Le problème des anniversaires

Michel PLATHEY, Lycée Carnot, Dijon

Résumé : Le « problème des anniversaires » qui consiste à déterminer la probabilité que, dans une liste de longueur $n, n \in \mathbb{N}^*$ de nombres pris au hasard entre 1 et 365, on ait au moins une répétition de nombres, est une application bien connue de la propriété $p(E) = 1 - p(\overline{E})$ où p est une probabilité, E un évènement et $\overline{E}$ l'évènement contraire.
On approfondit ici ce problème, en s'intéressant aux probabilités de répétitions multiples.
Ce problème illustre bien l'apport des logiciels de calcul qui permettent, d'une part de faire des conjectures qui, sans eux seraient plus difficilement accessibles, et d'autre part de vérifier expérimentalement la validité des raisonnements mathématiques mis en place pour les démonstrations des conjectures. Il faut cependant prendre garde que ces vérifications ne sont pas des preuves et que la vigilance théorique reste de mise.

Mots clés : Probabilités, coïncidence, évènements équiprobables, évènement contraire, dénombrement, anniversaire, modélisation.

On peut faire intervenir ce problème très tôt (peut-être même dès la classe de 3e) dans l'étude de la théorie des probabilités de façon à illustrer le caractère surprenant et intuitivement paradoxal de certains résultats obtenus dans cette matière.

1. LE PROBLÈME ET QUELQUES PROLONGEMENTS POSSIBLES.

Considérons une classe de 36 élèves.

Le problème des anniversaires consiste à se demander si, dans cette assemblée, il est plus ou moins probable que 2 personnes au moins aient le même jour anniversaire.

Voici une solution bien connue, où on se place dans le cas où toutes les dates d'anniversaires sont équiprobables et où l'année a 365 jours. Cela implique aussi que les dates d'anniversaires sont indépendantes les unes des autres (en particulier, qu'il n'y ait pas de jumeaux dans la classe).

Les différents jours de l'année sont alors numérotés de 1 à 365 et un évènement élémentaire est un élément de D^{36} où D désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 365 au sens large : c'est une suite de 36 dates. On est en situation d'équiprobabilité et si $\Omega = D^{36}$ désigne l'univers de l'expérience, on a : $card(\Omega) = 365^{36}$.

Soit E l'évènement : « 2 personnes au moins ont le même jour anniversaire. » et soit $\overline{E}$ l'évènement contraire : « toutes les personnes de l'assemblée ont des anniversaires différents deux à deux. »

Il est plus facile de calculer d'abord $p(\overline{E})$.

On a : $card(\overline{E}) = 365 * 364 * 363 * ... * (365-35) = A_{365}^{36} = \dfrac{365!}{(365-36)!}$.

C'est le nombre d'arrangements de 36 dates prises parmi 365 dates.

On a : $$p(\overline{E}) = \frac{card(\overline{E})}{card(\Omega)} = \frac{A_{365}^{36}}{365^{36}} \approx 0{,}1678$$

et donc $p(E) \approx 1 - 0{,}1678 = 0{,}8322$.

Remarque :
Cette méthode de calcul de *p(E)* liée à la locution « au moins » est préférable au calcul direct car l'événement *E* est très compliqué. Il est réalisé si :

- Une date $d \in \mathbb{N} ; 1 \leq d \leq 365$ et une seule est répétée k fois exactement pour $k \in \mathbb{N} ; 2 \leq k \leq 36$.
- Deux dates différentes d_1 *et* d_2 ; $d_1, d_2 \in \mathbb{N} ; 1 \leq d_1 < d_2 \leq 365$ sont répétées k_1 *et* k_2 fois exactement, pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N} ; 2 \leq k_1 \leq 36 ; 2 \leq k_2 \leq 36 ; k_1 + k_2 \leq 36$
- i ; $i \in \mathbb{N} ; 3 \leq i \leq 18$ dates différentes $d_1, d_2, \ldots, d_i$; $d_1, d_2, \ldots \in \mathbb{N} ; 1 \leq d_1 < d_2 < \ldots < d_i \leq 365$ sont répétées $k_1, k_2 \ldots, k_i$ fois exactement, pour :
  $k_1, k_2 \ldots k_i \in \mathbb{N} ; 2 \leq k_1 \leq 36 ; 2 \leq k_2 \leq 36 ; \ldots ; 2 \leq k_i \leq 36 ; k_1 + k_2 + \ldots + k_i \leq 36$.

