

Apprentis chercheurs sur la conjecture d'Erdős-Straus

(deuxième partie)

Marie-Line GARDES

gardes.marie-line@wanadoo.fr

Doctorante en didactique des mathématiques.

S2HEP, Université Lyon 1, ENS de Lyon

Denis GARDES

denis.gardes@wanadoo.fr

Professeur, lycée Henri Parriat Montceau-les-mines

Résumé : Dans cet article, nous rendons compte d'une expérimentation en classe de terminale scientifique où les élèves ont pratiqué une activité de recherche mathématique. Après présentation du problème et de quelques éléments mathématiques, nous détaillons le dispositif didactique mis en œuvre dans la classe puis nous analysons les travaux de recherche des élèves.

Mots clés : problème de recherche, terminale scientifique, conjecture d'Erdős-Straus, dimension expérimentale.

1. Les séances de production d'affiche et de débat

La cinquième séance a été consacrée à la production, par chaque groupe, de deux documents : une affiche pour présenter les résultats et un document écrit pour exposer les démonstrations. Ces deux productions représentent deux modes de communication dont les objectifs sont différents. L'objectif principal des productions d'affiche est de préparer le débat en dressant la liste des solutions, conjectures et résultats élaborés par les groupes. Elle sera un support pour la présentation orale lors du débat. La rédaction écrite, quant à elle, vise à obliger chaque groupe à un bilan précis de leurs recherches mais également à faire prendre conscience de la nécessité d'une bonne rédaction. Ce travail demande également aux élèves une exigence de démonstration qui leur permet de discuter de la validité de leurs résultats.

La séance suivante a été dédiée au débat en classe entière. Quatre semaines s'étant écoulées entre la séance de production d'affiche et celle du débat, nous avons proposé

aux élèves de reprendre leurs documents (affiche et rédaction de leurs démonstrations) afin de se remémorer leurs travaux. Ils ont ensuite présenté leurs recherches aux autres groupes puis répondu à leurs questions. L'objectif général de cette phase de débat est la communication des résultats en les soumettant au débat dans la classe. Les élèves sont alors amenés à tester la validité de leurs preuves.

2. La séance d'institutionnalisation et de synthèse

Dans un premier temps, nous avons demandé aux élèves de répondre à un questionnaire sur cette expérimentation avec des questions portant sur leur travail, sur le fait que le problème était non résolu, sur l'organisation et sur ce qu'ils avaient appris. Dans un second temps, nous avons travaillé tous ensemble sur le caractère algorithmique du problème qu'ils n'avaient traité que partiellement. Ensuite, nous avons étudié un théorème central de ce problème, le théorème des restes chinois. Enfin, nous leur avons montré les travaux de différents mathématiciens en les mettant en perspective avec leurs travaux.

Dans un premier temps, l'institutionnalisation permet au professeur de reconnaître la valeur des productions des élèves. Dans un second temps, l'institutionnalisation permet au professeur et à l'élève de reconnaître et légitimer les connaissances (mathématiques ou non) mises en jeu dans la situation, même s'ils les voient de façons différentes. Le problème de recherche proposé aux élèves étant non résolu, le premier objectif de la séance de synthèse est d'apporter aux élèves des informations sur l'avancée des travaux de mathématiciens. Le second objectif, important pour nous, est la valorisation de leurs recherches en les mettant en perspective avec les travaux des chercheurs.

Au vu des différents travaux des groupes et du programme de mathématiques de cette classe, nous avons choisi de porter l'institutionnalisation sur deux thèmes¹ : l'aspect algorithmique du problème et le théorème des restes chinois. Ces deux notions ont été plus ou moins repérées dans le travail des élèves. Le groupe 3 a par exemple émis l'idée de faire un algorithme et de le programmer pour représenter leurs différentes décompositions mais ils ne l'ont pas fait en raison *a priori* de leurs manques de connaissances sur l'algorithmique. Cependant ils ont quand même écrit un arbre pour résumer leurs recherches (voir page 28 FdV n°126). Le groupe 2 a utilisé le théorème des restes chinois intuitivement, sans le connaître lorsqu'ils sont passés des cas modulo 5 et 6 aux cas modulo 30 (voir page 25 FdV n°126). De même le groupe 1 a étudié les cas modulo 2, modulo 3 puis modulo 6 (voir page 22 FdV n°126.).

L'algorithmique est au programme de mathématiques des classes de lycées depuis 2009. Ces élèves ont donc suivi un enseignement d'algorithmique depuis la seconde. Cependant nous pouvons remarquer que ces connaissances sont difficilement disponibles pour eux. Cette recherche de problème peut donc être l'occasion de (re)travailler certaines notions d'algorithmique dans une situation où les élèves en éprouvent le besoin eux-mêmes. Concernant le théorème des restes chinois, il n'est pas explicitement au programme d'arithmétique de la spécialité mathématique mais il

¹ Voir les fiches en annexe 4.

repose sur des notions importantes de ce programme : les théorèmes de Gauss et de Bézout. De plus de nombreux exercices proposés à ce niveau utilisent ce théorème. Il est donc intéressant pour eux d'étudier ce théorème et une application.

