Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 75.

Démontrer sans calculette que :

$$\frac{(9994^4+4)(9998^4+4)}{(9995^4+4)(9996^4+4)} = \frac{(9993^2+1)(9999^2+1)}{(9994^2+1)(9996^2+1)}$$

PROBLÈME – 75.

Pour résoudre l'équation (1) $e^{x-2} + e^{x+8} = e^{4-x} + e^{3x+2}$ un élève dit :

On sait que $e^a + e^b = e^{a \times b}$ et que l'exponentielle est bijective.
Donc (1) $\Leftrightarrow$ $(x-2)(x+8) = (4-x)(3x+2)$
Je développe : $x^2 + 6x - 16 = -3x^2 + 10x + 8$
Je réduis : $4x^2 - 4x - 24 = 0$
Je factorise : $4(x+2)(x-3) = 0$
Les solutions sont $x = -2$ ou $x = 3$.

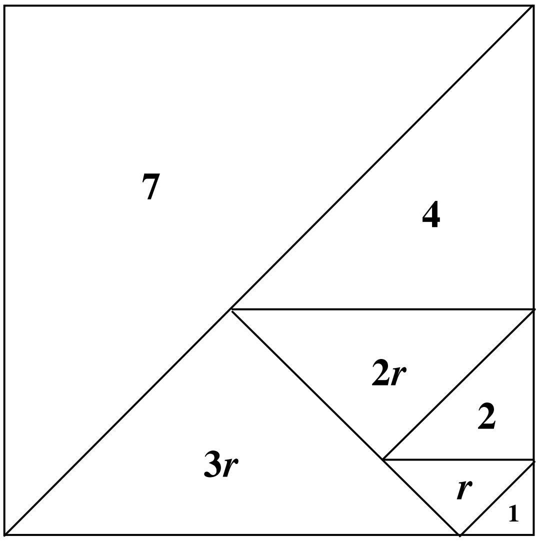
Quelle note lui mettez-vous ?

Solutions

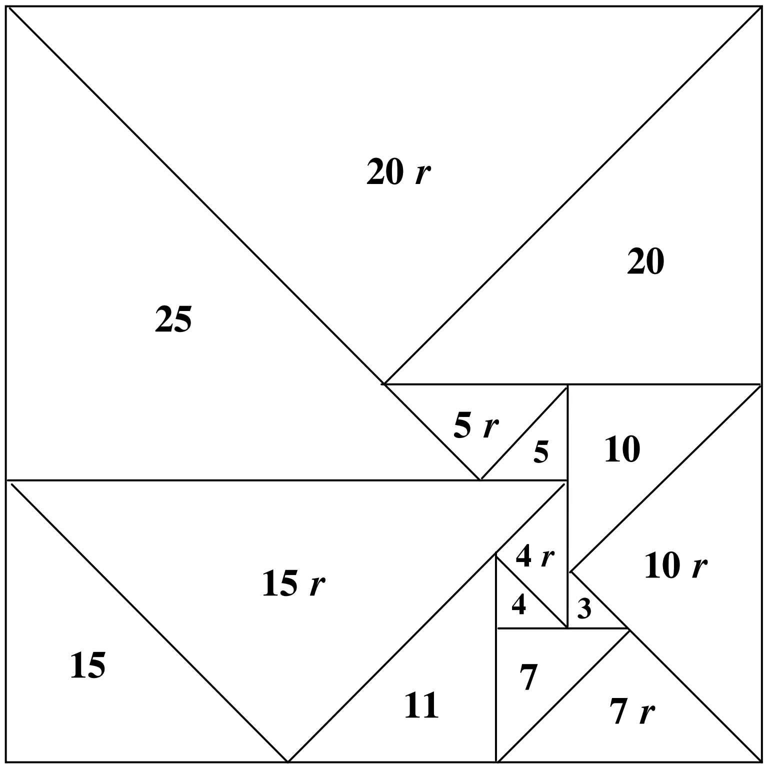
JEU – 74.
Il est assez facile de partager un carré en un nombre fini de triangles rectangles isocèles tous inégaux en tailles.
Il est plus difficile de partager un carré en un nombre fini de triangles rectangles isocèles tous inégaux en tailles si <u>on interdit le tracé d'une diagonale du carré</u>.
Saurez-vous résoudre ces deux énigmes ?

