Géométrie sur une image

Transformations géométriques d'une image

(suite de l'article paru dans la feuille de vigne n° 124)

Alain MASCRET
mascret.alain@gmail.com

Résumé : Insérer une image dans une figure obtenue grâce à un logiciel de géométrie dynamique. Transformations géométriques d'une image. Activités géométriques en collège.

Mots clés : Géométrie dynamique, *geowiki*, *geogebra*, *geonext*, *carmetal*, distorsion, traitement d'image, agrandissement, réduction, théorème de Thalès, transformation géométrique, homothétie, similitude, affinité, transvection, motivation des élèves à la géométrie par le travail sur une photographie.

Dans l'article précédent, publié dans la feuille de vigne n°124, nous avons tracé une figure sur une image sans la modifier. Cette fois, nous allons nous intéresser aux transformations géométriques que l'on peut faire subir à une image. Ces transformations peuvent être montrées aux élèves de collège. Ils les rencontrent en manipulant des images en dehors de nos cours. Pourquoi ne pas en profiter ?

1) Agrandissement ou réduction d'une photographie :

Le théorème de Thalès est souvent perçu comme abstrait par nos élèves de quatrième. L'agrandissement ou la réduction sans déformation d'une photographie en donne une application concrète.

Dans le triangle ABC, plaçons D sur [AB] et traçons la parallèle à (BC) passant par D. Elle coupe [AC] en E. Nous obtenons ainsi une « situation de Thalès ».

Dans la fenêtre « Algèbre », *geogebra* indique les longueurs des segments :

BC = a = 9,25 DE = e = 5,44

En utilisant la ligne de saisie, au bas de la figure, entrons $r=e/a.$

$r=\frac{e}{a}=0{,}59$ est le rapport de réduction.