Quelques mots sur le travail des mathématiciens sur cette conjecture

Erdős publie le problème en 1950 sous le nom de *conjecture d'Erdős et Straus* en précisant que Straus l'a démontrée pour $n < 5000$. Les premiers articles publiés concernant la résolution de ce problème semblent être ceux d'Oblath en 1950 puis de Rosati en 1954. Viennent ensuite les travaux de Bernstein (1962) et de Yamamoto (1964). Mordell fait une synthèse de ces différents articles en 1969 puis d'autres mathématiciens s'y intéressent, notamment Swett en 1999, Schinzel en 2000 ou Mizony en 2010.

Trois résultats résument ces recherches² :

Résultat 1 : Pour tout n non congru à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840, l'équation [*] a des solutions polynomiales en n .

Résultat 2 : Pour tout n congru à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840, l'équation [*] n'a pas de solution polynomiale en n .

Résultat 3: Actuellement, la conjecture est prouvée pour $n < 10^{17}$.

Le résultat 1 peut être établi selon deux méthodes, l'une empirique (Oblath), l'autre davantage formelle (Rosati, Yamamoto). La première méthode est explicitée par Oblath dans son article de 1950. Il étudie la conjecture pour les nombres premiers de la forme $24k$ puis de la forme $24 \times 5k$ et de la forme $24 \times 5 \times 7k = 840k$. Il remarque alors que pour les nombres de la forme $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 + 840k$, il n'a pas de formule polynomiale générale. La seconde méthode, semblable chez Rosati et Yamamoto, consiste à déterminer une condition nécessaire et suffisante d'existence de solution. Ainsi, après avoir remarqué que les solutions ne pouvaient s'exprimer que sous l'une des deux formes paramétriques :

$$\begin{aligned} na + b + c &= 4abcd \\ a + nb + nc &= 4abcd \end{aligned}$$

et en prenant certaines valeurs de a, b, c et d , ils retrouvent le résultat modulo 840. Cette méthode généralise celle de Oblath.

Le second résultat apparaît la première fois dans l'article de Yamamoto (1964) puis est repris par Schinzel (2000) qui en publie un résultat plus général. Ce résultat montre que les solutions, si elles existent pour ces nombres n congrus $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840, ne pourront pas être trouvées grâce à la même méthode, à savoir une méthode polynomiale.

Illustrons ces deux résultats par des exemples.

Exemple 1 : Pour n congru à 2 modulo 3, en posant $a = 1, b = 1, c = \frac{n-2}{3}$ et $d = 1$, on obtient la solution suivante : $x = \frac{n-2}{3}, y = n - 3, z = \frac{n-2}{3}(n - 3)$.

² Nous résumons ici les idées des démonstrations, pour plus de détails, consulter Gardes 2009 ou Gardes et Mizony 2012.

D'où la décomposition :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n-2}{3}} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{\frac{n-2}{3}(n-3)}.$$

Exemple 2 : Pour n congru à 1 modulo 840, comme 2521 ou 3361, on ne peut pas exprimer a , b et c sous forme de polynôme. Cependant, on peut trouver des décompositions. Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{4}{2521} &= \frac{1}{638} + \frac{1}{55462} + \frac{1}{804199} \\ \frac{4}{3361} &= \frac{1}{850} + \frac{1}{84025} + \frac{1}{571370} \end{aligned}$$

Ainsi on peut trouver une infinité de formules polynomiales mais pas de formules générales pour les nombres de cette forme.

Le résultat 3 résulte de recherches algorithmiques. Yamamoto a démontré la conjecture pour $n < 10^7$ à l'aide d'un ordinateur en 1964 puis Swett en 1999 pour $n < 10^{14}$ et récemment Mizony pour $n < 10^{17}$. L'idée générale sur laquelle repose ces différents algorithmes est la même³ :

1. diminuer le nombre de classes de nombres à étudier. Par exemple modulo 840, il reste 6 classes ($1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$) soit 0,71 % pour lesquelles il n'y a pas de solutions générales polynomiales. De la même façon, modulo 27720, il ne reste que 96 classes soit 0,34%.
2. étudier plus particulièrement, au cas par cas les classes de nombres restantes. Par exemple trouver une décomposition particulière pour n congru à 1 modulo 840 (comme 2521 ou 3361).

