B - \pi \quad C = 2\pi - 2B \quad D = \frac{3\pi}{2} - B$$

Continuons l'enquête par les côtés :

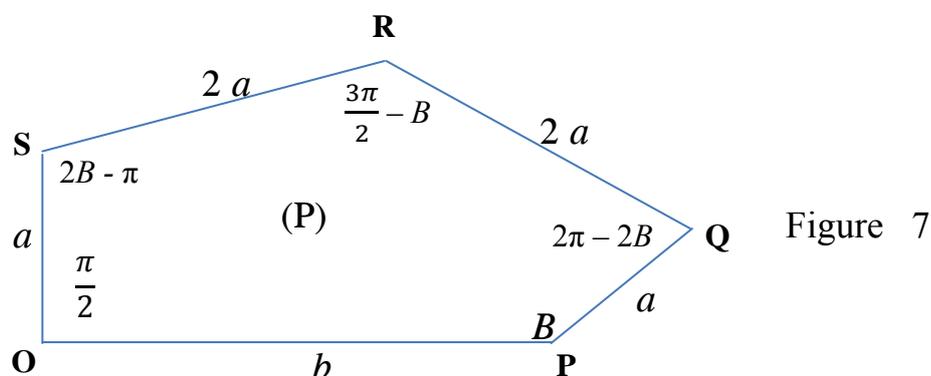
Le segment QR de la figure 6 montre que $d = 2a$.

Le segment RS montre que $d = e$.

Enfin, UV montre que $d = a + c$, mais comme $d = 2a$ on en déduit $c = a$.

Pour les segments, on a donc $c = a$ et $d = e = 2a$.

Cette première investigation des lieux nous a donné des renseignements qui sont résumés dans la figure 7 ci-dessous :



Si on fixe a égal à 1, il reste deux inconnues : le côté b et l'angle B .

Un indice nous aurait-il échappé ?

En effet, il faut traduire d'une manière ou d'une autre le fait que tous ces indices se recourent !

Une manière de le faire est d'écrire de deux manières le vecteur \overrightarrow{OR} :

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SR}$$

Dans le repère orthonormé d'axes (OP, OS) et d'unité $a = 1$, on a : $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$

Puisque $\cos(\pi - B) = -\cos(B)$ et $\sin(\pi - B) = \sin(B)$,

$$\text{on a : } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -\cos(B) \\ \sin(B) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{QR} = 2 \begin{pmatrix} \cos(B) \\ \sin(B) \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} b + \cos(B) \\ 3 \sin(B) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Puisque $\cos\left(2B - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin(2B)$ et $\sin\left(2B - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(2B)$

$$\text{on a } \overrightarrow{SR} = 2 \begin{pmatrix} -\sin(2B) \\ \cos(2B) \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} -2 \sin(2B) \\ 1 + 2 \cos(2B) \end{pmatrix} \quad (6)$$

De (5) et (6) on tire :

$$b = -\cos(B) - 2 \sin(2B) \quad \text{et} \quad 3 \sin(B) = 1 + 2 \cos(2B) \quad (7)$$

De (7) on tire :

$$3 \sin(B) = 1 + 2(1 - 2 \sin^2(B)) \quad \text{d'où} \quad \sin(B) = \frac{-3 + \sqrt{57}}{8} \quad (8)$$

$$\cos^2(B) = 1 - \sin^2(B) = \frac{-2+6\sqrt{57}}{8} \quad \text{d'où } \cos(B) = -\frac{\sqrt{-2+6\sqrt{57}}}{8} \quad (\cos(B) < 0).$$

On tire $B \approx 145,3^\circ$ d'où d'après (1) (2) (3) $C \approx 69,3^\circ$ $D \approx 124,7^\circ$ $E \approx 110,7^\circ$

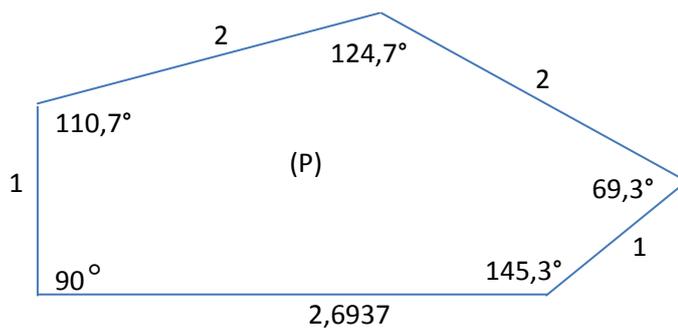
Enfin $b = -\cos(B) - 2 \sin(2B) = -\cos(B) \times (4 \sin(B) + 1)$

$$= \frac{\sqrt{-2+6\sqrt{57}}}{8} \times \left(1 + \frac{-3+\sqrt{57}}{2}\right)$$

Soit $b = \frac{-1+\sqrt{57}}{16} \times \sqrt{-2+6\sqrt{57}}$. On vérifie alors que $b^2 = \frac{-50+22\sqrt{57}}{16}$.