Solution :

Si on a droit à la diagonale, on a par exemple la solution ci-dessous dans laquelle on a posé $r = \sqrt{2}$. Le nombre inscrit dans un triangle est son côté.



Si on n'a pas droit à la diagonale, on a la solution ci-dessous qui n'est peut-être pas la plus simple :



PROBLÈME – 74.

Quelle est la particularité de la courbe de représentation paramétrique :

$$x(t) = 10\cos^6(t) - 15\cos^8(t) + 6\cos^{10}(t)$$
$$y(t) = 10\sin^6(t) - 15\sin^8(t) + 6\sin^{10}(t)$$

si $t \in [0\,,\pi/2]$?

Solution :

Cette courbe est un segment de droite ! (qu'on peut admirer en bas) En effet :

Posons $u_n = \cos^{2n}(t) + \sin^{2n}(t)$ $c = \cos(t)$ et $s = \sin(t)$.

On a : $u_0 = 2$ $u_1 = 1$ $u_2 = c^4 + s^4 = (c^2 + s^2)^2 - 2\, c^2 s^2 = 1 - 2\, c^2 s^2$.

Puis :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - c^2 s^2 u_n &= \cos^{2n+2}(t) + \sin^{2n+2}(t) - c^2 s^2 (\cos^{2n}(t) + \sin^{2n}(t)) \\
&= \cos^{2n+2}(t) + \sin^{2n+2}(t) - \cos^{2n+2}(t)\,(1 - c^2) - \sin^{2n+2}(t)\,(1 - s^2) \\
&= \cos^{2n+4}(t) + \sin^{2n+4}(t) = u_{n+2}
\end{aligned}$$

Donc, si on pose $p = c^2 s^2$ on a la récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - p\, u_n$

On en tire :

$u_2 = c^4 + s^4 = 1 - 2\,p$. [déjà vu plus haut]

$u_3 = c^6 + s^6 = u_2 - p\, u_1 = 1 - 3\,p$.

$u_4 = c^8 + s^8 = u_3 - p\, u_2 = 1 - 3\,p - p\,(1 - 2\,p) = 1 - 4\,p + 2\,p^2$.

$u_5 = c^{10} + s^{10} = u_4 - p\, u_3 = 1 - 4\,p + 2\,p^2 - p\,(1 - 3\,p) = 1 - 5\,p + 5\,p^2$.

Donc $10\, u_3 - 15\, u_4 + 6\, u_5 = 10\,(1 - 3\,p) - 15\,(1 - 4\,p + 2\,p^2) + 6\,(1 - 5\,p + 5\,p^2) = 1$.

Autrement dit : $x(t) + y(t) = 1$.

Cela prouve que la courbe est incluse dans la droite $X + Y = 1$.

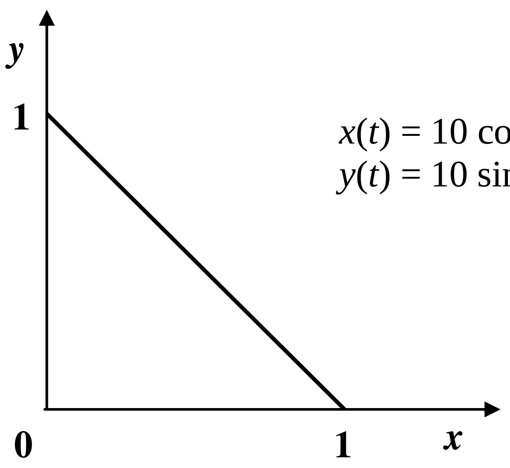
Pour déterminer la partie de cette droite concernée, remarquons que :

$x(t) = \varphi(c) = 6\, c^{10} - 15\, c^8 + 10\, c^6$ où $c = \cos(t)$ décrit $[0\,;\,1]$.

Or $\varphi\,'(c) = 60\, c^5 (c^4 - 2\, c^2 + 1) = 60\, c^5 (c^2 - 1)^2$ est positive donc φ est croissante.

Enfin, $x(0) = \varphi(1) = 1$ et $x(\pi/2) = \varphi(0) = 0$ prouve que x décrit $[0\,;\,1]$

La courbe est le segment en gras ci-dessous.



$x(t) = 10 \cos^6(t) - 15 \cos^8(t) + 6 \cos^{10}(t)$

$y(t) = 10 \sin^6(t) - 15 \sin^8(t) + 6 \sin^{10}(t)$

$t \in [0\,,\,\pi/2]$