Ce bref aperçu des travaux de différents mathématiciens sur la conjecture d'Erdős-Straus met en évidence différentes méthodes de recherche. Ainsi Oblath a *a priori* mené une recherche plutôt empirique alors que Rosati et Yamamoto semblent avoir cherché de manière plus théorique en établissant un résultat général sous forme de condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions. Les dernières recherches et notamment celles de Mizony se caractérisent par leur aspect algorithmique. Cependant une analyse plus fine de leurs articles nous permet de dire que leurs recherches articulent toujours les aspects empiriques ou algorithmiques avec la théorie. La dimension expérimentale a toujours une place et un rôle déterminant dans leurs travaux.

Une mise en perspective des travaux des élèves avec ceux des mathématiciens met en évidence deux similitudes, l'une concernant la démarche de recherche, l'autre les résultats produits. Nous pouvons ainsi observer que les recherches des groupes 1 et 3 s'ancrent davantage dans une recherche de type empirique, voire algorithmique avec l'essai d'éliminer successivement des classes de nombres premiers à étudier, comme ont procédé Oblath, Yamamoto ou Mizony. Au contraire, les travaux du groupe 2 ont

³ Pour plus de détails sur les algorithmes, consulter Swett ou Mizony.

d'avantage une vision générale avec l'essai de déterminer une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions, dans la même idée que Rosati, Yamamoto ou Mizony. Concernant les résultats produits, nous en avons repéré, dans les travaux des élèves, qui sont présents dans les articles des chercheurs. Ce sont les premiers résultats établis par les mathématiciens dans leurs recherches, par exemple, la réduction aux nombres premiers, une relation de divisibilité entre n et abc , un résultat pour les nombres pairs, les multiples de 3 et les multiples de 5.

Quelques mots sur les réponses aux questionnaires

Lors de la séance de synthèse, nous avons demandé aux élèves de répondre à un questionnaire sur le travail mené lors de cette expérimentation. Nous proposons ici quelques résultats quant à leurs réponses concernant le fait que le problème soit non résolu puis concernant les apports de ce travail d'une part et leur vision de la recherche d'autre part.

A la question « avez-vous gardé en tête que ce problème était non résolu ou l'avez-vous oublié ? », sept élèves répondent qu'ils ont oublié cet aspect du problème lors de leur recherche et quatre élèves (ceux du groupe 2) répondent qu'ils l'ont toujours gardé en tête, surtout lorsqu'ils ont rencontré des difficultés (« dans les phases de vide »). Cependant deux d'entre eux précisent avoir cherché le problème « comme s'il était résolu, en faisant « abstraction » de son caractère ouvert. Comme en témoigne la réponse ci-dessous d'un élève, deux sentiments se dégagent face au caractère non résolu du problème : une motivation et un découragement possible.

Elle est à la fois stimulante car elle permet de maintenir un faible espoir d'être le premier à prouver ou non la véracité du problème. Elle peut cependant dans une moindre mesure « décourager » les participants dans le sens où même des chercheurs, des professionnels n'en sont pas venus à bout. (élève du groupe 3)

Plusieurs élèves précisent aussi que « c'est réconfortant » de savoir en amont que le problème est non résolu, surtout quand « on ne trouve pas ». Pour ces élèves, savoir que le problème était non résolu n'a donc pas freiné leurs recherches. Pour ceux qui l'ont oubliée, cette information n'a pas eu d'influence sur leur travail et pour les autres, cela leur a permis relativiser leurs résultats et d'étudier « toutes leurs idées ou pistes possibles ». Précisons cependant que ce n'est pas toujours le cas. Pour certains élèves, cela peut véritablement empêcher une recherche sur ce problème s'ils savent qu'il n'a jamais été résolu par la communauté mathématique. Dire ou ne pas dire que le problème est encore ouvert est donc une information à préciser selon le public concerné par la recherche.

Concernant les apports de cette recherche, les élèves sont assez unanimes pour dire qu'ils n'ont pas appris de notions mathématiques nouvelles mais qu'ils ont utilisé, revu et consolidé différentes connaissances telles que les fractions, les congruences et la partie entière. Sur l'activité de recherche en elle-même, ils pensent qu'elle demande de l'organisation, de la patience, une mobilisation de connaissances solides, un esprit inventif et ouvert afin de voir le problème sous différents angles. Un élève précise qu'il a découvert une activité « qui se vit ». Les élèves précisent également que cette expérimentation leur a apporté une nouvelle méthode de travail,

principalement en groupe. Ils se sont rendu compte ainsi de l'importance du raisonnement.

Les réponses concernant leur vision de la recherche mathématique sont assez identiques : cette expérience modifie leur vision générale des mathématiques (intérêt, curiosité) mais aussi celle des mathématiques dans l'enseignement supérieur. En revanche, ils pensent que cela n'aura pas d'influence sur leur pratique des mathématiques dans le cours ordinaire de mathématiques en terminale scientifique.