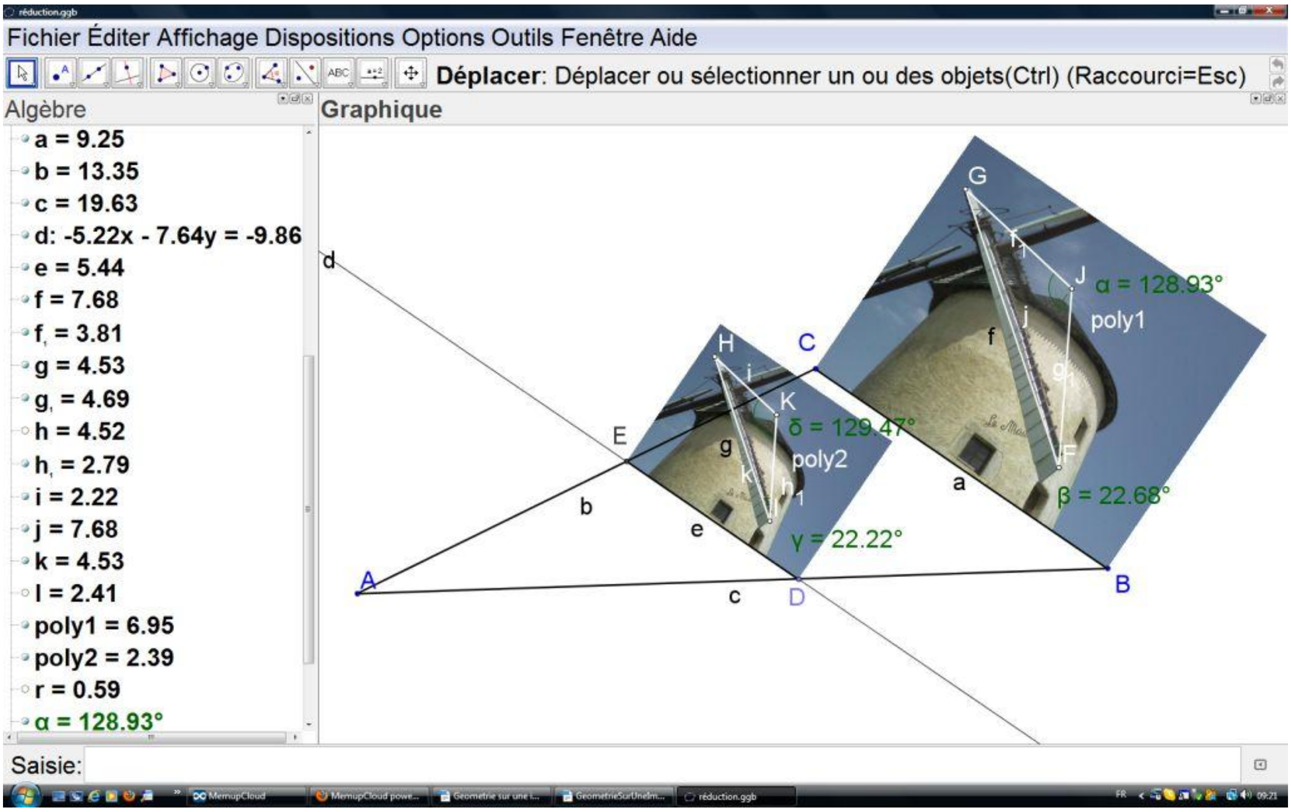

Figure 5
Le moulin de Bouhy © Photo Irène Mascret

Insérons deux fois la même photographie en utilisant les coins C et B pour la première et E et D pour la seconde. Cette seconde image est une réduction de rapport *r* de la première, ce que nous pouvons vérifier.

Traçons, par exemple le segment [GF] de longueur f = 7,68 sur l'aile du moulin de la grande photographie. Le segment qui lui correspond sur la petite photographie est [HI] de longueur g = 4,53. Calculons r × f. *Geogebra* répond en écrivant h = 4,52. L'écart entre g et h est dû au manque de précision du tracé, fait à la souris.

Traçons maintenant le triangle GFJ sur la grande photographie et son correspondant HIK sur la petite. Geogebra les désigne respectivement par poly1 et poly2 dans la fenêtre « algèbre » et nous en donne les aires. Calculons cette fois $r^2 \times f$. Nous obtenons l = 2,41 au lieu de 2,39 indiqué pour l'aire de HIK.

Geogebra permet aussi de mesurer les angles. Dans notre exemple, l'écart ne dépasse pas 1°.

$$\widehat{JFG} = 22{,}68° \quad \text{et} \quad \widehat{KIH} = 22{,}22°$$
$$\widehat{GJF} = 128{,}93° \quad \text{et} \quad \widehat{HKI} = 129{,}47°$$

Cette activité permet de rendre sensible aux élèves que l'absence de déformation d'une image correspond à une transformation géométrique qui conserve les angles et qui modifie les longueurs en les multipliant par un même nombre. Les longueurs correspondantes sur les deux images sont proportionnelles. C'est également l'occasion de leur parler des incertitudes des mesures.

2) Symétrie :

Dans le même esprit, il peut être intéressant de montrer aux élèves l'effet sur une photographie des transformations géométriques qu'ils connaissent. Bien que *Geogebra* considère les images comme des objets à part entière auxquels il possible d'appliquer une transformation géométrique (symétrie, translation, rotation, homothétie), il me semble plus formateur de continuer à appliquer la méthode précédente.

Cette méthode s'applique sans difficulté à la symétrie centrale, mais pas à la symétrie axiale qui change l'orientation des angles. Il faut retourner l'image et pour cela utiliser le troisième coin.

Voici une façon de procéder :
Insérons l'image comme d'habitude.
A est le coin 1 et B le coin 2.
Plaçons le point C sur le coin 4 de l'image.

Si la position du point C est correcte, en ouvrant les propriétés de l'image et en fixant le coin 4 sur C, l'image ne doit pas bouger.

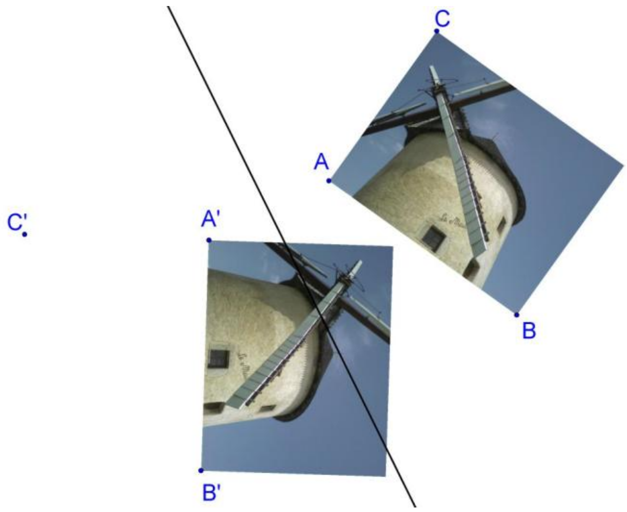

Figure 6

Les points A', B' et C' sont les symétriques des points A, B et C par rapport à l'axe tracé.