<u>Retour sur le résultat obtenu</u> :
Si on ne connaît pas ce résultat au préalable, il est très surprenant par sa grandeur.
Il signifie que dans ma classe, il y a plus de 4 chances sur 5 de trouver **au moins deux** élèves ayant le même anniversaire.

On peut alors prolonger la question.
Par exemple, on se demande quelle est la probabilité d'avoir :

a. exactement 2 personnes parmi les 36 qui aient le même anniversaire,
b. exactement 2 couples de personnes où les personnes de chaque couple ont le même anniversaire, les 2 anniversaires communs aux 2 couples étant différents, les autres anniversaires étant tous différents.

c. exactement 3 personnes parmi les 36 qui aient le même anniversaire, les autres anniversaires étant tous différents.

La remarque précédente montre que ce ne sont que quelques probabilités particulières parmi d'autres qu'on pourrait calculer.

Pour moi, en l'absence d'expérience précise, en me fiant à ma seule intuition, j'ai toujours pensé qu'il est très peu probable d'avoir plus de 2 personnes ayant le même jour anniversaire.

Mais cette intuition m'a déjà trompé car je ne pensais pas qu'il est presque certain d'avoir au moins 2 personnes ayant le même anniversaire, dans une assemblée de 36 personnes.

Il est à présent utile de vérifier, en utilisant un tableur si, d'abord, le raisonnement théorique tenu plus haut se confirme bien en pratique et si, d'autre part, mon intuition est bonne.

2. SIMULATION INFORMATIQUE DU PROBLÈME.

1. Simulation réalisée à l'aide d'un tableur. Voir les tableaux 1, 2, 3 ci-dessous.

On choisit au hasard et indépendamment 36 dates et on repère les coïncidences de dates, expérience réitérée 19 fois.

Cette simulation informatique décrite ci-dessous aux tableaux n°1 et n°2 permet de constater des résultats peu prévisibles dès l'abord et donc intéressants.

On voit que :

Dans 18 cas sur 19, soit 94,74 % des cas, au moins 2 personnes de l'assemblée choisie ont un anniversaire commun, ce qui est encore supérieur à ce que prévoit la théorie.

Mais ce n'est pas tout :

Il existe 6 cas sur 19 où il y a seulement 2 personnes de l'assemblée choisie ayant un anniversaire commun, soit 31,58 % des cas.

Il y a 8 cas sur 19, soit 42,11 % des cas ou encore 8 cas sur les 18 où il y a coïncidence d'anniversaires (44 % des coïncidences d'anniversaires) où il y a 2 paires de personnes de l'assemblée choisie, les personnes de chacune des paires ayant un anniversaire commun, ces 2 anniversaires étant eux-mêmes différents.

Dans 2 cas sur 19, il y a 3 paires de personnes de l'assemblée choisie, les personnes de chacune des paires ayant un anniversaire commun, ces 3 anniversaires étant eux-mêmes différents 2 à 2.

Dans 1 cas sur 19, il y a 5 paires de personnes de l'assemblée choisie, les personnes de chacune des paires ayant un anniversaire commun, ces 4 anniversaires étant eux-mêmes différents 2 à 2.

Et même, dans 1 cas sur 19, il y a un triple anniversaire.

Par contre, dans ce tableau, on n'a pas trouvé de quadruple, quintuple, etcetera anniversaire.