Conclusion

Dans cet article nous avons rendu compte d'une expérimentation en classe de terminale scientifique où les élèves ont pratiqué une activité de recherche mathématique. Nous voulons déjà préciser que le temps long de la recherche (sept semaines) a été bénéfique sur la recherche des élèves et notamment pour leurs productions. Il n'a pas été un frein pour la dévolution du problème aux élèves qui s'est toujours réalisée au cours des différentes séances. Certains élèves regrettent même un manque de temps pour aller plus loin dans leur recherche sur la conjecture ! Les premières analyses des travaux des élèves (qui demandent à être affinées avec d'autres analyses complémentaires) ont mis en évidence leur richesse quant aux différents processus de recherche mis en œuvre, aux connaissances mobilisées et aux résultats produits. Notre méthodologie de mise en perspective avec les travaux des chercheurs nous a permis de confirmer ces aspects de leur activité mathématique lors d'une recherche. En effet, nous avons repéré des « similitudes » tant dans la démarche de recherche que dans les résultats produits. La phase d'institutionnalisation a été construite à partir de leurs travaux afin de revenir sur deux notions entrevues dans leur recherche et présentes dans les programmes de la classe. Cela a permis de consolider et approfondir leurs connaissances algorithmiques et arithmétiques.

Pour résumer, cette expérimentation a permis aux élèves d'utiliser et consolider un certain nombre de connaissances mathématiques, de pratiquer une « nouvelle méthode de travail » (expression d'un élève) et de découvrir un autre aspect de l'activité mathématique. Le point de vue de ces élèves est encourageant pour les effets et la mise en place de ce genre de travail en classe !

Bibliographie

ALDON, G., CAHUET, P.-Y., DURAND-GUERRIER, V., FRONT, M., KRIEGER, D., MIZONY, M., & TARDY, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP.

ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et Situation-problème*, IREM de Lyon, université Claude-Bernard, Lyon 1, 117p.

ARSAC, G. et MANTE, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, Scéren CRDP de Lyon.

BERNSTEIN, L. (1962). Zur Lösung der diophantischen Gleichung $m/n = 1/x + 1/y + 1/z$, insbesondere im Falle $m = 4$. *Journ. F. reine angew. Math.*, vol 211, 1-10.

- BROUSSEAU, G. (1986) Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. *Thèse d'état*. Université Victor Segalen-Bordeaux II.
- ERDÖS, P. (1950). On a diophantine equation. (Hungarian. Russian, English summaries), *Mat. Lapok* 1, 1950, pp. 192-210.
- GARDES, ML. (2009). Etude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème ouvert en arithmétique. *Mémoire de master 2 recherche Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences (HPDS)*, soutenu en juin 2009. Université Claude Bernard Lyon 1.
- GARDES, ML. (2010). Investigations arithmétiques en terminale: entre essais et conjectures. *Revue Petit x83*, Ed. IREM de Grenoble, 51-78.
- GARDES, ML. et MIZONY, M. (2012). La conjecture d'Erdős-Straus: expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM* 87 - pp. 79-90.
- HOUEMENT, C. (2012) Démarche expérimentale en résolution de problèmes. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp.1389-1399). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- MIZONY, M. (2010) Sur la conjecture d'Erdős-Straus. *Revue Sésamath*. <http://revue.sesamath.net/IMG/pdf/articleMichelMizony2.pdf>
- MORDELL, L.J.(1969). *Diophantine equations*, London, New York : Academic press, 1969, chapter 30.
- OBLATH, R. (1950). Sur l'équation diophantienne $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$, *Mathesis* 59 ; 308-316.
- ROSATI, LA. (1954). Sull'equazione diofantea $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, serie 3, volume 9, n.1, 59-63.
- SCHINZEL, A. (2000). On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx. Comment. Math.* 28 : 187-194, 2000.
- SWETT, A. (1999). The Erdős-Strauss Conjecture. Disponible sur Internet : <http://math.uindy.edu/swett/esc.htm> (consulté le 30 juin 2011).
- YAMAMOTO, K. (1965). On the diophantine equation $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$. *Mem. Fac. Sci. Kyushu University*. Ser A. 19, 37-47.

