Géométrie sur une image

Alain MASCRET, collège de Gevrey-Chambertin

Résumé : Insérer une image dans une figure obtenue grâce à un logiciel de géométrie dynamique. Deux exemples d'utilisation : une maquette du système solaire et une étude de tableau.

Mots clés : Géométrie dynamique, *geowiki*, *geogebra*, *geonext*, *carmetal*, système solaire, planètes, Zanobi di Machiavelli, *Le couronnement de la Vierge*, perspective, point de fuite, point de distance, distorsion, traitement d'image, agrandissement, réduction, théorème de Thalès, transformation géométrique, homothétie, similitude, affinité, transvection, motivation des élèves à la géométrie par le travail sur une photographie.

Certains logiciels de géométrie dynamique permettent d'insérer une image dans une figure. Une telle technique a été décrite dans le numéro 120 de la *feuille de vigne* ainsi que sur le site du groupe « géométrie dynamique » de l'IREM de Dijon :http://geowiki.u-bourgogne.fr/. Voyons maintenant, sur deux exemples quel peut en être l'intérêt.

1. Une maquette du système solaire :

Pour des raisons techniques, dans les livres d'astronomie, les représentations du système solaire sont rarement correctes. Les planètes sont trop grosses et leurs distances relatives ne sont pas respectées.

Pour donner une idée des dimensions du système solaire, nous allons en réaliser une maquette à l'échelle.

Le soleil sera à Dijon et la terre à Gevrey-Chambertin. La distance Dijon-Gevrey est de 12 km ce qui permet de remplir le tableau de proportionnalité ci-contre.

Corps céleste	Distance au soleil en réalité en millions de km	sur la maquette en km
Soleil	0	0
Mercure	57,94	5
Vénus	108,26	9
Terre	149,68	12
Mars	228,06	18
Jupiter	778,69	62
Saturne	1430,10	115
Uranus	2876,5	231
Neptune	4506,8	361

Les trajectoires des planètes seront représentées par des cercles de centre Dijon.

Ouvrons *geogebra*. Choisissons un fond de carte de la Bourgogne et insérons-le dans la figure.

Pluton	5903,4	473

Tableau 1

Pour cela nous choisissons un segment horizontal [AB] qui sera solidaire du bas de l'image. Pour cela, il est pratique d'utiliser la grille ou l'axe des abscisses.

Nous insérons l'image en cliquant sur le point A. L'image apparaît avec sa taille d'origine.

Nous ouvrons les propriétés de l'image en faisant un clic droit dessus.

Dans l'onglet « position » nous choisissons le point B comme coin numéro 2.

L'image est maintenant solidaire de la figure. Il est possible de contrôler sa taille et sa position dans la figure en déplaçant les points A et B.

