Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 74.

Il est assez facile de partager un carré en un nombre fini de triangles rectangles isocèles tous inégaux en tailles.
Il est plus difficile de partager un carré en un nombre fini de triangles rectangles isocèles tous inégaux en tailles si <u>on interdit le tracé d'une diagonale du carré</u>.
Saurez-vous résoudre ces deux énigmes ?

PROBLÈME – 74.

Quelle est la particularité de la courbe de représentation paramétrique :

$$x(t) = 10\cos^6(t) - 15\cos^8(t) + 6\cos^{10}(t)$$
$$y(t) = 10\sin^6(t) - 15\sin^8(t) + 6\sin^{10}(t)$$

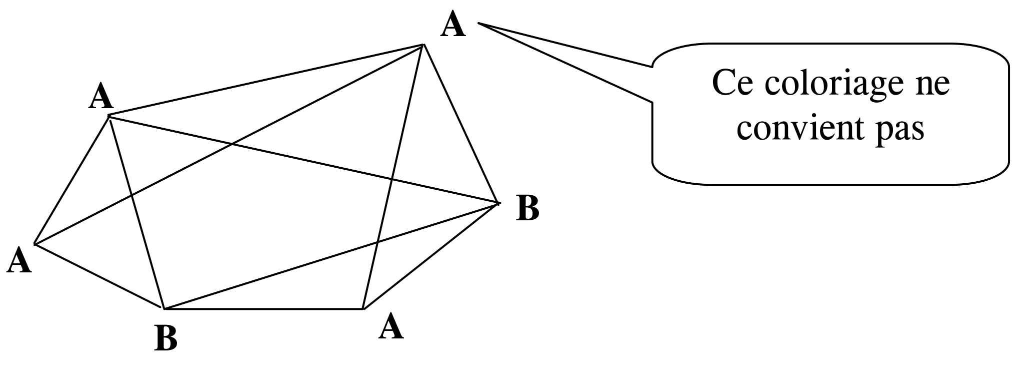
si $t \in [0, \pi/2]$?

Solutions

JEU – 73.

Étant donné un graphe simple, connexe, montrer qu'on peut colorer ses sommets avec deux couleurs A, B de telle sorte que tout sommet coloré A possède une majorité* de sommets voisins colorés B et réciproquement.

* Majorité signifie ici au moins 50 %.



Solution :

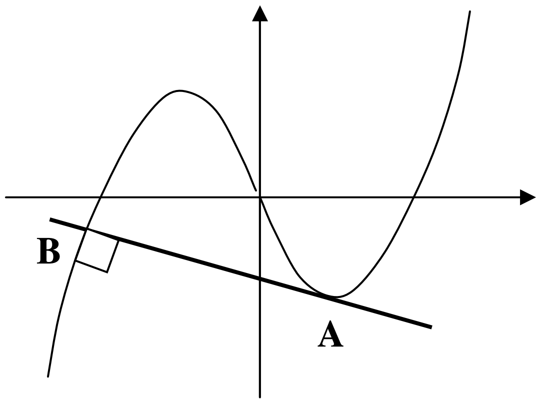
Parmi tous les coloriages possibles, soit G un de ceux qui <u>maximise</u> le nombre d'arêtes colorées (A---B).
Supposons que G ne vérifie pas la propriété voulue, et par exemple qu'un sommet S coloré A a une majorité de voisins colorés A.
Alors le graphe G' obtenu en colorant le sommet S avec B au lieu de A aurait un nombre d'arêtes colorées (A---B) supérieur à celui de G. Il y a contradiction, donc G vérifie la propriété voulue.

PROBLEME – 73

Dans un repère orthonormé, est-ce que la cubique d'équation $y = x^3 - x$ possède une tangente-normale ?

Voir le schéma ci-contre montrant une tangente-normale.

Ce schéma est peut-être faux !



Solution :

Supposons que la tangente (T) en A à la courbe (C) soit aussi normale en B.
A a pour coordonnées $(a, a^3 - a = y_A)$.
Notons $y'_A = 3\,a^2 - 1$ la dérivée en A.
(T) a pour équation $y = y'_A\,(x - a) + y_A$ de coefficient directeur $y'_A = 3\,a^2 - 1$.