Annexe 1 : Productions du groupe 1

1.1 Synthèse pour l'affiche.

- Si on trouve pour un nombre, on trouve pour tous des multiples $\rightarrow$ recherche limitée aux nombres premiers.
- On utilise l'écriture suivante :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z}$$

On constate que si on prend $y = \text{ent}\left(\frac{n}{u}\right) + 1$, on a :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\text{ent}\left(\frac{n}{u}\right) + 1} + \frac{x}{n \times (\text{ent}\left(\frac{n}{u}\right) + 1)}$$

On cherche donc à écrire $\frac{x}{n \times (\text{ent}\left(\frac{n}{u}\right) + 1)}$ en 2 fractions de la forme $\frac{1}{k}$ $\rightarrow$ on ne peut avoir que $x=1$ ou $x=3$ (sinon n est pair et donc pas premier)

~~On raisonne modulo 6 :~~

- si $x=1$, alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{\text{ent}\left(\frac{n}{u}\right) + 1} + \frac{1}{2n \times (\text{ent}\left(\frac{n}{u}\right) + 1)} + \frac{1}{2n \times (\text{ent}\left(\frac{n}{u}\right) + 1)}$

- si $x=3$, on raisonne modulo 6.

* si $z \equiv 0(6)$ ou $z \equiv 3(6)$, $\frac{3}{z} = \frac{3}{3k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$

Donc $\frac{4}{n} = \frac{1}{u} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$

* si $z \equiv 2(6)$ ou $z \equiv 4(6) \rightarrow \cancel{z=2k} z$ est divisible par 2 donc $z = 2k$.

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$$

Donc $\frac{4}{n} = \frac{1}{7} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$.

* si $z \equiv 1(6)$ ou $z \equiv 3(6)$, nous n'avons pas trouvé de possibilité pour décomposer $\frac{3}{z}$ en 2 fractions de la forme $\frac{1}{k}$.

Autre technique:

~~Conjecture:~~

On a $\frac{4}{n} = \frac{4k}{nk}$

si on prend le 1^{er} multiple de 8 ou de 12 supérieur à n pour $2k$, on trouve presque toujours une solution de la forme $\frac{2x}{kn} + \frac{2c}{kn} + \frac{y}{kn}$ avec x et y des diviseurs de kn .

1.2 Démonstrations

GROUPE 1 = Démonstrations

- Quand on a trouvé la solution pour un nombre n , on a trouvé la solution pour tous ses multiples.

En effet, si $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, pour $n' = kn$, on aura :

$$\frac{4}{kn} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} + \frac{1}{kc} \times \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{kn} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} + \frac{1}{kc}$$

Donc cette affirmation est vraie.

- Lorsque l'on écrit $\frac{4}{n}$ sous la forme

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ avec } y = \text{ent}\left(\frac{n}{4}\right) + 1$$

$$\text{et } z = n \times \left(\text{ent}\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right), \text{ on a conjecturé}$$

grâce à des essais que si $n \equiv 3(4)$, alors $x = 1$

et si $n \equiv 1(4)$, alors $x = 3$, mais nous ne l'avons pas démontré.

- On a cherché les cas pour lesquels $\frac{x}{z}$ peut se décomposer en 2 fractions de numérateur 1.

$$\text{si } x = 1, \text{ on a : } \frac{x}{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}$$

- si $x = 3$, on a : $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{3}{z}$.

* si $z \equiv 0(3)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} z \equiv 0(6) \\ \text{ou} \\ z \equiv 3(6) \end{cases}$

$\frac{3}{z} = \frac{3}{3k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$

Ainsi $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$, avec $k \in \mathbb{N} / 3k = z$.

* si $z \equiv 2(6)$ ou $z \equiv 4(6)$, alors z est pair. On pose alors $z = 2q, q \in \mathbb{N}$.

On a : $\frac{3}{z} = \frac{3}{2q} = \frac{1}{2q} + \frac{2}{2q} = \frac{1}{2q} + \frac{1}{q}$

Ainsi $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2q} + \frac{1}{q}$.

2 cas restent problématiques : si $x = 3$ et $z \equiv 1(6)$
ou $x = 3$ et $z \equiv 5(6)$.

Annexe 2 : Productions du groupe 2

1.1 Synthèse pour l'affiche

SYNTHÈSE

on a prouvé qu'on peut toujours trouver des entiers a, b, c , tel que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$:

$n \equiv 0(2)$ (donc pour tout n , pair)

$n \equiv 0(3)$

$n \equiv 0(5)$

rectangle

on a gardé la piste du parallélogramme ∇ , de la courbe en 3D et du raisonnement par l'absurde, mais qui n'ont pas abouti.

on a aussi prouvé que la relation est possible pour $a, b, c \equiv 0(4)$ et $a, b, c \equiv 0(16)$

et a, b, c n'est pas une puissance de 4).

on a prouvé que $a, b, c = n, k, k \in \mathbb{Z}$.

on a aussi abouti à une relation qui pourrait être utile : $16n^2 = a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2$

1.2 Démonstrations

Groupe 2

Preuves.

$$* \quad \frac{4}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{4}{m} = \frac{ab+ac+bc}{abc}$$

preuve: $\frac{4}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{m} = \frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{ab}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{m} = \frac{ab+ac+bc}{abc}$$

* Si $m \wedge 4 = 1$, $abc \equiv 0(4)$ et abc ne peut pas être une puissance de 4.

$$\frac{4}{m} = \frac{ab+ac+bc}{abc} \Leftrightarrow 4abc = (ab+ac+bc)m$$

On se place dans le cas où $m \wedge 4 = 1$.

