# Apprentis chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus (première partie)

*Marie-Line GARDES*
gardes.marie-line@wanadoo.fr
*Doctorante en didactique des mathématiques.*
*S2HEP, Université Lyon 1, ENS de Lyon*
*Denis GARDES*
denis.gardes@wanadoo.fr
*Professeur, lycée Henri Parriat Montceau-les-mines*

Résumé : Dans cet article, nous rendons compte d'une expérimentation en classe de terminale scientifique où les élèves ont pratiqué une activité de recherche mathématique. Après présentation du problème et de quelques éléments mathématiques, nous détaillons le dispositif didactique mis en œuvre dans la classe puis nous analysons les travaux de recherche des élèves.

Mots clés : problème de recherche, terminale scientifique, conjecture d'Erdös-Straus, dimension expérimentale.

## Introduction

Depuis plusieurs années, les programmes de l'enseignement secondaire mettent en évidence l'importance de la démarche d'investigation et plus particulièrement, la résolution de problèmes pour l'apprentissage des mathématiques (Houdement 2012). Parallèlement, de nombreux travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés à cette problématique dès les années 80 (Brousseau 1986, Arsac et al 1988). Actuellement, ces questions autour de la démarche d'investigation en classe sont toujours discutées (Université d'été Animath[1] en 2004, veille scientifique[2] INRP en 2006, journées mathématiques de l'Ifé 2012) et étudiées (travaux des équipes

[1] Les actes sont publiés dans la brochure APMEP 168 *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*.

[2] Cette veille a donné lieu à un dossier coordonné par Kuntz, *Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques*, en ligne sur le site de l'Ifé.

Math à Modeler[3] et DREAM-RESCO[4]). Ces travaux montrent à la fois l'intérêt des enseignants pour ces pratiques de classes et la difficulté de leur mise en œuvre.
Dans cet article, nous rendons compte d'une expérimentation en classe de terminale scientifique où les élèves ont pratiqué une activité de recherche mathématique. Après avoir présenté le problème de recherche choisi, nous développons un exemple d'une recherche de ce problème. Ensuite, nous détaillons le dispositif didactique mis en œuvre en classe, avec ses différentes phases de recherche illustrées par les travaux des élèves. En les mettant en perspective avec ceux des chercheurs, nous mettons en évidence des similitudes de démarche de recherche. Nous présentons également la séance de synthèse où les connaissances mathématiques en jeu dans la recherche du problème et en lien avec le programme sont explicitées et retravaillées.

## Présentation du problème de recherche

Le problème choisi pour cette expérimentation est une conjecture énoncée par Erdös et Straus en 1950 (Erdös, 1950) :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe trois entiers naturels non nuls et non nécessairement distincts $a, b, c$ tels que $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. [*]

Ce problème a été étudié par plusieurs mathématiciens (Oblath 1950, Rosati 1954, Bernstein 1961, Yamamoto 1964, Mordell 1969, Schinzel 2000, Swett 1999, Mizony 2010) mais n'est actuellement pas résolu. Nous avons choisi un problème non résolu en raison de notre projet d'étudier à la fois la recherche de mathématiciens, d'élèves et d'étudiants sur un même problème. Afin de pouvoir le présenter à un chercheur, il semblait nécessaire qu'il ne soit pas résolu par la communauté mathématique. Pour les élèves et les étudiants, ce caractère n'est pas nécessaire. Cela pourrait être un problème résolu mais ouvert pour eux[5]. Un critère important est la possibilité pour les élèves de s'engager dans la résolution du problème avec leurs connaissances. Ici ce critère est assuré par la familiarité des objets en jeu, à savoir les nombres entiers et les fractions.

## Un exemple de recherche

Nous présentons dans ce paragraphe le déroulement d'une recherche de ce problème avec ses hésitations et ses avancées. Nous mettons en évidence des idées stratégiques et des techniques qui ont permis d'établir quelques résultats intermédiaires.
Essayons de trouver des solutions à l'équation [*] pour les premières valeurs de $n$.

• Si $n = 1$, nous avons : $4 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Ceci est impossible puisque la valeur maximale de $\dfrac{1}{a}$, de $\dfrac{1}{b}$ et de $\dfrac{1}{c}$ est 1.

• Si $n = 2$, il est clair que $\dfrac{4}{2} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$. Donc pour $n = 2$, c'est possible.

[3] mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/
[4] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/problemes-et-enseignement-des-mathematiques
[5] Pour une définition du problème ouvert, voir Arsac et Mante 2007.

• Si $n = 3$, nous avons : $\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ mais nous avons aussi $\frac{4}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.

Pour $n = 3$, c'est encore possible et on peut noter que la décomposition n'est pas unique.

• Si $n = 4$, il vient immédiatement que : $\frac{4}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Cela marche encore pour $n = 4$.

• Si $n = 5$, alors $\frac{4}{5} = \ldots$. Ah, ah, cela ne vient pas immédiatement. $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$. C'est bon pour $n = 5$, mais cela a demandé un effort plus important.

• Si $n = 6$, que nous sommes bêtes ! Il suffit de prendre l'égalité pour $n = 3$ et de la diviser par 2, donc $\frac{4}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Cette idée nous donne le lemme suivant :

**Lemme 1 :** S'il existe des entiers *a, b* et *c* tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ alors il existe des entiers *a*', *b*' et *c*' tels que $\frac{4}{kn} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$.