Si dans le système formé des équations de (C) et de (T), on élimine y, on obtient l'équation aux abscisses $x^3 - x = (3\,a^2 - 1)(x - a) + a^3 - a$ qui s'ordonne en
$x^3 - 3\,a^2\,x + 2a^3 = 0$ (1) dont la racine double $x = a$ est connue.

Par suite, (1) équivaut à $(x - a)^2\,(x + 2a) = 0$ donc le point B a pour abscisse $-2\,a$.

En B, le coefficient directeur de la tangente à (C) est $\beta = 3\,(-2a)^2 - 1$.
Comme le repère est orthonormé, (T) est normale en B à (C) si et seulement si le produit des deux coefficients directeurs $\beta\, y'_A$ est égal à -1.

Or $\beta\, y'_A = -1$ équivaut à $(12a^2 - 1)\,(3\,a^2 - 1) = -1$ soit $36\,a^4 - 15\,a^2 + 2 = 0$

qui n'a pas de solution réelle puisque $36\,a^4 - 15\,a^2 + 2 = \left(6a^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}$.

Cette cubique n'a pas de tangente-normale.

Rectificatif

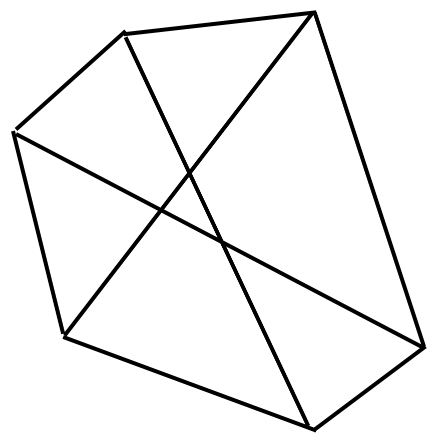
Dans la feuille de vigne précédente, une figure fausse rendait la solution du JEU - 72 incorrecte. De plus la participation de Richard Beczkowski (qui a aussi résolu le problème 72) avait été omise.
Voici le corrigé :

JEU – 72.

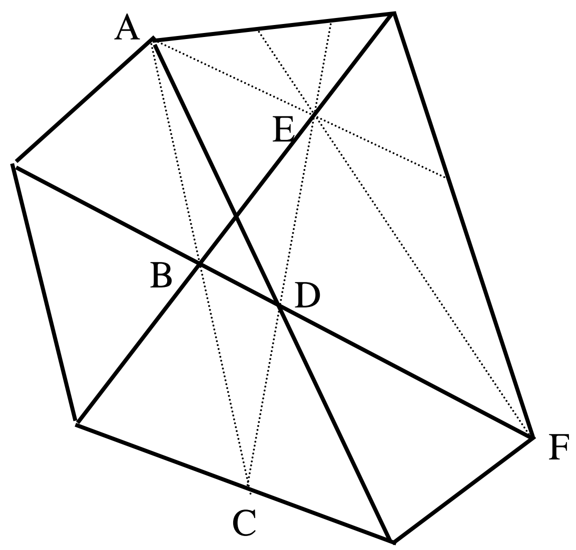
Dans l'hexagone quelconque H ci-contre, 3 diagonales sont tracées.

Elles partagent H en 7 parties (4 triangles et 3 quadrilatères).

Il s'agit de rajouter un nombre fini de sécantes (segments joignant deux points du bord de H) de telle sorte que toutes les parties soient des triangles.
Autrement dit, il faut éliminer les quadrilatères.



Richard Beczkowski donne deux solutions.
Certaines solutions fonctionnent pour certains hexagones et pas pour d'autres :



Pour l’hexagone proposé, 4 sécantes suffisent. On trace AB qui donne C. Puis CD qui donne E. Il reste deux quadrilatères qu’on élimine en traçant AE et FE.

Par contre :
Trois sécantes suffisent avec l’hexagone ci-dessous : On trace AB, qui donne C, puis on trace CD. Il reste un seul quadrilatère qu’on élimine en traçant ED.

Je pense qu’on peut réaliser une telle triangulation à partir d’un polygone convexe quelconque.