$m \nmid 4abc$ et $m \wedge 4 = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, $m \mid abc$.

$4 \mid (ab+ac+bc)m$ et $m \wedge 4 = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, $4 \mid (ab+ac+bc)$ donc $ab+ac+bc \equiv 0(4)$.

(sans intervenir a, b et bc)

$ab+ac+bc \equiv 0(4)$ donc il y a quatre possibilités:

- * $ab \equiv ac \equiv bc \equiv 0(4)$
 - * $ab \equiv ac \equiv 2(4)$ et $bc \equiv 0(4)$
 - * $ab \equiv 1(4)$, $bc \equiv 3(4)$, $ac \equiv 0(4)$
 - * $ab \equiv ac \equiv 1(4)$ et $bc \equiv 2(4)$
- } par conséquent, $abc \equiv 0(4)$

On cherche à déterminer à quoi est congru abc modulo 4 dans le dernier cas.

$$\begin{cases} ab \equiv 1(4) \\ ac \equiv 1(4) \\ bc \equiv 2(4) \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} abc \equiv 1(4) \\ abc \equiv b(4) \\ abc \equiv 2a(4) \end{cases} \quad b \equiv c \equiv 2a(4)$$

$$ab \equiv 1(4) \Leftrightarrow a \equiv b \equiv 1(4) \text{ ou } a \equiv b \equiv 3(4)$$

$$ac \equiv 1(4) \Leftrightarrow a \equiv c \equiv 1(4) \text{ ou } a \equiv c \equiv 3(4)$$

or, $c \equiv b \equiv 2a(4)$, il est donc impossible que $ab \equiv ac \equiv 1(4)$ et $bc \equiv 2(4)$

Donc dans tous les cas, $\boxed{abc \equiv 0(4)}$

De plus, $m \nmid abc$ et $m \wedge 4 = 1$. Ce n'est possible que si $\boxed{abc}$ n'est pas une puissance de 4.

$$\tau(abc) = m(ab + ac + bc)$$

or $m \wedge \tau = 1$ d'où d'après le lemme de Gauss
 $ab + ac + bc \equiv 0(4)$ ou $abc \equiv 0(4)$

$$abc \equiv 0(m) \text{ d'où } abc = mk \quad k \in \mathbb{N}$$

$$(bc + ac + ab)m = \tau mk$$

$$(bc + ac + ab) = \tau k$$

$$bc + ac + ab \equiv 0(4)$$

$$bc + ac + ab = 4k'$$

$$\begin{cases} abc = mk \\ ab + bc + ac = 4k' \end{cases}$$

$$\begin{cases} abc = mk \\ ab + bc + ac = 4k' \end{cases}$$

Annexe 3 : Productions du groupe 3

1.1 Affiches

LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS (OK 5)

Énoncé : Pour tout entier naturel $n > 2$, on peut trouver trois entiers naturels non nuls a, b, c tels que :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Étude selon la parité de n

* n est **pair**

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$$

→ Avec $\frac{n}{2}$ entier

* n est **impair**

Si pour tout n premier > 2 s'il existe a, b, c tel que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ alors pour tout multiple de n il existe a', b', c' tel que

$$\frac{4}{n'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$$

16/04/2012

Or si on montre que l'on peut décomposer en 3 fractions $\frac{4}{n}$, avec n premier on peut alors décomposer en 3 fractions $\frac{4}{n'}$, avec n' impair, car n' multiple de n .

On cherche t , tel que $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} > 0$

avec t le plus petit possible. $t \in \mathbb{N}^*$

On distingue 2 cas :

→ 1^{er} cas : $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{N}^*$

On peut alors décomposer $\frac{4}{n}$ en $\frac{1}{t} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$

→ 2^{ème} cas : $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} = \frac{3}{k} \quad k \in \mathbb{N}^*$

On distingue 2 sous-cas :

- Si k est pair : $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} + \frac{1}{\frac{k}{2}}$

$\frac{k}{2}$ est entier car k est pair

- Si k est impair : On distingue à nouveau 2 sous-cas.