Ces résultats sont pour moi une totale surprise.
Je m'imaginais qu'il était déjà difficile de trouver 1 couple de personnes avec un anniversaire commun. Et il me semblait pratiquement impossible que l'on puisse trouver plusieurs couples de personnes avec un anniversaire commun.
Or l'expérience permet de soupçonner le contraire : parmi les assemblées de 36 personnes où il y a au moins 1 couple de personnes avec un anniversaire commun, celles où il existe plusieurs couples de personnes avec un anniversaire commun, sont en grande majorité. Par contre les anniversaires quadruples et plus apparaissent plutôt rares.

La moyenne du nombre de couples de personnes avec un anniversaire commun, parmi les 19 assemblées de 36 personnes obtenues est de :

$$\frac{6*1+8*2+2*3+1*3+1*4+1*5}{19} \approx 2{,}11 .$$

On peut alors estimer que, en moyenne, dans une assemblée de 36 personnes, on aura 2 couples de personnes avec un anniversaire commun.

On peut se demander d'où provient notre si piètre intuition des probabilités.

Une réponse possible serait que la lecture d'un tableau est chose difficile.

Il nous est presque impossible de faire facilement un tri de données numériques, ce que l'ordinateur fait de façon parfaite et rapide.

Ce handicap intuitif est par contre un atout pour l'enseignement des probabilités (informatique et théorique) car le raisonnement permet de prouver des résultats non triviaux.

Tableau n°1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
2																					
3	**1**		1	27	14	4	1	12	32	40	7	4	1	1	3	12	9	2	2	15	2
4	**2**		6	47	20	12	24	15	42	46	21	8	8	36	14	21	47	34	18	15	14
5	**3**		12	49	59	25	35	32	43	46	49	15	19	40	53	21	52	37	42	24	15
6	**4**		16	65	69	29	38	39	46	51	65	15	48	44	58	21	56	57	46	25	31
7	**5**		18	85	89	30	48	73	54	55	66	18	48	66	64	89	56	76	57	26	37
8	**6**		25	85	117	52	49	75	57	68	67	20	66	81	65	99	80	79	58	27	52
9	**7**		27	89	127	65	58	88	61	69	69	53	70	90	74	113	92	96	70	28	55
10	**8**		30	111	134	65	63	89	64	76	71	73	89	106	86	121	93	106	77	31	62
11	**9**		30	126	139	76	66	108	68	92	94	85	96	122	97	136	104	109	85	33	66
12	**10**		82	151	156	85	68	123	69	105	136	105	98	146	98	136	134	118	91	39	80
13	**11**		135	167	171	87	103	123	72	107	137	118	98	147	103	137	137	124	94	42	81
14	**12**		153	170	172	89	109	133	95	110	137	128	100	154	143	152	139	131	96	44	83
15	**13**		158	195	177	100	116	150	105	110	149	135	108	163	145	152	142	132	114	104	108
16	**14**		173	212	183	107	118	163	111	120	168	145	111	166	147	157	159	134	115	107	109
17	**15**		177	213	202	129	120	165	114	125	172	152	121	168	167	180	161	154	117	116	133
18	**16**		186	213	202	146	159	166	116	132	175	175	122	177	170	190	163	172	156	130	133
19	**17**		190	215	206	148	181	167	118	133	191	177	124	189	170	198	166	172	158	154	137
20	**18**		190	220	217	156	192	172	118	149	221	185	140	189	213	200	175	209	163	162	139
21	**19**		204	235	233	169	201	173	124	149	235	210	169	195	222	209	176	215	170	172	151
22	**20**		217	236	246	169	224	180	162	157	255	216	172	205	223	221	197	233	184	191	151
23	**21**		241	243	258	177	227	225	193	162	261	226	181	229	233	222	201	241	188	192	152
24	**22**		248	272	259	179	245	226	198	166	270	230	190	230	237	236	219	249	192	196	161
25	**23**		249	276	278	219	249	236	211	179	292	230	206	233	241	236	250	258	197	200	166
26	**24**		260	278	285	237	258	242	228	179	296	231	210	250	245	248	258	259	216	215	183
27	**25**		266	283	293	251	283	243	229	210	305	232	224	258	249	256	259	262	216	217	213
28	**26**		276	286	301	255	289	250	232	226	310	303	227	265	258	273	262	265	224	221	218
29	**27**		287	287	310	260	294	257	234	229	314	314	245	272	261	276	272	276	235	253	226
30	**28**		289	295	313	272	296	259	249	244	320	314	251	281	264	278	275	277	244	268	256
31	**29**		295	298	314	310	302	290	260	272	324	318	254	288	274	281	276	282	287	268	275
32	**30**		300	310	319	314	306	292	276	275	335	324	263	299	289	297	278	298	291	292	279
33	**31**		308	311	322	316	310	293	277	278	336	331	284	315	293	303	299	309	311	309	286
34	**32**		328	316	329	329	316	304	291	279	337	338	285	324	329	303	326	318	342	315	288
35	**33**		336	324	335	340	317	325	295	281	337	342	331	331	337	305	341	318	351	316	302
36	**34**		345	331	335	345	334	337	297	311	353	345	335	342	343	329	347	334	354	325	311
37	**35**		358	336	340	348	359	345	343	340	360	355	344	343	361	353	359	345	357	328	352
38	**36**		365	365	357	354	361	362	347	340	365	362	361	351	365	360	365	345	363	361	355