Il suffit de prendre $a' = k\,a$ , $b' = k\,b$ et $c' = k\,c$.

Grâce au théorème de décomposition en facteurs premiers, nous en déduisons le résultat suivant :

**Lemme 2** : Il suffit de résoudre le problème pour tout entier *n* premier.

Reprenons nos essais.

• Si $n = 7$, alors $\frac{4}{7} = \ldots$.. Cela devient moins évident. Ah, nous avons une idée, décomposons $\frac{4}{7}$ avec la plus grande faction de numérateur égal à 1 et inférieure à $\frac{4}{7}$.

Appelons la, la fraction « juste inférieure » à $\frac{4}{7}$. Cette fraction est $\frac{1}{2}$.

Ainsi $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28}$.

C'est une idée à poursuivre, elle rappelle celle utilisée pour le développement des fractions continues.

• Si $n = 11$, $\frac{4}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{66} + \frac{1}{66}$. L'idée permet d'ébaucher une technique de décomposition.

Vérifions la validité de cette technique sur les cas suivants :

• Si $n = 13$, $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{3}{52}$ ; Ah, Ah, renouvelons notre technique pour $\frac{3}{52}$. Nous avons : $\frac{3}{52} = \ldots$

Quelle est cette fraction « juste inférieure » à $\frac{3}{52}$ de numérateur égal à 1 ?

En tâtonnant, par comparaison des valeurs approchées de $\frac{3}{52}$ et de $\frac{1}{n}$ pour $n$ entre 10 et 20, nous trouvons $\frac{3}{52} = \frac{1}{18} + \frac{1}{468}$.

Ainsi nous obtenons : $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}$.

Une impression se dégage, les décompositions deviennent de plus en plus difficiles à obtenir.

• Si $n = 17$, cherchons de nouveau la fraction « juste inférieure » à $\frac{3}{85}$ de numérateur 1.

Au lieu de tâtonner, cherchons l'expression de cette fraction de numérateur 1 inférieure ou égale à la fraction $\frac{4}{a}$.

Nous avons donc : $\frac{4}{a} \geq \frac{1}{x}$ et $\frac{4}{a} < \frac{1}{x-1}$, c'est-à-dire $x - 1 < \frac{a}{4} \leq x$.

Nous en déduisons aisément le lemme suivant :

**Lemme 3 :** Si $a$ n'est pas un multiple de 4, alors la plus grande fraction de numérateur 1 inférieure ou égale à $\frac{4}{a}$ est $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{a}{4}\right) + 1}$ où E(x) désigne la partie entière de $x$.

Utilisons ce lemme pour $\frac{4}{17}$. Nous avons $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{17}{4}\right) + 1} = \frac{1}{5}$. Ainsi $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{3}{85}$.

Réitérons le procédé avec $\frac{3}{85}$.

Pour ce faire, nous devons généraliser le lemme 3 avec les fractions $\frac{b}{a}$ avec l'énoncé suivant :

**Lemme 4 :** Si $a$ n'est pas un multiple de $b$, alors la plus grande fraction de numérateur 1 inférieure ou égale à $\frac{b}{a}$ est $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right) + 1}$.

Ainsi nous obtenons : $\frac{3}{85} = \frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{85}{3}\right) + 1} + r = \frac{1}{29} + r$. Donc $r = \frac{3}{85} - \frac{1}{29} = \frac{2}{2465}$.

Aïe, aïe, aïe, cela ne marche pas. Nous n'obtenons pas $\frac{4}{17}$ comme la somme de trois fractions de numérateur 1.

Persévérons et au lieu de prendre $\frac{1}{5}$ comme première fraction, prenons $\frac{1}{6}$. Ainsi $\frac{4}{17} = \frac{1}{6} + \frac{7}{102}$ et $\frac{7}{102} = \frac{1}{15} + \frac{1}{510}$. Enfin nous obtenons : $\frac{4}{17} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{510}$. Ouf !

Poursuivons nos essais, 17 a été pour l'instant un entier particulier, et 19 alors ?

• Si $n$ = 19. Nous avons $\mathrm{E}\left(\frac{19}{4}\right) + 1 = 5$, donc $\frac{4}{19} = \frac{1}{5} + \frac{1}{95}$. Nous devons décomposer $\frac{1}{95}$ en deux fractions de numérateur 1. Comme $95 = 5 \times 19$, on ne peut simplifier une fraction de dénominateur égal à 95 que par 5 ou 19. Essayons de faire apparaître 5 au numérateur d'une fraction égale à $\frac{1}{95}$.

Nous trouvons $\frac{1}{95} = \frac{1}{19 \times 5} = \frac{6}{6 \times 19 \times 5} = \frac{5}{6 \times 19 \times 5} + \frac{1}{6 \times 19 \times 5} = \frac{1}{114} + \frac{1}{570}$.

Donc $\frac{4}{19} = \frac{1}{5} + \frac{1}{114} + \frac{1}{570}$.

Au passage, nous avons utilisé l'identité suivante : $\frac{1}{ab} = \frac{1}{(a+1)b} + \frac{1}{a(a+1)b}$.