* Si k possède un diviseur congru à 2 modulo 3 alors : $\frac{4}{n} = \frac{3d-1}{dk'} + \frac{1}{t} + \frac{1}{k(\frac{d+1}{3})}$

* Si k n'a pas de diviseur congru à 2 modulo 3 ou 0 modulo 3 alors il est plus difficile de trouver une solution. Il faut alors changer t

1.2 Démonstration

Propriété : Soit $(P_n) : \frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ avec $n \in \mathbb{O}(2)$

Initialisation :

On vérifie la propriété (P_n) au rang 1.
 $n = 2$.

$$\begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 = 2 \text{ donc } (P_n) \text{ est vraie au rang 1.}$$

Hypothèse :

On suppose la propriété vraie au rang h .

$$(P_n) : \frac{4}{2h} = \frac{1}{2h} + \frac{1}{2h} + \frac{1}{\frac{2h}{2}} \text{ car } n = 2 \times h.$$

Hérédité :

On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $h+1$.

$$\frac{4}{2h+2} = \frac{1}{2h+2} + \frac{1}{2h+2} + \frac{1}{h+1}.$$

On pose $h' = h+1$

$$\text{donc } \frac{4}{2h'} = \frac{1}{2h'} + \frac{1}{2h'} + \frac{1}{h'}$$

L'hérédité est donc prouvée

Alors la propriété (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{O}(2)$

En conclusion on a trouvé 3 réels notés a, b, c qui vérifie $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ pour tout $n \in \mathbb{O}(2)$.

Annexe 4 : Fiche de travail pour la phase d'institutionnalisation

1 Au sujet de l'algorithmique

Le groupe 3 a émis l'idée de faire un algorithme mais ne l'a pas fait. Nous proposons donc de travailler sur cet aspect de la recherche grâce au logiciel ALGOBOX.

Question 1

Lire et décrire ce que fait l'algorithme suivant :

```
1  VARIABLES
2  n EST_DU_TYPE NOMBRE
3  x EST_DU_TYPE NOMBRE
4  y EST_DU_TYPE NOMBRE
5  z EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  LIRE n
8  SI (n%2==0) ALORS
9    DEBUT_SI
10   x PREND_LA_VALEUR n
11   y PREND_LA_VALEUR n
12   z PREND_LA_VALEUR n/2
13   AFFICHER x
14   AFFICHER y
15   AFFICHER z
16   FIN_SI
17   SINON
18     DEBUT_SINON
19     AFFICHER "pas de décomposition avec cette formule pour n= "
20     AFFICHER n
21     FIN_SINON
22 FIN_ALGORITHME
```

Question 2

A partir de vos recherches, essayez de construire un algorithme avec AlgoBox permettant de décomposer d'autres nombres. Vous préciserez alors les nombres restants, c'est à dire ceux dont vous n'avez pas de décomposition.

2 Au sujet d'un résultat général

Vous avez montré que si l'équation admet des solutions pour n alors elle en admet pour tout multiple de n . Ainsi, grâce au théorème de décomposition en facteurs premiers, la recherche de la conjecture d'Erdős-Straus peut se réduire au cas $n = p$ premier. Dans cet exercice, nous allons montrer que le problème peut être encore réduit en éliminant d'autres cas.

Question 1

1. Le groupe 1 a écrit que pour $n \equiv 3[4]$, il existait une décomposition. Prouver cette conjecture.
2. Pour quels nombres, modulo 4, la conjecture reste-t-elle à prouver ?

Question 2

A l'aide des résultats du groupe 1, montrer que :

1. Pour $n \equiv 0[6]$ et $n \equiv 3[6]$, la conjecture est vérifiée.
2. Pour $n \equiv 2[6]$ et $n \equiv 4[6]$, la conjecture est vérifiée.

Reste donc les cas $n \equiv 1[6]$ et $n \equiv 5[6]$ à traiter.

On va montrer que les cas $n \equiv 1[4]$ et $n \equiv 1[6]$ ouis $n \equiv 1[4]$ et $n \equiv 5[6]$ reviennent respectivement aux cas $n \equiv 1[12]$ et $n \equiv 5[12]$.

Question 3

Proposition. *Si m et n sont premiers entre eux alors la condition*

$$\begin{cases} a \equiv b[n] \\ a \equiv b[m] \end{cases}$$

est équivalente à la condition $a \equiv b[mn]$.

1. En utilisant le théorème de Gauss, démontrer cette proposition.

Soit m et n premiers entre eux. On cherche toutes les solutions entières de

$$\begin{cases} x \equiv c[m] \\ x \equiv d[n] \end{cases}$$

On considère u et v tels que $um + vn = 1$.

Théorème. *On obtient une solution en prenant $x = cum + dvn$. Toutes les solutions sont alors de la forme $x + kmn$.*

1. Vérifier que $x = cum + dvn$ est une solution.
2. Vérifier que pour tout k entier, $x + kmn$ est une solution.
3. Si x et y sont deux solutions, montrer, en utilisant la proposition ci-dessus que $y = x + kmn$.

Question 4

1. Montrer que le cas $n \equiv 1[6]$ et $n \equiv 1[4]$ revient au cas $n \equiv 1[12]$.
2. Montrer que le cas $n \equiv 5[6]$ et $n \equiv 1[4]$ revient au cas $n \equiv 5[12]$.