Tableau n°2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	1																				
3	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4	3		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
7	6		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	7		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	8		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	9		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	11		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	12		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	13		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
15	14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	16		0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
18	17		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
19	18		1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
20	19		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	20		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
22	21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	23		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
25	24		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
27	26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	29		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
31	30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	32		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
34	33		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
35	34		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	35		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	36		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
38	S Co		2	2	2	2	0	1	1	5	2	3	2	1	1	6	1	3	1	2	2

Tableau n°3.

	V	W	X	Y	Z
	1	Nombre de coïncidences d'ordre 2:		Totaux:	Pourcentages:
	2	0	1	0	0,0526
	3	1	6	6	0,3158
	4	2	8	16	0,4211
	5	3	2	6	0,1053
	6	4	1	4	0,0526
	7	5	1	5	0,0526
	8	Nombre de coïncidences d'ordre 3:	1	3	0,0526
	9	Nombre total de coïncidences :		40	
	10	Nombre moyen de coïncidences :		2,11	

Commandes utilisées pour le remplissage du tableau n°1.

Le problème des anniversaires.
19 simulations des dates anniversaires d'une assemblée de 36 personnes.

La première colonne contient les numéros des 36 personnes de l'assemblée. La première ligne contient les numéros des expériences.

Les colonnes C à U contiennent chacune 36 dates anniversaires prises au hasard sur l'intervalle d'entiers $[\![1\ ;\ 365]\!]$: loi uniforme.

Ces dates ont été triées par ordre croissant, colonne par colonne, de façon à pouvoir ensuite repérer facilement de proche en proche les coïncidences.

Pour réaliser cela, on écrit sur une feuille n°1: =ENT(ALEA()*365)+1 en C3,
commande que l'on étend dans toute la plage C3:U38.

On recopie ensuite la plage A1:U38 sur une feuille n°2 à l'aide du collage spécial qui ne fait subsister
dans chaque cellule que les nombres obtenus.

On effectue ensuite un tri croissant sur les colonnes de C jusqu'à U.

Commandes utilisées pour le remplissage du tableau n°2.

Le problème des anniversaires.
Repérage des coïncidences de dates.

Sur une troisième feuille, les lignes 2 à 37 sont numérotées de 1 à 36.

Les colonnes C à U vont contenir les comparaisons de deux lignes successives.