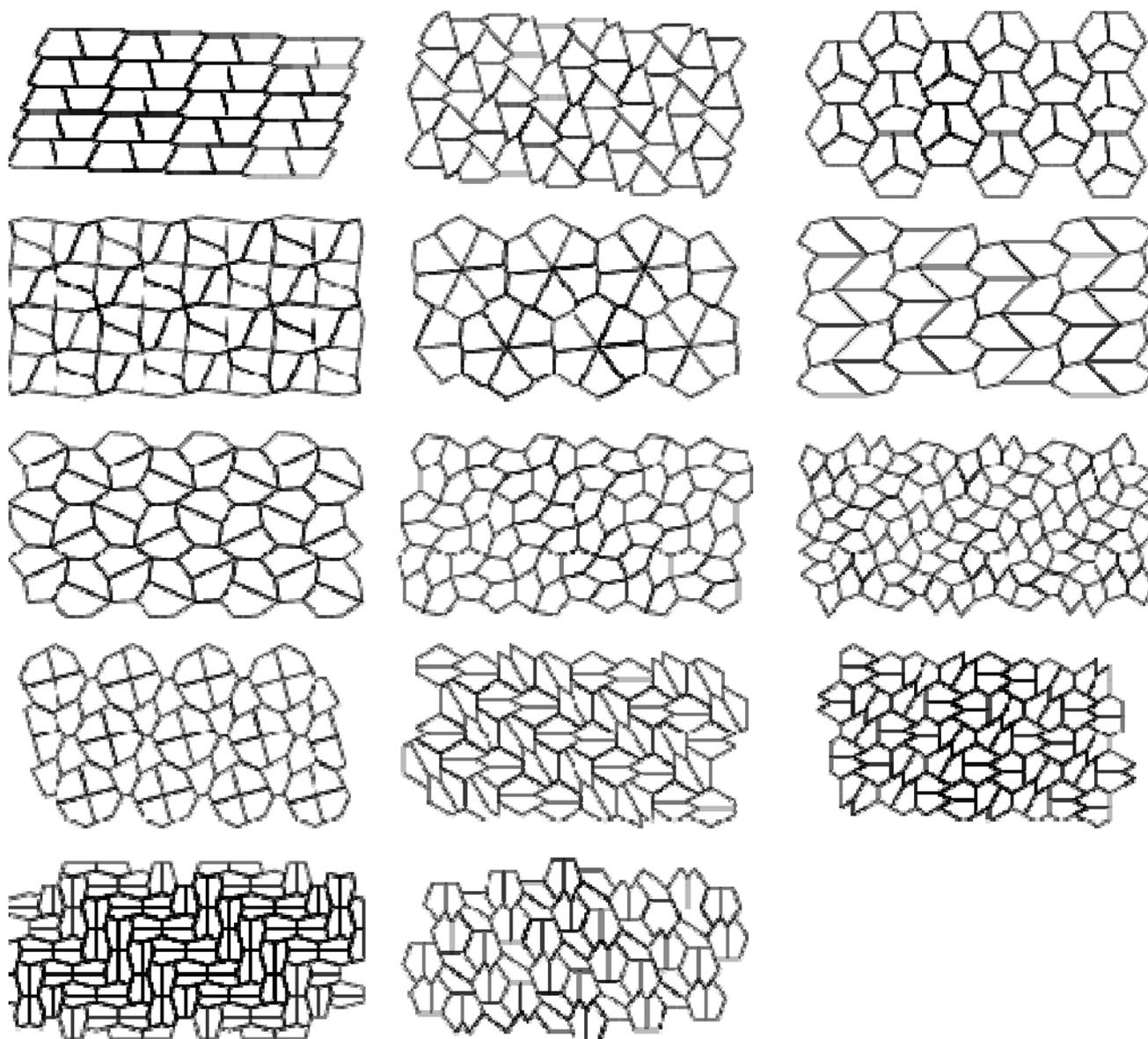
D'où la simplification : $b = \frac{\sqrt{22\sqrt{57}-50}}{4} \cong 2,6937$.

L'affaire est close et on a approximativement (à l'échelle près) :



4) Annexe.

Voici les 14 pavages pentagonaux convexes connus en octobre 2013 :



Bibliographie :

- WELLS David, *Le dictionnaire PENGUIN des curiosités géométriques*, trad. de l'anglais par Marc Genevrier, Eyrolles, Paris, 1996, ISBN 221203637X.
- DELAHAYE Jean-Paul, *Les pavages pentagonaux : une classification qui s'améliore*, Pour la Science, n° 432 octobre 2013, p 78 à 83.

Sitographie :

- <http://mathworld.wolfram.com/PentagonTiling.html>
- <http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html> où vous pourrez voir les pavages en couleur.
- Wikipédia (pavage pentagonal)

En mémoire d'Archimède

David TAINTURIER, Lycée Dumaine Mâcon

En mémoire d'Archimède

Rêvant à enfermer celui qui m'a fait naître
L'homme qui me fit nombre paya de sa vie
Mort à cause d'un soleil fuyant sa fenêtre
Depuis un long cortège d'ombres me poursuit

Longtemps restreint à mes vertus de géomètre
Régnant sur le cercle, grand magicien du disque
En géométrie, le Penseur me sacra maître
D'autres m'ont transcendé pour de l'arithmétique

Nombres pairs de Zeta, aiguilles de Buffon
De toutes les sciences je suis omnipotent
On m'apprend comme le refrain d'une chanson

Mais demain peut-être je contiendrai le monde
Misérables mortels ! Cherchez-moi doucement
En attendant ce jour je continue ma ronde.

3,141592654...

David Tainturier

MISE EN PAGE :
Céline PETITJEAN

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Henri PLANE
Jean-Marie THOMASSIN
François MARCHIVIE
Michel LAFOND
Frédéric METIN
Julien LYOTARD
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 207- 2^{ème} semestre 2013

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE

Université de Bourgogne - UFR Sciences et Techniques

IREM

9 Avenue Alain Savary - BP 47870 - 21078 Dijon cedex

☎ 03 80 39 52 30 - Fax 03 80 39 52 39

@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.

<http://irem.u-bourgogne.fr/>