Insérons à nouveau la même image en choisissant A' pour coin 1 et B' pour coin 2.

Regardons au passage ce que nous obtenons (figure 6). La transformation géométrique est pour l'instant un déplacement (ici une rotation) puisque l'image n'a pas encore été retournée.

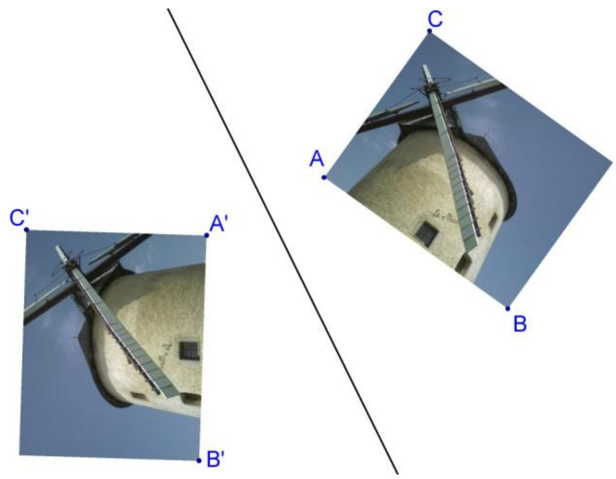

Figure 7

Terminons la manipulation en choisissant le point C' pour coin 4. Cette fois nous obtenons bien deux images symétriques. (figure 7).

Cette activité fait sentir concrètement l'importance de la conservation de l'orientation.

3) Déformations de l'image :

L'utilisation du troisième coin permet de déformer la photographie et, par là même de montrer des transformations géométriques qui « transforment vraiment ».

Reprenons notre image. Choisissons à nouveau comme coins les points A et B. Nous les laisserons fixes et déplacerons le point C choisi pour coin 4.

Un déplacement quelconque du point C peut être obtenu par un déplacement sur une droite perpendiculaire à (AB) suivi d'un déplacement sur une droite parallèle à (AB). Il suffit donc d'examiner les transformations géométriques correspondant à ces deux façons de déplacer le point C. En composant ces transformations, nous obtiendrons toutes les déformations possibles de l'image.

Bien que déformées, ces nouvelles images restent très reconnaissables. Ces transformations conservent donc certaines propriétés de l'image initiale. Il est naturel de rechercher lesquelles et cette recherche peut donner lieu à des exercices.

a) C se déplace sur une perpendiculaire à la droite (AB) :

Observons la transformation de la photographie. Appelons S_1 le sommet du moulin sur la photographie de départ et S son image sur la photographie transformée. Nous constatons que :

$(S_1 S)$ est perpendiculaire à (AB)

$\frac{S_1 H}{SH}=\frac{C_1 A}{CA}=k$, H étant le projeté orthogonal de S_1 sur (AB).

Cette proportion nous fait penser au théorème de Thalès et nous incite à tracer les droites (C_1S_1) et (CS) qui se coupent en I sur (AB). Nous admettons que l'image d'une droite est une droite. Si une droite coupe la droite (AB) dont les points sont invariants, son image coupe la droite (AB) au même point. Ce raisonnement a déjà été fait pour la symétrie axiale. Nous disposons de cette façon d'une construction de l'image d'un point.