Ainsi, en C3, on écrit la commande =SI(Feuil2!C3=Feuil2!C4;1;0) qui renvoie 1 en cas d'égalité des contenus de C3 et de C4; 0 si les valeurs sont différentes.

On étend cette commande de C3 à C37 puis de la colonne C à la colonne U.

La ligne notée SCo donne le total des coïncidences observées.

On constate que dans 1 cas sur 19, soit une proportion de 1/19=0,05 à 0,01 près (nombre à comparer avec 0,18), il n'y a pas de coïncidence d'anniversaire.

L'expérience ne contredit cependant pas la théorie, à cause des fluctuations d'échantillonnage.

Remarque : La formulation ci-dessus est prudente et précise d'un point de vue logique. En réalité, on ressent beaucoup plus et on sait, lorsqu'expérience et théorie sont compatibles comme dans ce cas, que l'on ne s'est pas trompé. On est un peu dans la même situation que dans la preuve par 9 d'une multiplication : cette preuve n'en est pas une, cependant elle donne une certitude qu'on n'a pas fait d'erreur.

<u>Commandes utilisées pour le remplissage du tableau n°3.</u>
On étudie ici les résultats de la ligne notée *SCo* qui compte le nombre d'anniversaires communs : un anniversaire double commun est repéré par un 1 entouré par des zéros et un anniversaire triple commun est repéré par deux 1 successifs entourés par des zéros.
Les anniversaires triples étant assez rares, le nombre indiqué dans la ligne *SCo* est généralement le nombre des doubles anniversaires.
La plage W2 :W7 contient les nombres de 0 à 5 qui représentent le nombre d'apparitions de doubles anniversaires dans les 19 expériences.
La plage X2 : X7 contient les nombres d'expériences où sont apparus 0, 1, 2, 3, 4, 5 doubles anniversaires. Pour cela, en X2, on introduit la commande : =NB.SI(C38 :U38 ;W2), commande reproduite vers le bas.
Cependant, en examinant la répartition des 1 dans le tableau 2, on constate que les 1 sont bien isolés, sauf dans un cas : en colonne P, il n'y a pas 6 doubles anniversaires, mais 4 et 1 triple anniversaire.

2. Simulation réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul.

Ce qu'on vient de voir à l'aide d'un tableur peut être affiné en utilisant un logiciel de calcul qui permet d'augmenter dans d'importantes proportions le nombre des expériences réalisées.

Voici en langage naturel, un programme possible, où on fait 10 000 tirages au hasard d'une liste de 36 nombres compris entre 1 et 365 :

On crée d'abord une liste L_0 initialisée à 0 dont les indices varient de 0 à 8 qui recevra dans son terme d'indice i le nombre de fois où on obtient i doubles anniversaires.
Ensuite :
Pour k allant de 1 à 10 000 faire :

Début Pour
- 1. Créer une liste L_1 de 36 dates anniversaires.
- 2. Classer cette liste par ordre croissant. On obtient alors une liste L_2.
- 3. Comparer chaque nombre à son successeur. S'il y a égalité, la comparaison renvoie 1, sinon 0. On obtient alors une liste L_3.
- 4. On additionne les termes de la liste L_3. On obtient ainsi le nombre *n* de doubles anniversaires. On fait ici une approximation un peu fautive qui consiste à considérer que les anniversaires d'ordres 3 et plus sont rares.

- L_0[n] est alors augmentée de 1.

Fin Pour.

On affiche la ligne L_0.

Le programme ci-dessus est intéressant mais trop rudimentaire car il ne prend pas en compte les anniversaires multiples d'ordre supérieurs à 3. Il les intègre à l'intérieur des anniversaires doubles et les résultats donnés sont donc un peu faussés. On peut s'en satisfaire dans un premier temps puisque, comme on le verra, les probabilités d'anniversaires multiples d'ordre supérieurs à 3 sont faibles.