Nous pouvons énoncer le lemme suivant :

**Lemme 5 :** Pour tous $a$ et $b$ entiers naturels non nuls, $\frac{1}{ab} = \frac{1}{(a+1)b} + \frac{1}{a(a+1)b}$.

Pour $n$ = 19, l'idée première de prendre $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{a}{4}\right) + 1}$ comme première fraction a été fructueuse.

Essayons encore pour $n$ = 23 avant de faire le point … à moins que ce cas nous réserve des surprises !

• Si $n$ = 23. Nous avons $\mathrm{E}\left(\frac{23}{4}\right) + 1 = 6$, donc $\frac{4}{23} = \frac{1}{6} + \frac{1}{138}$.

En appliquant la technique utilisant le lemme 5, $\frac{1}{138} = \frac{1}{2 \times 69} = \frac{1}{3 \times 69} + \frac{1}{2 \times 3 \times 69} = \frac{1}{207} + \frac{1}{414}$.

Ainsi : $\frac{4}{23} = \frac{1}{6} + \frac{1}{207} + \frac{1}{414}$.

Faisons le point sur ces premiers essais. Nous avons obtenu :

| $n$ | Décomposition | Commentaires |
|---|---|---|
| 1 | Impossible | |
| 2 | $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ | |
| 3 | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ | Nous avons aussi $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$. La décomposition n'est pas unique. |
| 5 | $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ | |
| 7 | $\frac{1}{2}+\frac{1}{28}+\frac{1}{28}$ | |
| 11 | $\frac{1}{3}+\frac{1}{66}+\frac{1}{66}$ | |
| 13 | $\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{468}$ | |
| 17 | $\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{510}$ | La première fraction n'est pas $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{17}{4}\right)+1}$ |
| 19 | $\frac{1}{5}+\frac{1}{114}+\frac{1}{570}$ | |
| 23 | $\frac{1}{6}+\frac{1}{207}+\frac{1}{414}$ | |

Si nous examinons ces cas, nous pouvons remarquer que si $n$ est congru à 3 modulo 4 (c'est-à-dire 3, 7, 11, 19 et 23) alors la première fraction est $\frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right)+1}$. Essayons de prouver cela.

Posons $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbf{N}$. Ainsi $\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right) + 1 = k + 1$.

Donc $\frac{4}{4k+3} = \frac{1}{k+1} + r$ avec $r = \frac{4}{4k+3} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(4k+3)(k+1)}$

$= \frac{1}{(k+2)(4k+3)} + \frac{1}{(4k+3)(k+1)(k+2)}$ en utilisant le lemme 5.

Nous obtenons l'énoncé suivant :

**Lemme 6 :** Si $n \equiv 3$ [4], alors $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbf{N}$

et $\frac{4}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+2)(4k+3)} + \frac{1}{(4k+3)(k+1)(k+2)}$.

Il reste donc les cas $n \equiv 1$ [4] à traiter (si $n \equiv 0$ ou 2 [4], alors $n$ n'est pas premier sauf si $n = 2$).

En examinant les cas restants du tableau ($n = 5$, $n = 13$ et $n = 17$), nous remarquons que si $n$ est congru à 5 modulo 8, alors la première fraction est encore $\dfrac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right)+1}$.

En effet , si $n = 8k + 5$, nous obtenons $\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right) + 1 = 2k + 1 + 1 = 2(k + 1)$.

$$\text{Ainsi } \frac{4}{8k+5} = \frac{1}{2(k+1)} + r \text{ avec } r = \frac{4}{8k+5} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{3}{2(k+1)(8k+5)}$$
$$= \frac{2}{2(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}$$
$$= \frac{1}{(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{4}{8k+5} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}.$$

Nous en déduisons le lemme suivant :

**Lemme 7** : Si $n \equiv 5$ [8], alors $n = 8k + 5$ avec $k \in \mathbf{N}$ et

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}.$$

En examinant le cas restant $n = 17$ ( nous sommes alors dans le cas $n \equiv 1$ [8]), nous pouvons conjecturer que la première fraction est $\dfrac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right)+2}$. Essayons de prouver cette conjecture.

Posons $n = 8k + 1$ avec $k \in \mathbf{N}$. Ainsi $\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right) + 2 = 2k + 2$.

$$\text{Ainsi } \frac{4}{8k+1} = \frac{1}{2k+2} + \frac{7}{2(k+1)(8k+1)}$$
$$= \frac{1}{2k+2} + \frac{2}{2(k+1)(8k+1)} + \frac{5}{2(k+1)(8k+1)}$$
$$= \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{(k+1)(8k+1)} + \frac{5}{2(k+1)(8k+1)}.$$

Donc si $k = 4 + 5k'$ ($k' \in \mathbb{N}$), alors
$$\frac{4}{8k+1} = \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{(k+1)(8k+1)} + \frac{1}{2(k'+1)(8k+1)}.$$

Nous venons de prouver que si $n = 8(5(k' + 4) + 1) = 40k' + 33$, c'est-à-dire $n \equiv 33$ [40], alors

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{10k' + 10} + \frac{1}{5(k' + 1)(40k' + 33)} + \frac{1}{2(k' + 1)(40k' + 33)}.$$

En conclusion, à ce niveau de la recherche, nous pouvons écrire que :

**Propriété** : Soit $n \geq 3$ premier.

1. Pour tout $n$ non congru à 1 modulo 8, il existe des entiers $a$, $b$ et $c$ tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
2. Si $n$ est congru à 1 modulo 8 et si $n$ est congru à 33 modulo 40 alors il existe $a$, $b$ et $c$ tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Nous pourrions poursuivre la recherche dans cette direction, à savoir traiter des classes de nombres où le problème a une solution.