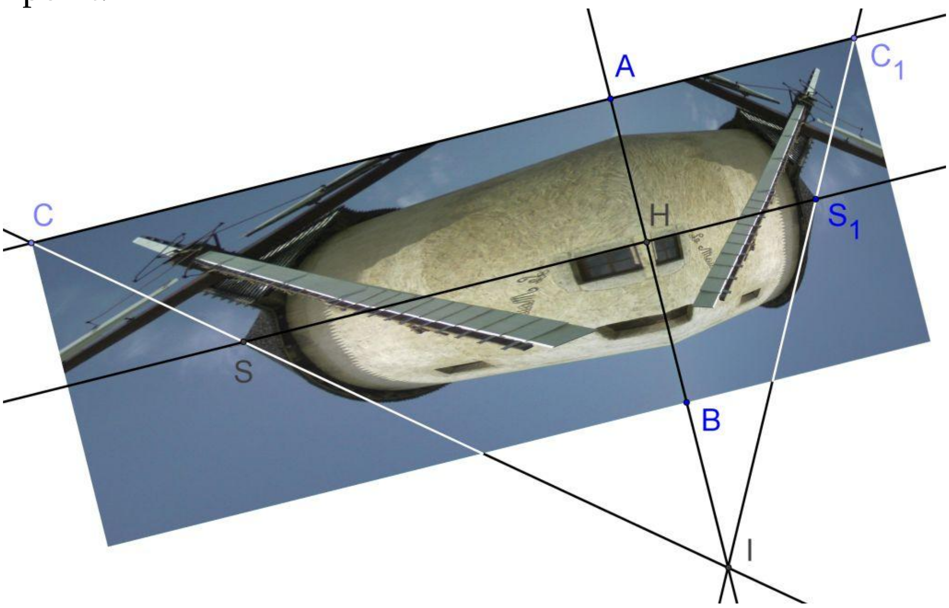

Figure 8
Quand C se déplace sur une perpendiculaire à la droite (AB),
la photographie est transformée par une affinité orthogonale d'axe (AB)

Quelles sont les propriétés conservées par cette transformation ?

Observons que si C et C_1 sont de part et d'autre de la droite (AB), comme sur la figure 8, la transformation change l'orientation. S'ils sont du même côté de (AB), elle la conserve.

Les longueurs ne sont pas conservées mais obtenir CS en fonction de C_1S_1 peut se faire en utilisant la définition du cosinus :

$$CS = C_1S_1 \frac{\cos \widehat{AIC_1}}{\cos \widehat{AIC}}$$

La conservation des milieux se montre en utilisant le théorème de la droite des milieux.

Sur la figure 9, M_1 étant le milieu de $[R_1S_1]$, une première application de ce théorème dans le triangle RR_1S_1 prouve que L est milieu de $[RS_1]$. Une seconde application dans le triangle RS_1S montre que M est milieu de [RS].

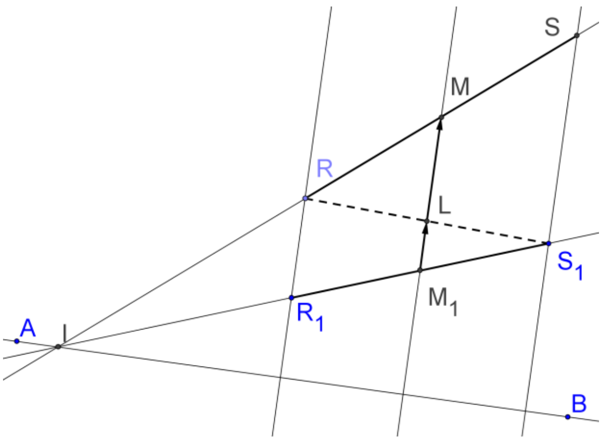

Figure 9

La conservation des milieux entraine celle du parallélisme en raison de la propriété caractéristique du parallélogramme.

Les aires sont multipliées par k. Il suffit de le montrer pour un triangle, puisque tout polygone peut être considéré comme « somme » de triangles du point de vue de l'aire.

Nous partageons le triangle $R_1S_1T_1$ en deux, en traçant une parallèle à (AB) passant par le sommet T_1 coupant le côté opposé $[R_1S_1]$ en G_1. (Figure 10). R_1 se projette orthogonalement sur cette droite en E_1 et S_1 en F_1.