Question 5

Le groupe 3 a travaillé de manière semblable mais en utilisant d'autres congruences. Leur recherche montre qu'ils ont une décomposition pour tout n non congru à 1 modulo 8 et 1 modulo 3.

Montrer, grâce au théorème ci-dessus que cela revient à $n \equiv 1[24]$.

Question 6

Un résultat général, énoncé la première fois par Oblath en 1950 et utilisé dans de nombreuses recherches sur la conjecture est le suivant : pour tout n non congrus à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840, la conjecture est vérifiée.

$$840 = 24 \times 5 \times 7.$$

Modulo 24, nous avons montré qu'il ne restait qu'une classe de nombres pour lesquels la conjecture reste à prouver : $n \equiv 1[24]$.

Modulo 5, on peut trouver des solutions pour $n = 2$ et $n = 3$. Il reste donc deux classes pour lesquelles la conjecture reste à prouver : $n \equiv 1[5]$ et $n \equiv 4[5]$.

Modulo 7, on peut trouver des solutions pour $n = 3, n = 5$ et $n = 6$. Il reste trois classes pour lesquelles la conjecture reste à prouver : $n \equiv 1[7], n \equiv 2[7]$ et $n \equiv 4[7]$.

Grâce à ces informations et à l'aide du théorème des restes chinois, démontrer le résultat modulo 840.

Annexe 5 : Questionnaire

Sur l'activité de recherche mathématique

Arsac et Mante dans *Les pratiques du problème ouvert* expliquent que
« Le but de la pratique du problème ouvert est [...] de placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique, c'est à dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur en mathématiques. (p.13) »

1. Selon vous, quel serait le travail d'un chercheur sur la conjecture d'Erdős-Straus ?
2. Pensez-vous que votre travail s'en est approché ? Si oui par quels côtés, si non pourquoi ?
3. Si vous aviez à communiquer à une autre classe cette expérience de recherche de la conjecture d'Erdős-Straus, que mettriez-vous en avant ?

Sur le fait que ce soit un problème non résolu

Au début des séances, nous vous avons dit que vous alliez travailler sur un problème non résolu.

4. Avez-vous gardé en tête que ce problème était non résolu ou l'avez-vous oublié ?
5. Si vous n'avez pas oublié, à quels moments de votre recherche avez-vous pensé que c'était un problème non résolu ?
6. Comment cela a-t-il influé sur votre recherche ?

Sur l'organisation des séances

Indiquez un indice de pertinence concernant l'organisation des différents temps de recherche.

1. Lors de la première séance, vous avez disposé de 45 min de recherche individuelle. Que pensez-vous de cette phase de travail individuel ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent
------------------	------------------	-----------	-------------------

Commentaires :

2. Les séances collectives de recherche ont duré 2 heures. Que pensez-vous de ces séances de travail ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent
------------------	------------------	-----------	-------------------

Commentaires :

3. Vous avez fait une présentation de votre travail aux autres groupes après 2 séances de travail. Que pensez-vous de ce temps de mise en commun ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent
------------------	------------------	-----------	-------------------

Commentaires :

4. Lors de la séance 4, vous avez rendu deux productions : une affiche et un compte-rendu des démonstrations de vos résultats. Que pensez-vous de ce travail demandé ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent
------------------	------------------	-----------	-------------------

Commentaires :

5. Lors de la séance 6, nous avons fait un débat sur les différentes productions des groupes. Que pensez-vous de ce débat ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent
------------------	------------------	-----------	-------------------

Commentaires :

6. Que pensez-vous de la répartition temps de travail individuel / temps de travail collectif ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent
------------------	------------------	-----------	-------------------

Commentaires :

7. Que pensez-vous de la répartition temps de travail en groupe / temps de mise en commun ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent
------------------	------------------	-----------	-------------------

Commentaires :

8. Que pensez-vous de la durée globale de ce travail ?

Non pertinent	Peu pertinent	Pertinent	Très pertinent
------------------	------------------	-----------	-------------------

Commentaires :

Sur votre travail

1. Quelles connaissances mathématiques avez-vous apprises, revues ou consolidées durant ce travail de recherche ?
2. Qu'avez-vous appris sur l'activité de recherche en mathématiques ?
3. Plus généralement, pour vous, quels sont les apports de cette expérience ?
4. Que vous manque-t-il, selon vous, pour avancer dans votre recherche ?
5. Avez-vous pensé au problème entre les séances ? Si oui, pour quelles raisons ?
6. Avez-vous eu envie d'aller sur Internet ? Si oui, pour quelles raisons ?
7. Cette expérience aura-t-elle une influence sur votre manière de faire des mathématiques ?