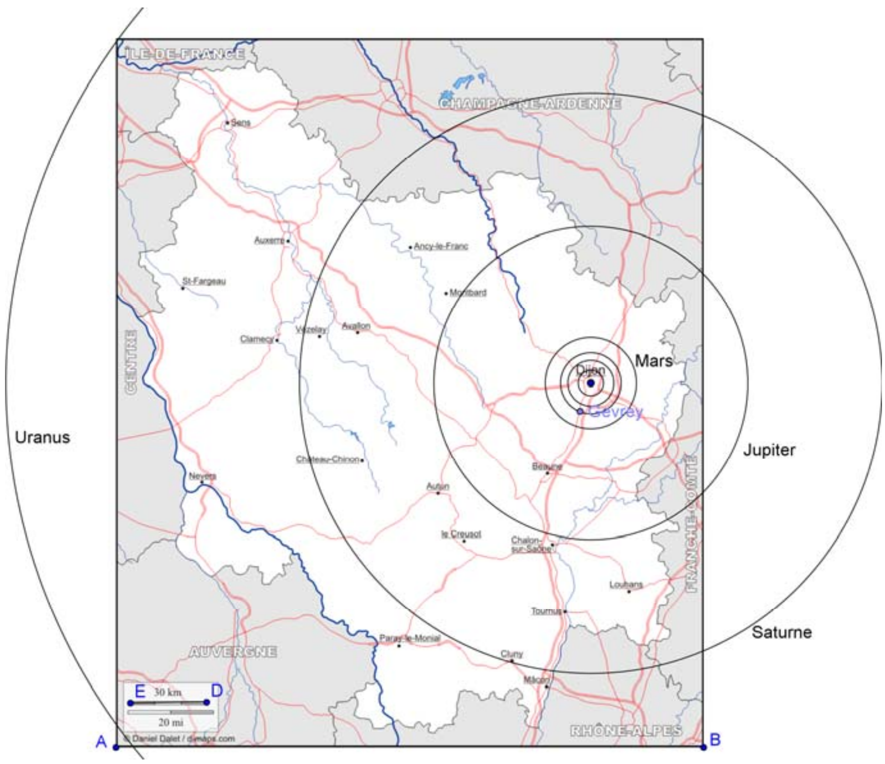


Figure 1

Plaçons avec soin le point C sur Dijon et les points E et D dans le cartouche d'échelle de la carte. La longueur ED représentera 30 km. *Geogebra* appelle cette longueur b et en précise la valeur. Les rayons des cercles seront obtenus en multipliant les nombres de la dernière colonne du tableau 1 par $\frac{b}{30}$ et *geogebra* se charge des calculs.

À partir d'Uranus, les orbites des planètes ne sont plus sur la carte de la Bourgogne. Nous passons donc à la carte de France

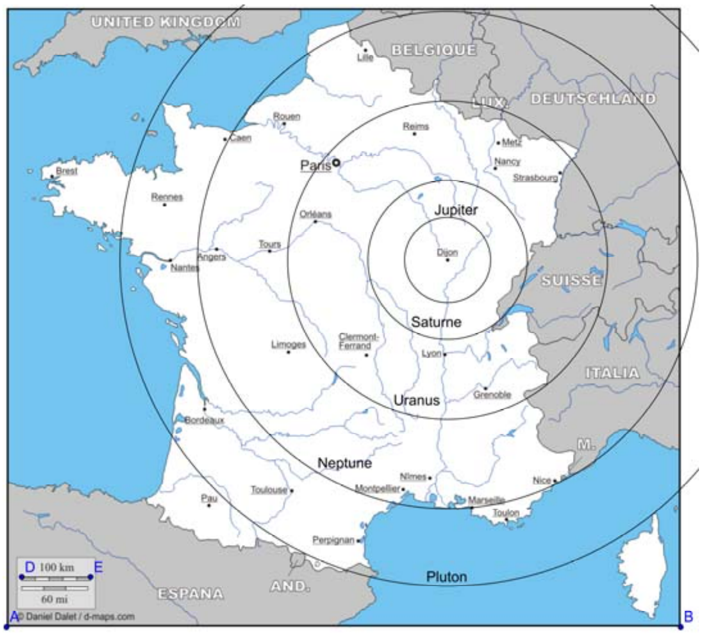


Figure 2

Et qu'en est-il de l'étoile la plus proche du soleil ?

Elle est située à 4 années-lumière de nous, c'est à dire que sa lumière met 4 ans pour nous parvenir à la vitesse de 300000 kilomètres par seconde.

Sur notre maquette, il faudrait placer cette étoile à 3 036 000 km de Dijon, ce qui fait près de 8 fois la distance terre-lune !

Pour terminer, le tableau ci-contre donne les diamètres des planètes sur notre maquette en utilisant la même échelle.

La lune se trouve seulement à 30 mètres de la terre. Son diamètre est suffisant pour que la terre apparaisse, vue de l'espace, comme une planète double.

Corps céleste	Diamètre en réalité en km	Diamètre sur la maquette en m
Soleil	1392000	111,6
Mercure	4847	0,39
Vénus	12249	0,98
Terre	12757	1,02
Lune	3476	0,28
Mars	6748	0,54
Jupiter	142880	11,45
Saturne	120960	9,7
Uranus	47170	3,78
Neptune	44990	3,61
Pluton	2300	0,18

Remarques :

Cette activité est possible dans une classe de sixième motivée par l'astronomie, l'idéal étant que chaque élève dispose d'un ordinateur. Le tableau 1 fait l'objet d'un travail précédant la séance.

