Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 76.

Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et les 4 opérations, on peut approcher π à $2.\ 10^{-3}$ près par

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{5+4-2} = 3{,}1428\ldots$$

Faites de même :
en approchant π à $8.\ 10^{-5}$ près avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et les 4 opérations,
en approchant π à $3.\ 10^{-7}$ près avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et les 4 opérations.

PROBLÈME – 76.

Démontrer pour tout x réel l'égalité :

$$(11^x + 111^x)^{10} \times (1001^{10} + 10101^{10})^x = (11^{10} + 111^{10})^x \times (1001^x + 10101^x)^{10}$$

Solutions

JEU – 75.

Démontrer sans calculette que :

$$\frac{(9994^4+4)(9998^4+4)}{(9995^4+4)(9996^4+4)} = \frac{(9993^2+1)(9999^2+1)}{(9994^2+1)(9996^2+1)}$$

Solution :

La clé est l'identité remarquable

$$a^4 + 4\,b^4 = (a^2 + 2ab + 2\,b^2)\,(a^2 - 2ab + 2\,b^2)$$

On a donc :

$$\frac{(x+1)^4+4}{(x+2)^4+4} \times \frac{(x+5)^4+1}{(x+3)^4+4} =$$
$$\frac{((x+1)^2+2(x+1)+2)\,((x+1)^2-2(x+1)+2)}{((x+2)^2+2(x+2)+2)\,((x+2)^2-2(x+2)+2)} \times \frac{((x+5)^2+2(x+5)+2)\,((x+8)^2-2(x+5)+2)}{((x+3)^2+2(x+3)+2)\,((x+3)^2-2(x+3)+2)} =$$
$$\frac{(x^2+4x+5)\,(x^2+1)}{(x^2+6x+10)\,(x^2+2x+2)} \times \frac{(x^2+12x+37)\,(x^2+8x+17)}{(x^2+8x+17)(x^2+4x+5)} = \frac{(x^2+1)\,(x^2+12x+37)}{(x^2+2x+2)(x^2+6x+10)} =$$
$$\frac{(x^2+1)\,((x+6)^2+1)}{((x+1)^2+1)((x+3)^2+1)}$$

Il n'y a plus qu'à remplacer x par 9993.

PROBLÈME – 75.

Pour résoudre l'équation (1) $e^{x-2} + e^{x+8} = e^{4-x} + e^{3x+2}$ un élève dit :

On sait que $e^a + e^b = e^{a+b}$ et que l'exponentielle est bijective.
Donc (1) $\Leftrightarrow$ $(x-2)(x+8) = (4-x)(3x+2)$
Je développe : $x^2 + 6x - 16 = -3x^2 + 10x + 8$
Je réduis : $4x^2 - 4x - 24 = 0$
Je factorise : $4(x+2)(x-3) = 0$
Les solutions sont $x = -2$ ou $x = 3$.

Quelle note lui mettez-vous ?

Solutions :

Solution proposée par Alain GUILLON (collège Abel Minard à TONNERRE) :

On ne peut que relever la contre-vérité avancée par cet élève pour étayer sa démarche :
l'égalité $e^a + e^b = e^{a.b}$ n'est manifestement pas vraie pour tous a et b. Il suffit, pour s'en convaincre si nécessaire, de choisir $a = b = 1$. Cependant, avant de noter le travail de notre étudiant, on ne peut s'empêcher de constater que ses « solutions » - celles de l'équation (1') - vérifient aussi l'équation (1).
Comment lever ce paradoxe ?

D'abord, résolvons ladite équation :

Multiplions les deux membres de (1) par e^{x+2} $\quad e^{2x} + e^{2x}\, e^{10} = e^6 + e^{4x}\, e^4$
posons $X = e^{2x}$ $\quad X + e^{10}\, X = e^6 + X^2\, e^4$
réduisons $\quad e^4\, X^2 - (e^{10} + 1)\, X + e^6 = 0$ notée (1'')
le discriminant est $\quad \Delta = (e^{10} + 1)^2 - 4\, e^4\, e^6$
qui se réduit puis factorise en $\quad \Delta = (e^{10} - 1)^2$, strictement positif

les deux racines sont $X_1 = e^{6}$ et $X_2 = e^{-4}$

l'exponentielle étant bijective (l'élève a raison sur ce point), on obtient

$$x_1 = (\ln e^{6}) / 2 = 3 \text{ et } \quad x_2 = (\ln e^{-4}) / 2 = -2,$$

qui sont précisément les solutions avancées par notre élève, décidément chanceux.