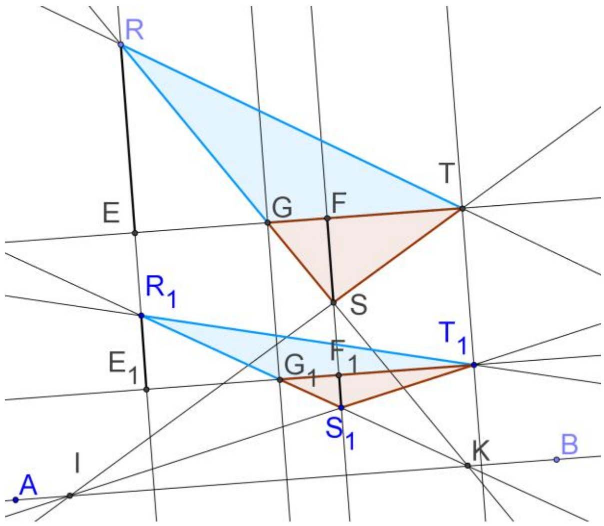

Figure 10

Les images respectives E, F, G, et T de E_1, F_1, G_1 et T_1 sont sur la parallèle à (AB) passant par T, à l'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant respectivement par E_1, F_1 G_1 et T_1.

Comme $GT = G_1T_1$ et $FS = k \times F_1S_1$,
l'aire de GST vaut k fois celle de $G_1S_1T_1$.
Le même raisonnement s'applique à RGT et $R_1G_1T_1$ et finalement à RST.

b) C se déplace sur une parallèle à la droite (AB) :

La photographie transformée a maintenant la forme d'un parallélogramme ABDC, en appelant D le troisième coin. Observons, comme précédemment le point S_1 et son image S.

La droite (S_1S) est parallèle à la droite (AB). Elle coupe $[AC_1]$ en K_1 et [AC] en K. Le point K est l'image de K_1.

Le parallélogramme AH_1SK est l'image du rectangle $AH_1S_1K_1$, H_1 étant le projeté orthogonal de S_1 sur (AB) ce qui nous donne une méthode de construction de l'image d'un point.

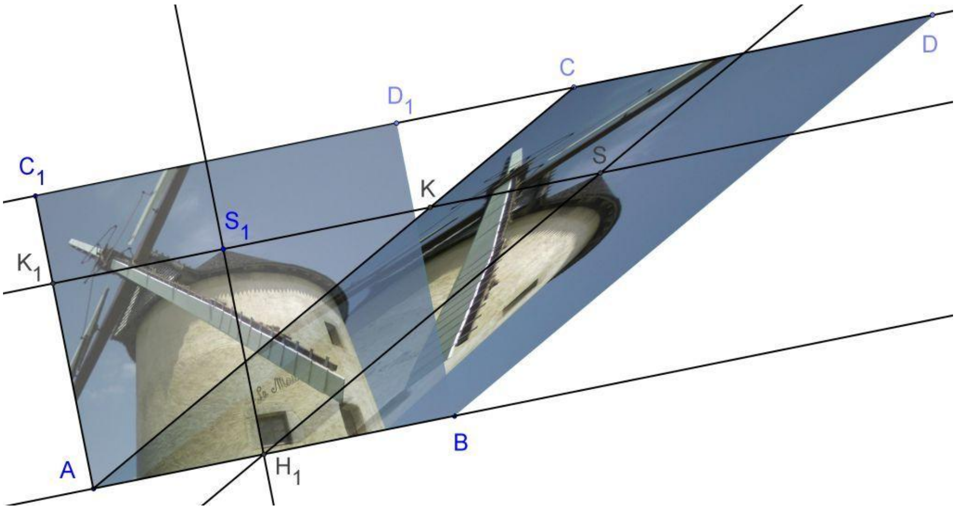

Figure 11
Quand C se déplace sur une parallèle à la droite (AB),
la photographie est transformée par une transvection d'axe (AB).

Quelles sont les propriétés conservées par cette transformation ?

Ici C_1 et son image C sont toujours du même côté de la droite (AB). La transformation conserve l'orientation.

Les longueurs et les angles ne sont visiblement pas conservés.

Comme au paragraphe précédent nous admettons que l'image d'une droite est une droite. Si une droite coupe la droite (AB) dont les points sont invariants, son image coupe aussi la droite (AB) au même point, ce qui permet de construire d'une autre façon l'image d'un point.