La taille de la figure dépend des points A et B, de même, les rayons des cercles sont fonction de la longueur ED et leur centre est le point C. Une fois les ajustements de départ réalisés, il est donc judicieux de masquer ces points de façon à ne pas les déplacer de manière accidentelle.

Les logiciels *geogebra* et *carmetal* permettent d'utiliser un troisième coin. Dans ce cas, le déplacement d'un coin déformera la figure. Pour éviter toute déformation, il suffit, avec *geogebra*, de ne pas définir ce troisième coin.

2. Analyse d'un tableau :

L'histoire des arts fait maintenant partie intégrante des disciplines sanctionnées par le brevet des collèges. Une étude géométrique de tableau peut être une façon pour le professeur de mathématiques de participer à la préparation de cette épreuve qui est, théoriquement, l'affaire de tous.

Le groupe Math et Arts de l'IREM de Dijon organise chaque année une visite du musée des beaux-arts. À cette occasion, Marie-Noëlle Racine a pris des photographies, « sans flash et sans pied » que le musée des beaux-arts de Dijon nous permet aimablement de publier. (Ces photographies ne peuvent cependant pas être reproduites sans l'accord du musée).

Afin de mettre en évidence certaines particularités d'un tableau, nous sommes amenés à y tracer des lignes. Le gros avantage des logiciels de géométrie, c'est que ces lignes peuvent être déplacées et modifiées, sans avoir à recommencer comme autrefois, quand les tracés se faisaient à la main.

À titre d'exemple, examinons *le Couronnement de la Vierge* de Zanobi di Machiavelli. Ce tableau date de 1473 et provient de l'église du monastère Santa Croce de Fossabanda près de Pise.

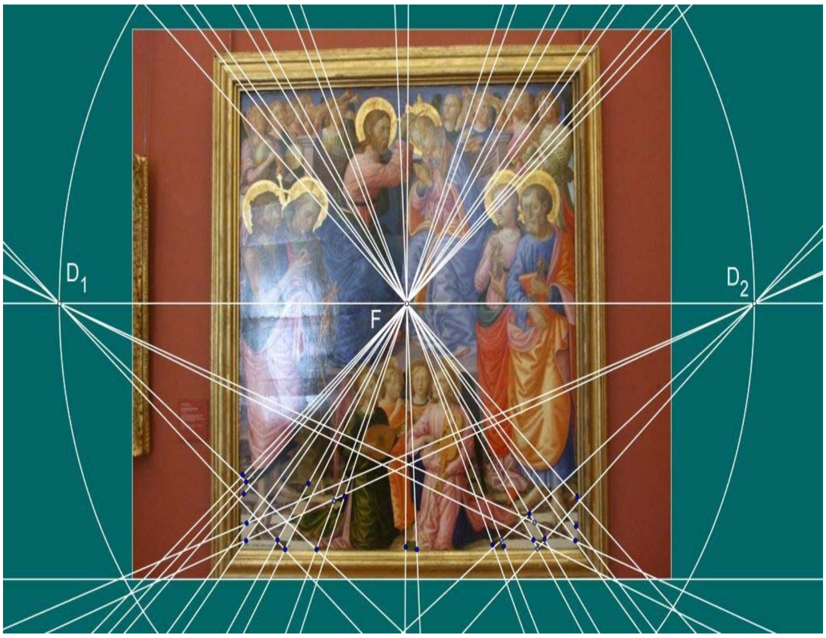


Figure 2

Zanobi di Machiavelli, *Le couronnement de la Vierge*, 1473

Musée des beaux-arts de Dijon

© Photo Marie-Noëlle Racine

Zanobi di Machiavelli a peint un carrelage. En prolongeant les côtés des carreaux, il est possible de trouver le point de fuite principal F qui se trouve au centre de ce tableau de forme carrée. Les points marqués sur le tableau sont les points choisis pour définir les droites.

De la même façon, les diagonales des carreaux vont concourir en les points D et D', symétriques par rapport à F sur la ligne d'horizon. Ces deux points sont les « points de distance ». La distance FD est la distance à laquelle il faut placer **un** œil sur la normale au tableau passant par F, si l'on veut bénéficier pleinement de l'impression de relief donnée par la perspective.

