Multiplications
Techniques avec les doigts

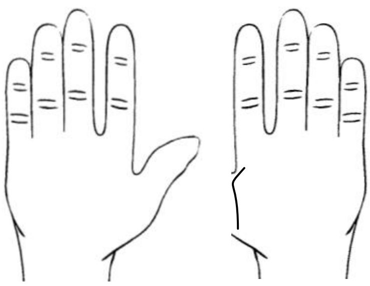
Marie-Noëlle RACINE
mnracine@wanadoo.fr

Résumé : dans son ouvrage *nouveaux elemens de geometrie* publié en 1667, Antoine Arnauld décrit une technique de multiplication de *nombres digites*, c'est-à-dire utilisant les doigts des deux mains pour calculer facilement le résultat de multiplications de deux nombres compris entre 5 et 10.

Mots clés : multiplication, calcul avec les mains.

Pour effectuer des multiplications, la plupart du temps, il faut « savoir ses tables de multiplication ! »
Pour cela, on peut parfois compter avec les doigts des mains !

On connaît (tous ?) la manière d'afficher avec les doigts des deux mains les résultats de la « table du 9 ». Revoyons la méthode sur un exemple (elle s'applique de la même façon pour les 10 résultats de cette table) :



$6 \times 9 = 54$

Puisqu'on veut le résultat de 6×9, on replie le sixième doigt et on compte, à gauche le nombre de dizaines (ici 5), à droite le nombre d'unités (ici 4).

Antoine ARNAULD, a révélé (et justifié) dans son ouvrage *NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE*, publié à Paris en 1667, au livre I, pages 14 et 15, la manière de faire apparaître sur les doigts des deux mains, moyennant une petite multiplication connue, les résultats de tous les produits de deux nombres compris entre 5 et 10.

NOVVEAVX ELEMENS
DE
GEOMETRIE;
CONTENANT,
Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonſtrations des propoſitions les plus communes,
De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes ſont incommenſurables,
De nouvelles meſures des angles, dont on ne s'eſtoit point encore aviſé,
Et de nouvelles manieres de trouver & de demontrer la proportion des Lignes.

Antoine Arnauld

A PARIS,
Chez Charles Savreux, Libraire Juré, au pied de la Tour de Noſtre-Dame, à l'Enſeigne des trois Vertus.

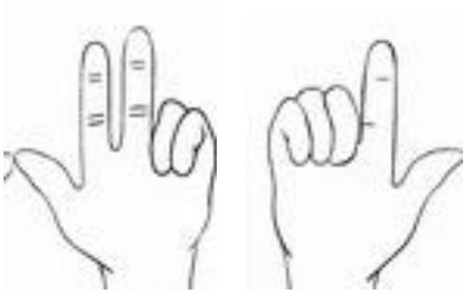
M. DC. LXVII.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Description de la méthode, suivie d'un exemple :
Livre I paragraphe LXIII

C'est ſur cela auſſi qu'eſt fondée une invention fort aiſée de trouver les multiplications des nombres depuis 5 juſqu'à 10. Il ne faut que baiſſer les 10 doigts, puis relever d'une main autant de doigts qu'il s'en faut que l'un des nombres qu'on veut multiplier n'aille juſqu'à 10 ; comme ſi ce nombre eſt 8, en relever 2, & de l'autre de même autant qu'il s'en faut que l'autre nombre n'ailie juſqu'à dix ; comme ſi ce nombre eſt 7, en relever 3 : cela fait il faut conter autant de dixaines qu'il y a de doigts baiſſez, & multiplier les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, en ne les prenant que pour des unitez, & on aura le nombre qu'il faut.	C'est sur cela aussi qu'est fondée une invention fort aisée de trouver les multiplications des nombres depuis 5 jusqu'à 10. Il ne faut que baisser les dix doigts, puis relever d'une main autant de doigts qu'il s'en faut que l'un des nombres qu'on veut multiplier n'aille jusqu'à dix ; comme si ce nombre 8, en relever deux, & de l'autre de même autant qu'il s'en faut que l'autre nombre n'aille jusqu'à dix ; comme si ce nombre est 7, en

	relever trois : cela fait il faut conter autant de dixaines qu'il ya de doigts baissez, & multiplier les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, en ne les prenant que pour des unitez, & on aura le nombre qu'il faut.

On le voit, il suffit de connaître les résultats des multiplications de nombres compris entre 1 et 5 pour pouvoir appliquer cette méthode :



Pour connaître le produit de 8 par 7, on baisse tous les doigts, on relève d'une main autant de doigts qu'il en faut pour aller de 8 à 10, et de l'autre autant de doigts qu'il en faut pour aller de 7 à 10. C'est-à-dire, on relève 2 doigts d'une main et 3 de l'autre. On compte le nombre de doigts baissés pour obtenir le nombre de dizaines (ici 5) et on multiplie le nombre de doigts levés d'une main par ceux de l'autre (ici 2 × 3 = 6), pour avoir le nombre d'unités.
On a 7 × 8 = 5 dizaines + 6 unités = 56.