Pour plus de précision, voici un programme plus complet réalisé par Michel Lafond en langage MAPLE.

coincid:=array(1..7): *nombres total de coïncidences d'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dans les 10000 classes*
for i to 7 do coincid[i]:=0: od:
fav:=0: *nombres de cas favorables à un évènement donné [ici* 1 *couple et pas de triple]*
for w to 10000 do *on teste 10 000 classes*
classe:=NULL: *classe au hasard (36 entiers au hasard entre 1 et 365)*
for i to 36 do classe:=classe,floor(rand()/1e12*365+1): od:
classe:=sort([classe]): *les dates sont classées pour pouvoir compter les coïncidences par balayage*
ncouple:=0: ntriple:=0: *nombre de couples, de triples*
debut:=1: *début de la tranche "coïncidence"*
while debut<36 do
q:=1: *effectif de la tranche "coïncidence"*
for k from debut+1 to 36 do *tant que ça coïncide on incrémente le compteur et on continue*
if classe[k]=classe[debut] then q:=q+1: ndebut:=k+1: else ndebut:=k: k:=36: fi:
od: *on termine une coïncidence d'ordre q. La prochaine commence à ndebut*
coincid[q]:=coincid[q]+1:
if ndebut=36 then coincid[1]:=coincid[1]+1: fi: *cas particulier dernière année isolée*
if q=2 then ncouple:=ncouple+1: fi:
if q=3 then ntriple:=ntriple+1: fi:
debut:=ndebut:
od:

```
  if ncouple=1 and ntriple=0 then fav:=fav+1: fi:        un évènement favorable
od: classe suivante
 s:=0: for i to 7 do s:=s+coincid[i]*i: od:

 print (`vérification effectif total 36 x 10000`,s):
 print (`cumul `,coincid):
 print (`exactement un triple`,fav):
```

Remarque :
Les deux logiciels utilisés sont complémentaires.

Dans un premier temps, le tableur permet une meilleure vision d'ensemble. Je n'ai utilisé que 19 expériences car, à cause d'une connaissance insuffisante de l'outil, je n'ai pas su comment trier automatiquement l'ensemble des résultats colonne par colonne. L'aurais-je su que j'aurais pu faire intervenir un bien plus grand nombre d'expériences.

Dans un second temps, l'utilisation de logiciels tels que MAPLE, XCas, Python ou SciLab pour n'en citer que quelques-uns permet de passer à des vérifications plus fines, qui nous permettent de quasi-certitudes.

Passons maintenant à la démonstration de certaines des conjectures qu'on a pu exprimer.

3. *Calcul de la probabilité d'avoir exactement 2 personnes avec le même anniversaire, les anniversaires des autres personnes étant tous différents.*

Soit E_2 l'évènement : « 2 personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont un anniversaire commun ».

Alors, on a :

- 365 choix pour la date de l'anniversaire commun ;
- $\binom{36}{2}$ choix des 2 personnes ayant cet anniversaire commun ;
- A_{364}^{34} choix de la suite des 364 dates différentes 2 à 2 et différentes de l'anniversaire commun pour les $36-2=34$ autres personnes.

Donc : $$card(E_2)=365*\binom{36}{2}*A_{364}^{34}$$

Et $$p(E_2)=\frac{card(E_2)}{card(\Omega)}=\frac{365*\binom{36}{2}*A_{364}^{34}}{365^{36}}\approx 0,3204.$$

Ce résultat est assez différent du résultat expérimental obtenu par tableur, mais comme le nombre d'expériences faites est trop petit (19), cela n'est pas étonnant.

Il est nécessaire dans ce cas, d'augmenter le nombre des expériences pour accroître la fiabilité du résultat expérimental.
Il est certainement possible de le faire en utilisant un tableur, mais ici, l'utilisation d'un logiciel de calcul apparaît plus efficace.

4. Calcul de la probabilité d'avoir exactement 3 personnes avec le même anniversaire, les anniversaires des autres personnes étant tous différents. Généralisation.