### Présentation du dispositif

Cette expérimentation a eu lieu avec dix élèves de terminale scientifique du lycée H. Parriat à Montceau-les-Mines. Les élèves suivent la spécialité mathématiques et un parcours excellence en mathématiques[6]. Ce parcours leur offre deux heures hebdomadaires supplémentaires de mathématiques afin de mieux préparer une entrée en classe préparatoire l'année suivante. Le programme est libre et élaboré par l'enseignant[7].

Le dispositif a été construit sur sept séances de deux heures. La première séance a été consacrée à une recherche individuelle du problème. Il s'en est suivi quatre séances au travail de recherche collectif par groupe de trois ou quatre avec une mise en commun en classe entière après deux séances. La sixième séance a été dédiée à un débat en classe entière sur les travaux des différents groupes et la dernière séance a été consacrée à un travail de synthèse et d'institutionnalisation. Les séances ont été gérées par l'enseignant comme un dispositif problème-ouvert (Arsac et Mante 1988, 2007). Pour les besoins de l'étude didactique, nous avons enregistré et filmés les échanges au sein des groupes et de la classe grâce à des caméras et des enregistreurs numériques.

### Le travail des élèves sur la conjecture

Les élèves savaient que le problème était non résolu. Nous leur avons demandé d'étudier l'énoncé suivant :

---

[6] Le choix de faire cette expérimentation dans une classe non ordinaire résulte de besoins pour nos recherches. Cependant de nombreuses expérimentations avec ce problème ont eu lieu dans des classes ordinaires. Voir Gardes 2010.

[7] Les élèves ont par exemple suivi un cours sur l'histoire des nombres complexes, ont fait un travail sur la quadrature du cercle, ont l'habitude de chercher des problèmes ouverts.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut trouver trois entiers naturels non nuls $a$, $b$ et $c$ tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ?

Ci -dessous, nous détaillons ces différentes séances avec les objectifs et des extraits de travaux d'élèves.

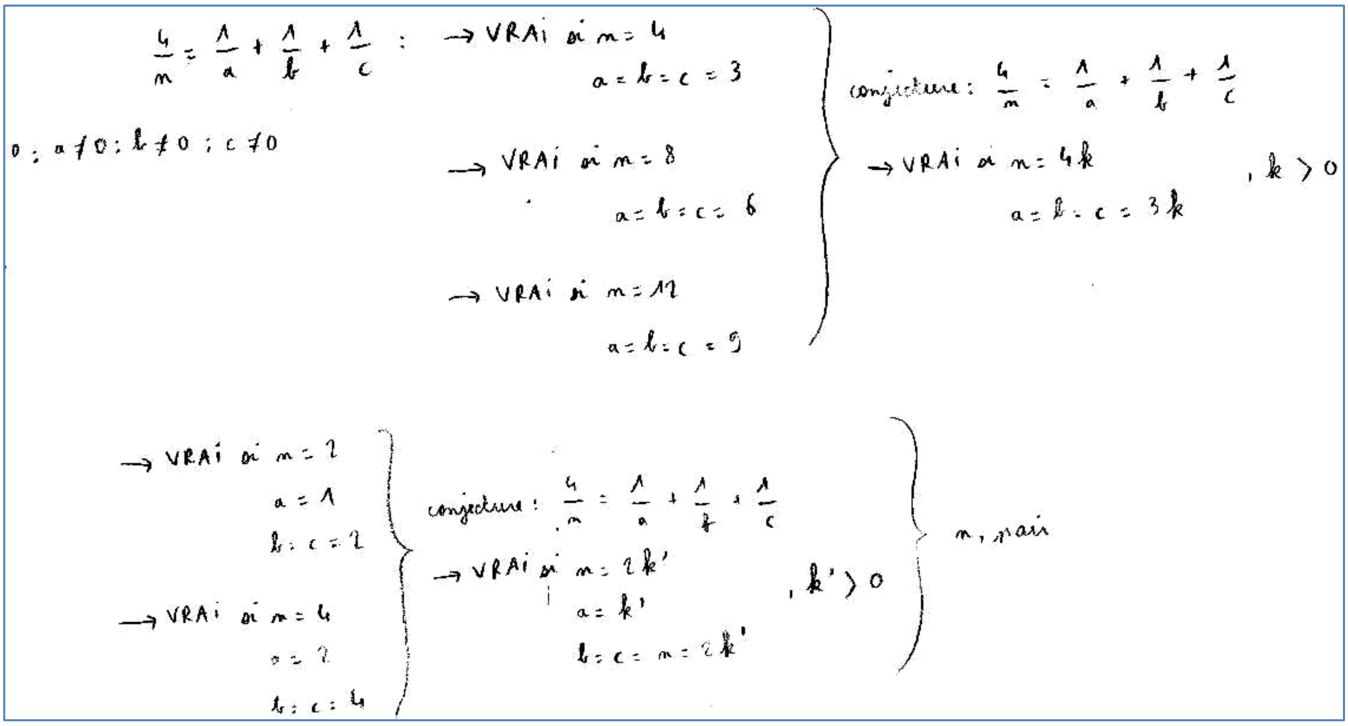
1. <u>La séance de recherche individuelle</u> *(mardi 13 mars 2012)*

Pour la première séance de travail sur la conjecture, nous avons proposé aux élèves trois consignes : s'engager individuellement dans la résolution du problème pendant 45 minutes, préparer une synthèse de leur recherche (environ 15 minutes) et enfin mettre en commun, au sein du groupe, les différentes synthèses individuelles pendant 30 minutes. L'objectif d'une recherche individuelle est l'appropriation du problème par chaque élève. Il peut ainsi réfléchir à ses propres idées et pistes de recherche pour la résolution du problème. Cela facilite ensuite l'intégration eu groupe  mais surtout cela augmente la richesse des échanges, des idées et des pistes de recherche au sein du groupe.