Continuons avec le texte d'Antoine ARNAULD que nous commenterons au fur et à mesure, pour connaître sa justification :

La raiſon de cela eſt qu'on ne fait en cela que multiplier

$$\text{par}\ \begin{matrix} 10. & \text{—} & 2. \\ 10. & \text{—} & 3. \end{matrix} \Bigg\}\ 100 - 20 - 30 + 6.\ \text{ſomme } 56.$$

Arnauld continue :

Car en baiſſant tous les doigts, on fait la premiere multiplication partiale qui donne dix dizaines.

En levant deux doigts d'une main on fait ce que doit faire la ſeconde multiplication partiale, qui eſt de + 10. par — 2, ce qui donne — 20 : car en levant deux doigts on oſte deux dizaines.

En levant 3 doigts de l'autre main on fait encore ce que doit faire la troiſiême multiplication partiale, qui eſt de + 10 par — 3, ce qui donne — 30 : car en levant 3 doigts on oſte trois dizaines.

[…]

En fait, au XXI[e] siècle, pour ce début de justification, nous dirions qu'il développe le produit
(10 – 2) × (10 – 3) soit : (10 – 2) × (10 – 3) = 10 × 10 – 10 × 2 – 10 × 3 + 2 × 3. Ce qui donne 56 comme résultat.
Il justifie la fin de ce calcul, à savoir (–2) × (–3) = + 6, par :

Et enfin en multipliant les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, on multiplie — 2 par — 3, ce qui donne + 6 par la raiſon que nous avons dite, qui eſt que les deux multiplications negatives ont oſté cela de trop. Car la premiere oſtant 2 fois 10, a oſté 2 fois 7 plus 2 fois 3. Et la ſeconde oſtant 3 fois 10, a oſté 3 fois 8, plus 3 fois 2. Et ainſi elles ont oſté deux fois 3 fois 2, qui n'en devoient eſtre oſtez qu'une fois.

Car 10 fois 10 eſt égal à

$$\begin{array}{l} \quad 7 + 3. \\ \text{par } 8 + 2. \end{array}\Bigg\}$$

Ce qui fait 7 fois 8 + 8 fois 3 + 2 fois 7 + 2 fois 3.

Et ainſi 10 fois 10 n'eſt plus grand que 7 fois 8 (qui eſt ce que l'on cherche) que des trois dernieres multiplications, 8 fois 3, 2 fois 7, 2 fois 3. Et ainſi cette derniere n'en doit eſtre oſtée qu'une fois, & ſi on l'a oſtée deux fois, il la faut remettre une fois : comme on fait auſſi en mettant *plus* à la multiplication de moins 3 par moins deux.

Pour comprendre ce texte, et en particulier des expressions comme « *les deux multiplications négatives ont osté cela de trop* », nous pouvons le transcrire avec l'algèbre, à la manière moderne :

$10 \times 10 = (7 + 3) \times (8 + 2)$

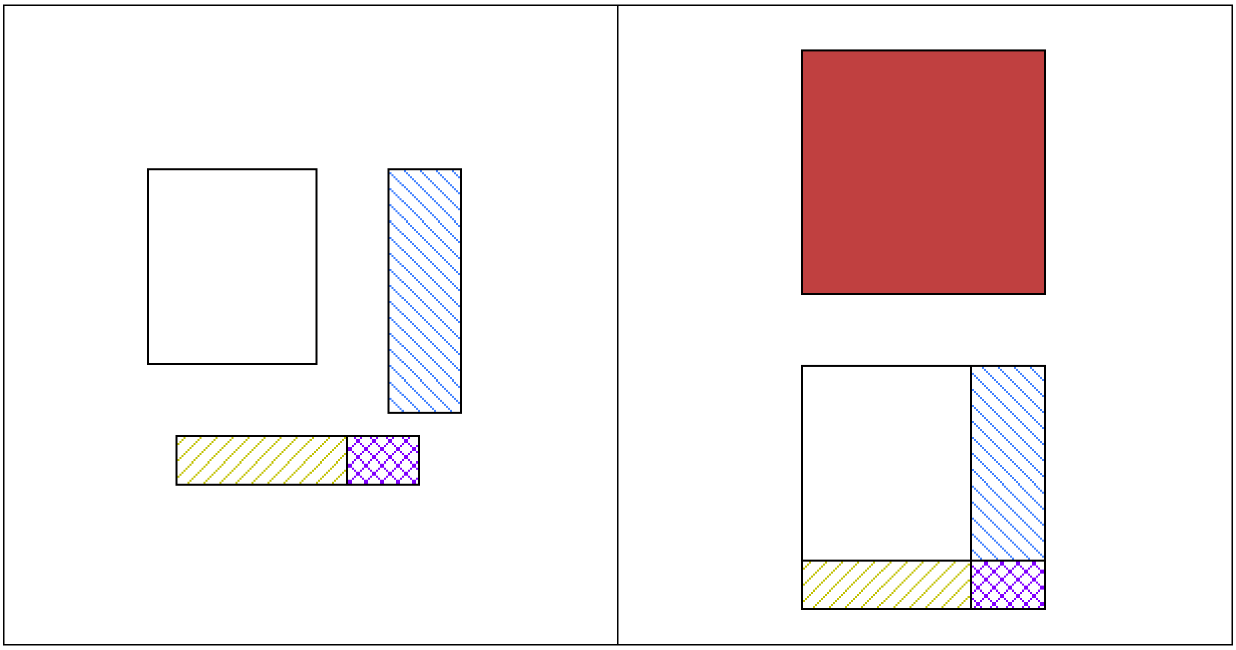
$10 \times 10 = 7 \times 8 + 7 \times 2 + 8 \times 3 + 2 \times 3$ ici, on a la traduction algébrique de la phrase « *Et ainsi 10 fois 10 n'est plus grand que 7 fois 8 (qui est ce que l'on cherche) que des trois dernieres multiplications, 8 fois 3, 2 fois 7, 2 fois 3.* »