Soit E_3 l'évènement : « 3 personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont un anniversaire commun. Les anniversaires des autres personnes sont tous différents et en particulier, il n'y a pas de couple parmi les 33 autres ».

Alors, on a :

- 365 choix pour la date de l'anniversaire commun ;
- $\binom{36}{3}$ choix des 3 personnes ayant cet anniversaire commun ;
- A_{364}^{33} choix de la suite des 33 dates différentes 2 à 2 et différentes de l'anniversaire commun pour les $36-3=33$ autres personnes.

Donc : $$card(E_3) = 365 * \binom{36}{3} * A_{364}^{33}$$

et $$p(E_3) = \frac{card(E_3)}{card(\Omega)} = \frac{365 * \binom{36}{3} * A_{364}^{33}}{365^{36}} \approx 0{,}0110.$$

Ce cas ne s'est pas produit dans les expériences faites, ce qui s'explique facilement par le résultat théorique obtenu (on a environ 1 chance sur 100 de réaliser E_3).

<u>Généralisation :</u>
Soit E_k l'évènement : « k personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont un anniversaire commun avec $k \in \mathbb{N}\,;\, 2 \le k \le 36$. Il y a exactement une coïncidence d'ordre k et pas d'autre coïncidence parmi les $36-k$ autres anniversaires. »

Alors, on a :

- 365 choix pour la date de l'anniversaire commun ;
- $\binom{36}{k}$ choix des k personnes ayant cet anniversaire commun ;
- A_{364}^{36-k} choix de la suite des $36-k$ dates différentes 2 à 2 et différentes de l'anniversaire commun pour les $36-k$ autres personnes.

Donc : $$card(E_k) = 365 * \binom{36}{k} * A_{364}^{36-k}$$

et $$p(E_k) = \frac{card(E_k)}{card(\Omega)} = \frac{365 * \binom{36}{k} * A_{364}^{36-k}}{365^{36}}.$$

À la calculatrice, on obtient les résultats suivants :

k	2	3	4	5	6
$p(E_k)$	≈ 0,3204	≈ 0,0110	≈ 0,0003	$\approx 5*10^{-6}$	$\approx 8*10^{-8}$

5. ***Calcul de la probabilité d'avoir exactement 2 paires disjointes de personnes ayant un anniversaire commun, la première paire ayant une date commune d'anniversaire, la deuxième paire ayant une date commune d'anniversaire, ces deux dates d'anniversaires étant différentes, les anniversaires des autres personnes étant tous différents.***

Soit $E_{2;2}$ l'évènement : « 2 paires de personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont des anniversaires communs, les deux dates d'anniversaire étant différentes, et pas de coïncidence d'ordre supérieur ».

Alors, on a :

- 365 choix pour la date de l'anniversaire commun de la première paire ;
- $\binom{36}{2}$ choix des deux personnes ayant cet anniversaire commun ;
- 364 choix pour la date de l'anniversaire commun de la deuxième paire ;
- $\binom{34}{2}$ choix des deux personnes ayant cet anniversaire commun ;
- On doit diviser par 2 pour ne pas avoir de répétition ;
- A_{363}^{32} choix de la suite des $36-2*2=32$ dates différentes 2 à 2 choisies parmi les $365-2=363$ dates différentes des 2 anniversaires communs pour les $36-4=32$ autres personnes.

Donc : $$card(E_{2;2}) = 365*\binom{36}{2}*364*\binom{34}{2}*\frac{1}{2}*A_{363}^{32}$$

et $$p(E_{2;2}) = \frac{card(E_{2;2})}{card(\Omega)} = \frac{365*\binom{36}{2}*364*\binom{34}{2}*\frac{1}{2}*A_{363}^{32}}{365^{36}} \approx 0,2715.$$

Là aussi, la comparaison avec les 42,11% expérimentaux n'est pas très probante, mais comme précédemment, ce résultat expérimental n'entre certainement pas en contradiction avec la théorie.
Pour le vérifier, on pourrait faire une étude statistique.