Les premières actions des élèves sur la recherche de cette conjecture sont de deux natures : soit exploratoire, ils cherchent des solutions à l'équation pour des petites valeurs de $n$ ; soit opératoire, ils effectuent des manipulations algébriques sur l'équation initiale de type réduction au même dénominateur, produit en croix ou isolement de l'inconnue.

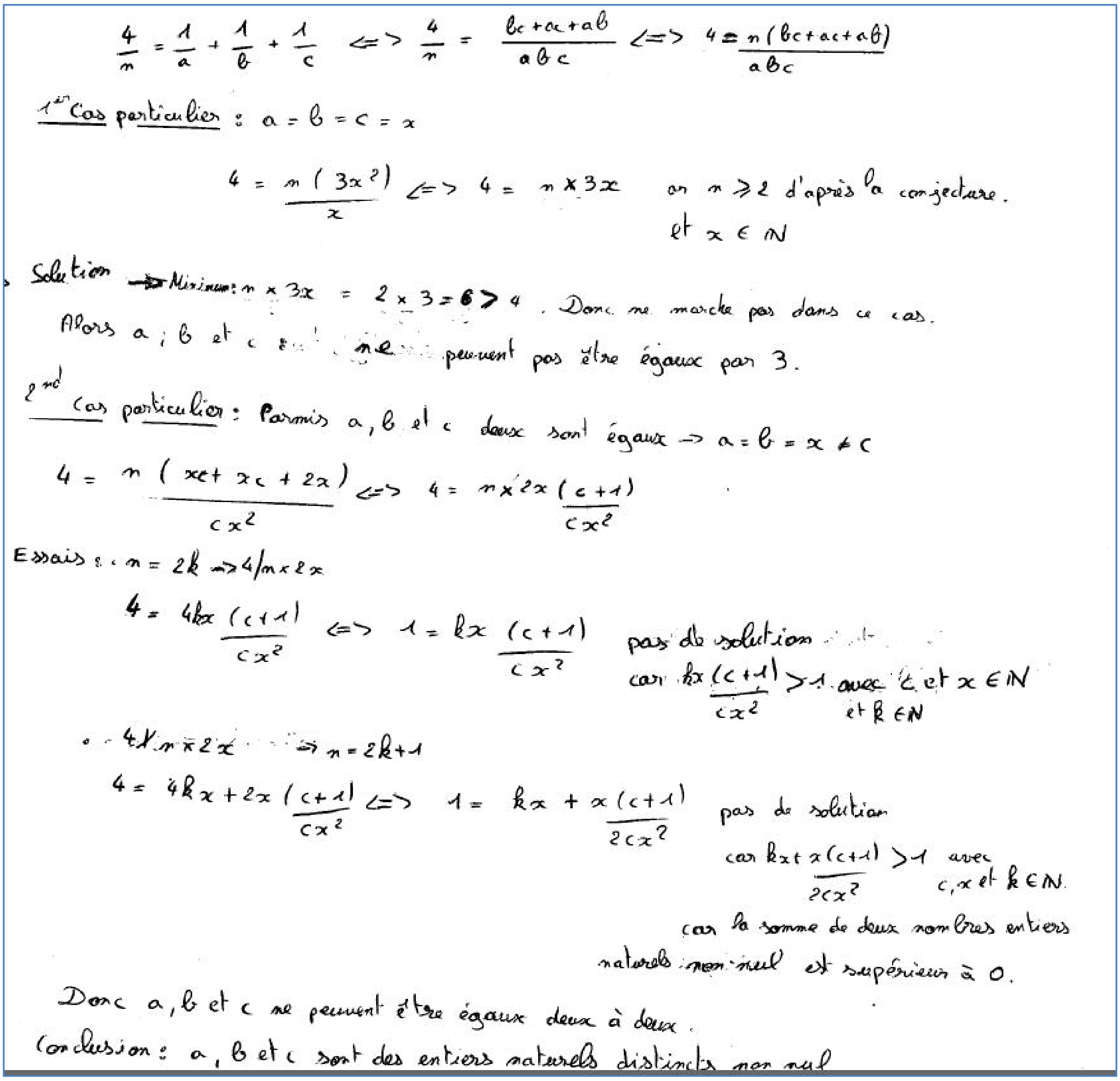
Nous avons repéré trois types de travail dans les recherches individuelles des élèves.

<u>Type 1</u> : Les recherches exploratoires. Les élèves cherchent des solutions à l'équation pour des petites valeurs de *n* et essaient de trouver des régularités.