En toute rigueur, c'est aussi en ce point qu'il aurait fallu pouvoir placer l'appareil photographique, ce qui n'a pas été le cas. C'est pourquoi le point de fuite principal est légèrement au dessus du centre du tableau comme le montre le schéma de la figure 3.

[AB] représente le tableau. O est la position de l'appareil photographique. [DE] représente la photographie. C est le milieu de [DE].

(OC) est l'axe optique de l'appareil, c'est donc aussi la médiatrice de [DE] et la bissectrice de l'angle $\widehat{BOA}$.

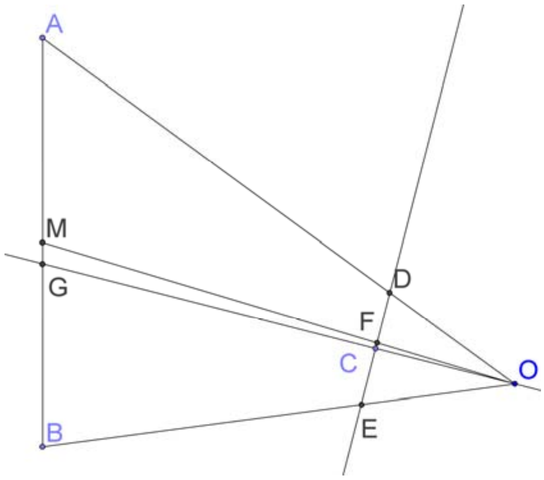
(OC) coupe [AB] en G ce qui permet d'écrire : $\frac{BO}{BG} = \frac{AO}{AG}$.

Dans le cas d'un tableau placé « trop haut », comme c'est souvent le cas, AO est plus grand que BO donc AG est plus grand que BG, ce qui veut dire que le point G est au dessous du milieu M de [AB].

Mais le point M correspond au point de fuite principal F sur la photographie. Le milieu C de [DE] se trouve donc bien au dessous de F.

Il ne faut pas oublier de penser aux distorsions possibles quand on étudie un tableau à partir d'une photographie.

Figure 3 *(Distorsion de la photographie)*



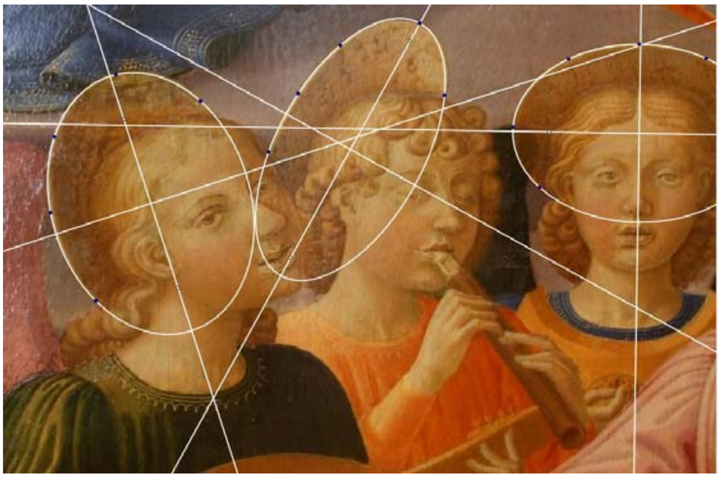


Figure 4 *(détail du tableau de la figure 2)*

Examinons maintenant la façon dont l'artiste a représenté les auréoles des personnages. Pour les plus importants, les auréoles sont situées dans un plan frontal, c'est-à-dire un plan parallèle au plan du tableau. Elles ne subissent aucune déformation. Un cercle reste un cercle.

Pour les quatre anges du premier plan, c'est différent. L'outil « conique passant par cinq points » va nous montrer (figure 4) que leurs auréoles sont bien représentées par des ellipses dont il est possible de tracer les axes et les foyers. Nous constatons que le petit axe de l'auréole de l'ange vu de face est l'axe de symétrie de son visage.

En conclusion, nous pouvons dire que Zanobi di Machiavelli maîtrisait bien les lois de la perspective.

Dans un prochain article nous verrons d'autres utilisations possibles d'images insérées dans une figure.