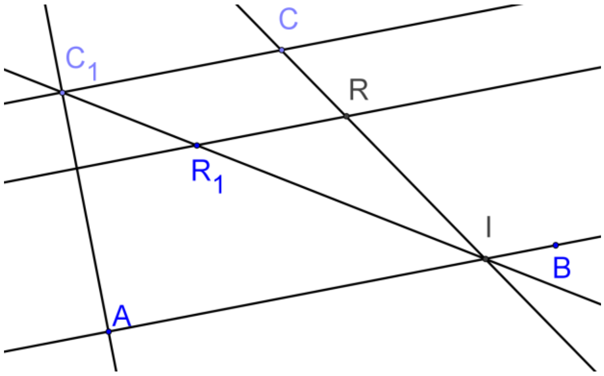

Figure 12

La figure 12 montre la construction de l'image R de R_1, connaissant l'image C de C_1.

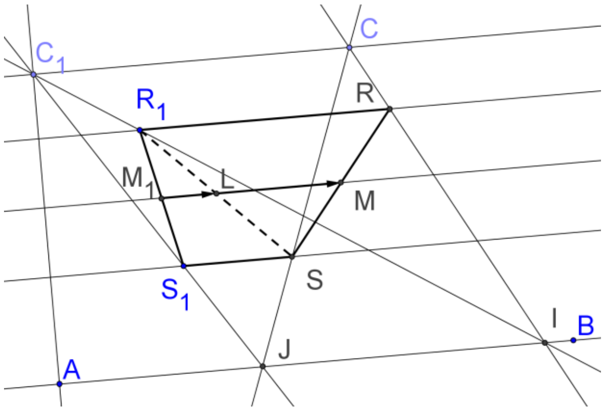

Figure 13

Ici encore la conservation des milieux peut se montrer grâce au théorème de la droite des milieux, comme le montre la figure 13.

Enfin, une propriété qui surprend beaucoup les élèves, la transformation conserve les aires bien qu'elle ne conserve pas les longueurs.

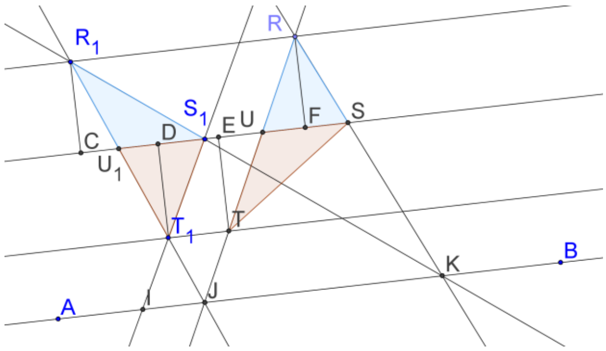

Figure 14

Sur la figure 14, les triangles $R_1S_1T_1$ et RST sont partagés en deux triangles par la parallèle à (AB) passant par S_1 qui coupe $[R_1T_1]$ en U_1 et [RT] en U.

U est l'image de U_1 et S l'image de S_1 donc

U_1S_1 = US. (car sur une droite parallèle à (AB) les longueurs se conservent)

C, D, E et F sont les projetés orthogonaux respectivement de R_1, T_1, T et R.

R_1C = RF et T_1D = TE

Les triangles $R_1U_1S_1$ et RUS ont donc la même aire et il en est de même des triangles $T_1U_1S_1$ et TUS.

Comme tout polygone peut être considéré du point de vue de l'aire comme une « somme » de triangles, la transformation conserve les aires.

Les démonstrations suggérées ci-dessus sont toutes du niveau de quatrième. Il ne s'agit pas, bien sûr de faire la théorie de ces transformations, mais de résoudre certains problèmes qui se posent de façon naturelle pendant la manipulation.

4) Sitographie :

Pour terminer, voici quelques liens en rapport avec cet article et le précédent:

Sur l'astronomie le site du CLEA (comité de liaison enseignants astronomes)
http://www.ac-nice.fr/clea/

Le site du musée des beaux-arts de Dijon
(en attendant de le visiter réellement lors d'un passage à Dijon)
http://mba.dijon.fr/

Sur Zanobi Machiavelli :
http://www.treccani.it/enciclopedia/zanobi-machiavelli_(Dizionario_Biografico)/
C'est en italien, mais la traduction de google est compréhensible.

Sur l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique :
http://geowiki.u-bourgogne.fr/

Créé par l'IREM de Dijon, ce wiki voudrait être un lieu d'échange pour tous ceux qui utilisent des logiciels de géométrie dynamique, libres ou gratuits. Je vous invite donc à le visiter et surtout à vous y exprimer