*Exemple 1 : Cet élève fait des essais pour n = 4, 8 et 12 et conjecture que l'équation a des solutions pour les nombres pairs (la conjecture sera vérifiée et démontrée en groupe).*

Type 2 : Les recherches opératoires. Les élèves manipulent algébriquement l'équation initiale pour essayer de la résoudre.



$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{4}{n} = \frac{bc+ac+ab}{abc} \Leftrightarrow 4 = \frac{n(bc+ac+ab)}{abc}$

1er Cas particulier : $a = b = c = x$

$4 = \frac{n(3x^2)}{x} \Leftrightarrow 4 = n \times 3x$ or $n \geq 2$ d'après la conjecture.
et $x \in \mathbb{N}$

Solution → Minimum : $n \times 3x = 2 \times 3 = 6 > 4$. Donc ne marche pas dans ce cas.
Alors a ; b et c ne peuvent pas être égaux par 3.

2nd Cas particulier : Parmis a, b et c deux sont égaux → $a = b = x \neq c$

$4 = \frac{n(xc + xc + 2x)}{cx^2} \Leftrightarrow 4 = n \times 2x \frac{(c+1)}{cx^2}$

Essais : $n = 2k \Rightarrow 4 / n \times 2x$

$4 = 4kx \frac{(c+1)}{cx^2} \Leftrightarrow 1 = kx \frac{(c+1)}{cx^2}$ pas de solution
car $kx \frac{(c+1)}{cx^2} > 1$ avec c et $x \in \mathbb{N}$
et $k \in \mathbb{N}$

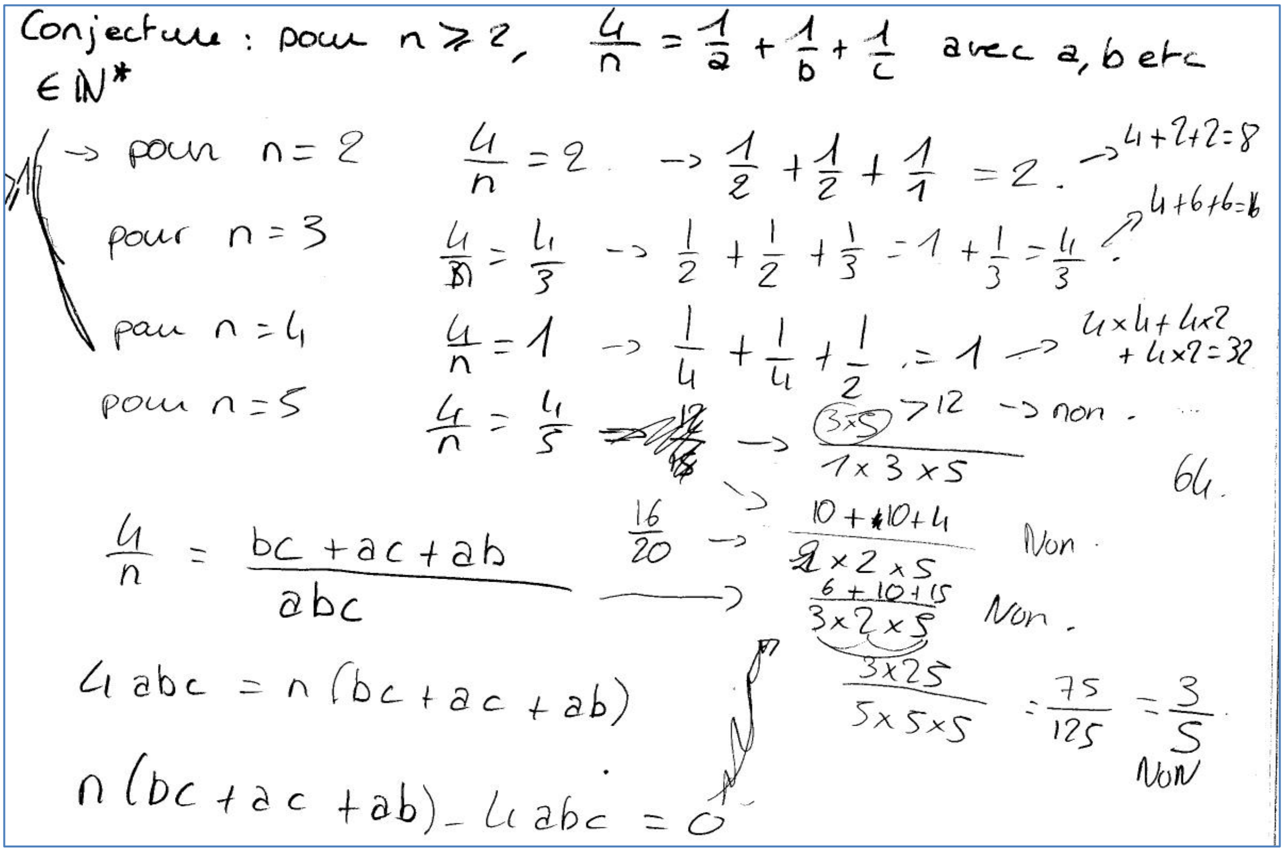
• $4 \nmid n \times 2x \Rightarrow n = 2k+1$

$4 = 4kx + 2x \frac{(c+1)}{cx^2} \Leftrightarrow 1 = kx + \frac{x(c+1)}{2cx^2}$ pas de solution
car $kx + \frac{x(c+1)}{2cx^2} > 1$ avec c, x et $k \in \mathbb{N}$.
car la somme de deux nombres entiers naturels non nul et supérieur à 0.