Mais s'agit-il de chance ? N'y aurait-il pas là dessous quelque stratagème caché ? Essayons de résoudre, à la manière de l'élève, une équation (2) ressemblant à (1), choisie (presque) au hasard.

Résoudre l'équation (2) $e^{x-2} + e^{x+8} = e^{10-x} + e^{3x-8}$

l'élève obtient $(x - 2)(x + 8) = (10 - x)(3x - 8)$ notée équation (2')

il développe $x^2 + 6x - 16 = -3x^2 + 38x - 80$

il réduit $4x^2 - 32x - 64 = 0$

il factorise $4(x - 4)^2 = 0$

Ainsi, $x = 4$ est solution unique de (2').

Mais cette valeur n'est pas solution de (2) : $e^{2} + e^{12} > 160\,000$, alors que $e^{6} + e^{4} < 500$.

Alors, qu'est-ce qui a permis à cet élève de trouver les bonnes solutions de (1), là où il aurait échoué avec l'équation (2) ?

La réponse se trouve dans le calcul des exposants :

Dans (1), pour $x = -2$, on trouve successivement : – 4 ; 6 ; 6 et – 4

pour $x = 3$, on trouve successivement : 1 ; 11 ; 11 et 1.

Dans (2), pour $x = 4$, on trouve successivement : 2 ; 12 ; 6 et 4.

La « réussite » de l'élève tient au fait que l'équation (1) est vérifiée lorsque les termes du 1er membre sont rigoureusement identiques à ceux du second membre. A, B, C et D désignant des nombres,

{A = C et B = D} ou {A = D et B = C} $\Rightarrow$ $e^{A} + e^{B} = e^{C} + e^{D}$. Il s'agit là d'une condition suffisante.

Nous laisserons au lecteur le soin de la recherche d'une condition nécessaire, et nous contenterons de constater que les expressions affines des exposants avaient été « bien » choisies dans l'équation (1).

Par ailleurs, {A = C et B = D} ou {A = D et B = C} $\Rightarrow$ AB = CD, d'où la démarche de l'élève.

On remarquera que, à contrario, AB = CD n'implique pas {A = C et B = D} ou {A = D et B = C}, ce qui explique l'échec dans l'exemple de l'équation (2).

Enfin, le choix des exposants de l'équation (1), notamment des coefficients de l'inconnue x, a mené à l'obtention d'une équation du second degré (1'') lors la résolution par le professeur. On pourrait étudier les situations où le degré est plus élevé. On ouvre alors un autre champ de questionnements que nous ne développerons pas ici.

Pour répondre – enfin – à la question du problème, celle de l'évaluation de l'élève, il convient de clarifier ce que l'on attendait de lui. Qu'il utilise une démarche rigoureuse ? C'est perdu ! Qu'il trouve les solutions ? Gagné !
L'enseignant privilégiera sans doute la première compétence.
Par contre, si l'élève avait testé ses « solutions », validant ainsi ses réponses, on aurait pu valoriser cette dernière démarche.

Solution de Michel Lafond :

La démonstration de l'élève est fantaisiste, mais le résultat est exact car :
Si on pose $e^x = X$ on a :
(1) $\Leftrightarrow$ $e^{-2}X + e^8 X = e^4/X + e^2X^3 \Leftrightarrow e^2X^4 - (e^{-2} + e^8)X^2 + e^4 = 0$
$\Leftrightarrow e^2(X^2 - e^{-4})(X^2 - e^6) = 0$

Les solutions sont $e^{2x} = X^2 = e^{-4}$ ou $e^{2x} = X^2 = e^6$
D'où l'on tire $x = -2$ ou $x = 3$.