<u>Généralisation :</u>
Soit $E_{2;k}$ l'évènement : « k paires de personnes exactement de l'assemblée de 36 personnes ont des anniversaires communs avec : $1 \le k \le 18$, les dates anniversaires des paires considérées étant différentes et les dates anniversaires des autres personnes étant toutes différentes aussi ».

Le raisonnement précédent permet d'obtenir le résultat général suivant :

$$card(E_{2;k}) = 365 * \binom{36}{2} * 364 * \binom{34}{2} * ... * (365-k+1) * \binom{36-2*k+2}{2} \frac{1}{k!} * A_{365-k}^{36-2*k}$$

et : $$p(E_{2;k}) = \frac{card(E_{2;k})}{card(\Omega)}.$$

À la calculatrice, on obtient les résultats suivants :

k	1	2	3	4	5	6
$p(E_{2;k})$	0,3204	0,2715	0,1352	0,0526	0,0100	0,0016

Vérification :

0,3204+0,2715+0,1352+0,0526+0,0100+0,0016+0,0110+0,0003=0,8026.

Ce résultat est proche de 0,8322.

Autre approche :

On peut avoir l'idée de calculer les résultats précédents de proche en proche.

Soit donc :

$u_k = p(E_{2;k})$ pour k entier naturel supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 18.

Cherchons une formule de récurrence reliant u_k et u_{k+1}.

$$u_k = \frac{365 * \binom{36}{2} * 364 * \binom{34}{2} * ... * (365-k+1) * \binom{36-2*k+2}{2} * \frac{1}{k!} * A_{365-k}^{36-2*k}}{365^{36}} \ ;$$

$$u_{k+1} = \frac{365 * \binom{36}{2} * 364 * \binom{34}{2} * ... * (365-k+1) * \binom{36-2*k+2}{2} * (365-k) * \binom{36-2*k}{2} * \frac{1}{(k+1)!} * A_{365-k-1}^{36-2*k-2}}{365^{36}}$$

Donc :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(365-k) * \binom{36-2*k}{2} * \frac{1}{(k+1)!} * A_{365-k-1}^{36-2*k-2}}{\frac{1}{k!} * A_{365-k}^{36-2*k}} =$$

$$\frac{(365-k) * \binom{36-2*k}{2}}{k+1} * \frac{(365-k-1)!}{(328+k+1)!} * \frac{(328+k)!}{(365-k)!} = \frac{(18-k) * (35-2*k)}{(k+1) * (329+k)}$$

Soit : $$g(k) = \frac{(18-k) * (35-2*k)}{(k+1) * (329+k)} \ ;$$

$$u_1 = \frac{365 * \binom{36}{2} * A_{364}^{34}}{365^{36}}$$

et
$$u_{k+1} = g(k) * u_k \,.$$

On peut faire le calcul sur tableur. On obtient les résultats vus plus haut.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	**k**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	
2	**g(k)**	0,85	0,4995	0,3276	0,227	0,1622	0,1177	0,0859	0,0626	0,0453	0,0322	0,0223	0,0149	0,0094	0,0054	0,0027	0,001	0,0002	0	
3	**u(k)**	0,3204	0,2723	0,136	0,0446	0,0101	0,0016	0,0002	2E-05	1E-06	5E-08	2E-09	3E-11	5E-13	5E-15	3E-17	7E-20	7E-23	1E-26	0
4																				

Conclusion.

Les probabilités constituent un domaine intéressant où réflexion théorique et expérimentation logicielle se renforcent mutuellement en permettant en amont de formuler des conjectures et en aval de vérifier les résultats théoriques obtenus.

Je remercie Messieurs Lafond, Marchivie et Thomassin pour leur aide avec leurs remarques, corrections et compléments.