Donc a, b et c ne peuvent être égaux deux à deux.
Conclusion : a, b et c sont des entiers naturels distincts non nul

*Exemple 2 : Cet élève transforme l'écriture de l'équation initiale sous deux formes différentes puis étudie des cas particuliers où certaines variables sont égales. Il en tire une conclusion qui sera infirmée en groupe par un contre-exemple : pour n = 4, a = b = c = 3.*

Type 3 : Les recherches exploratoires et opératoires. Certaines élèves utilisent alternativement l'une ou l'autre des méthodes.



Conjecture : pour $n \geqslant 2$, $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ avec a, b et c $\in \mathbb{N}^*$

→ pour $n = 2$ $\quad \frac{4}{n} = 2 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2. \rightarrow 4+2+2=8$

pour $n = 3$ $\quad \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow 4+6+6=16$

pour $n = 4$ $\quad \frac{4}{n} = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow 4\times4 + 4\times2 + 4\times2 = 32$

pour $n = 5$ $\quad \frac{4}{n} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{3\times5}{1\times3\times5} > 12 \rightarrow$ non. 64.

$\frac{4}{n} = \frac{bc+ac+ab}{abc}$ $\quad \frac{16}{20} \rightarrow \frac{10+10+4}{2\times2\times5}$ Non. $\rightarrow \frac{6+10+15}{3\times2\times5}$ Non.

$\frac{3\times25}{5\times5\times5} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}$ NON

$4abc = n(bc+ac+ab)$

$n(bc+ac+ab) - 4abc = 0$

*Exemple 3 : cette élève commence par chercher des solutions à l'équation pour certaines valeurs de n puis essaie de faire un lien (symboliser par les flèches) avec l'équation initiale qu'elle réécrit sous deux formes différentes.*

2. Les séances de recherche collective *(mardi 20 et 27 mars, mardi 10 avril)*

Il y a eu trois séances de recherche en groupe où les élèves avaient pour consigne, de reprendre la recherche du problème en groupe pendant une heure et demie puis de rédiger une synthèse de leurs recherches dans le cahier de bord du groupe (environ 30 minutes).

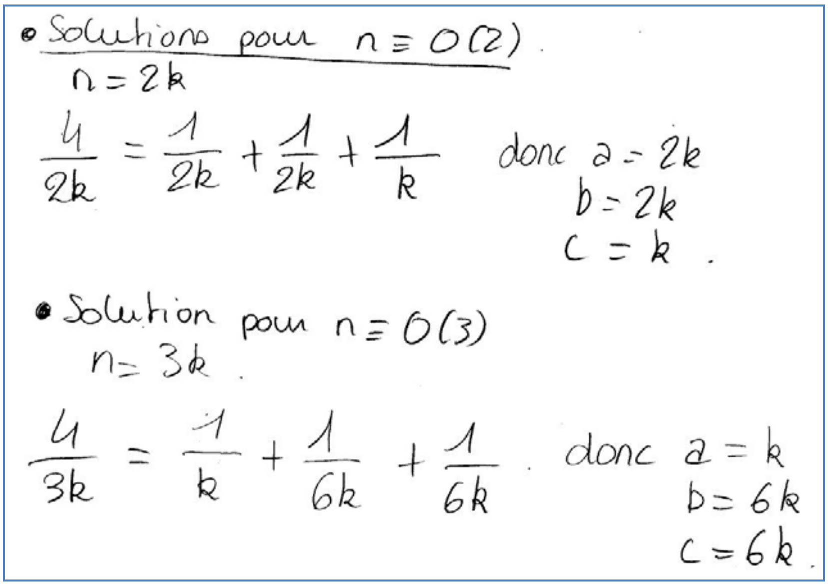
L'objectif des séances de recherche collective est la confrontation des idées de chacun afin de faire avancer plus rapidement la recherche d'une part et d'encourager la communication et le débat d'autre part. La rédaction d'une synthèse leur permet de faire le point sur leurs avancées et d'amorcer le travail de la séance suivante.

A noter que l'enseignant a fait une petite régulation lors de la séance du 27 mars en insérant un temps de mise en commun des travaux entre les trois groupes. Ce moment n'avait pas été prévu initialement mais l'enseignant a jugé qu'il était nécessaire afin de relancer la recherche de certains groupes en confrontant les différentes méthodes de recherche employées au sein des trois groupes.

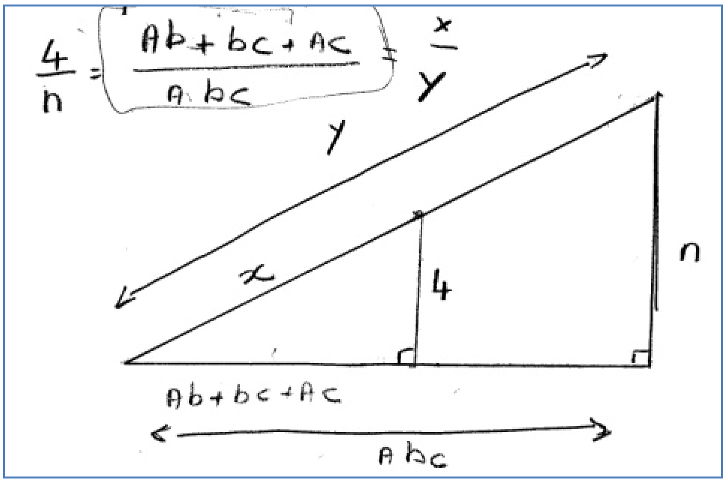
Nous présentons ci-dessous une première analyse des travaux de recherche collective des élèves sur la conjecture en décrivant leur démarche de recherche et les résultats produits. Nous nous basons uniquement sur leurs écrits consignés dans les cahiers de bord[8].