$10 \times 10 = 7 \times 8 + (10 - 3) \times 2 + (10 - 2) \times 3 + 2 \times 3$

$10 \times 10 = 7 \times 8 + 10 \times 2 - \mathbf{3 \times 2} + 10 \times 3 - \mathbf{3 \times 2} + 2 \times 3$ ce qui traduit bien « *Et ainsi cette dernière* [2 fois 3] *n'en doit estre ostée qu'une fois, &t si on l'a ostée deux fois, il faut la remettre une fois* »

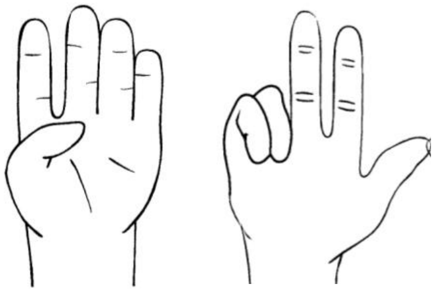
La phrase « *comme on fait aussi en mettant* plus *à la multiplication de moins 3 par moins deux* » n'est que la description de ce qui a été fait en appliquant ce que l'on nomme aujourd'hui la *règle des signes,* à savoir : $- \times - = +$.

Si l'on veut expliquer cette opération à l'aide de figures géométriques rectangles comme il était d'usage auparavant lorsqu'il s'agissait de trouver des *produits*, parfois appelés *rectangles* : le grand carré rouge foncé vaut 10×10. On lui enlève le rectangle bleu, hachures obliques descendant vers la droite, $(- 10 \times 3)$, on enlève encore le long rectangle ocre, hachures obliques montant vers la droite, $(- 10 \times 2)$, mais on a enlevé deux fois le rectangle violet, hachures croisées, il faut le rajouter $(+ 2 \times 3)$. On obtient le rectangle blanc 7×8 :



Voici un autre exemple, où il y a une retenue et voyons comment on en tient compte :

Soit à trouver le produit de 6 par 7 :



Après avoir baissé tous les doigts ; on relève 4 doigts de la main gauche car pour aller de 6 à 10, il manque 4 ; on relève 3 doigts de la main droite car pour aller de 7 à 10, il manque 3 ; on multiplie le nombre de doigts levés de la main gauche par le nombre de doigts levés de la main droite soit : 4 × 3 = 12, il y a 12 unités ; il reste 1 + 2 doigts baissés, il y a 3 dizaines.
Le résultat est donc : 3 dizaines + 12 unités soit 42. On a bien 6 × 7 = 42.
À noter, pour conclure, que cette technique a été décrite, sans démonstration, à des élèves de collège (tous niveaux). Certains de ces élèves utilisent désormais ce moyen des doigts des mains pour vérifier un résultat et se rassurer lorsqu'ils ont à faire une multiplication de deux nombres compris entre 5 et 10.

Annexe : biographie succincte d'Antoine ARNAULD :
Né à Paris le 6 février 1612, il décède à Bruxelles le 8 août 1694.
Prêtre, théologien, philosophe et mathématicien, ami de Pascal, il correspond avec Leibniz, Malebranche, Bossuet et bien d'autres de ses contemporains. Janséniste, il s'oppose aux jésuites et aux calvinistes. Il est ainsi forcé de se cacher durant plus de vingt ans. Après une courte réhabilitation, il fuit la France et émigre aux Pays-Bas puis s'installe à Bruxelles.

Van BIJLERT Jan Hermantz (Utrecht 1597 ; 1671), *Les quatre Evangélistes*, ≈1625, MBA Quimper, ©photo MN Racine