Groupe 1 : Composé de trois élèves, ce groupe a mené une recherche tant empirique que théorique. Les différentes phases de leur recherche sont les suivantes :

- Essais pour des petites valeurs de $n$.
- Solutions pour $n \equiv 0$ [2] et pour $n \equiv 0$ [3].




- Conjecture pour $n \equiv 0$ [5].
- Tentative de résolution géométrique avec Thalès et Pythagore.




- Réduction aux nombres premiers grâce au résultat sur les multiples.

[8] Une étude approfondie des travaux des élèves sera effectuée pour la thèse en cours.

si on a trouvé pour un nb ~~…~~ n, on a trouvé pour tous ses multiples -

$$\rightarrow \frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{4}{kn} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{kn} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} + \frac{1}{kc}$$

$\Rightarrow$ il faut montrer qu'il y a une solution pour tout nb 1er

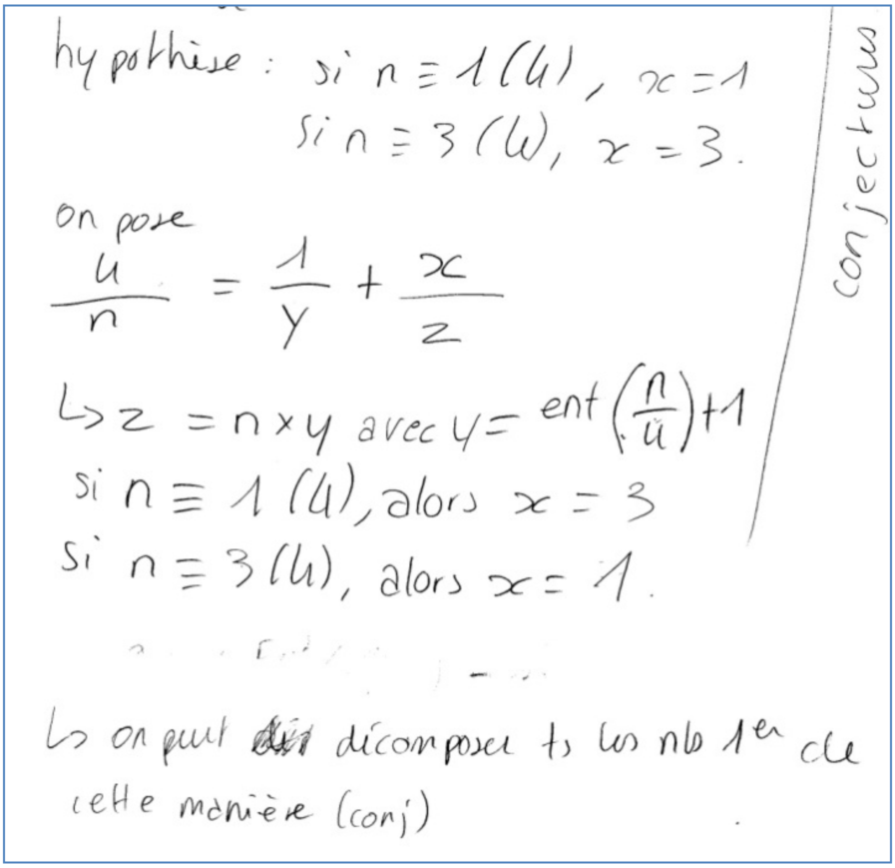
- Appropriation du travail d'un autre groupe (ici le groupe 3) lors de la mise en commun.

A partir de ce qu'a fait le gr. 3

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{ent\left(\frac{n}{4}\right)+1} + \left(\frac{4}{n} - \frac{1}{ent\left(\frac{n}{4}\right)+1}\right)$$

essai pour n = 461.

- Recherche de décomposition avec la méthode de la partie entière (c'est-à-dire poser $x = E\left(\frac{n}{4}\right)+1$) pour $n$ modulo 4). Reste à étudier les cas où $n \equiv 1$ [4].



hypothèse : si $n \equiv 1 (4)$, $x = 1$
si $n \equiv 3 (4)$, $x = 3$.

on pose
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z}$$
↳ $z = n \times y$ avec $y = \text{ent}\left(\frac{n}{4}\right) + 1$
si $n \equiv 1 (4)$, alors $x = 3$
si $n \equiv 3 (4)$, alors $x = 1$.

↳ on peut ~~dét~~ décomposer ts les nb 1er de cette manière (conj)

conjectures

- Nouveau problème : décomposer tout rationnel en deux fractions unitaires.
- Recherche de décomposition pour $n$ modulo 3. Reste à étudier les cas où $n \equiv 1$ [3].
- Recherche de décomposition pour $n$ modulo 6. Reste à étudier les cas où $n \equiv 1$ [6] et $n \equiv 5$ [6].
- Recherche d'une autre méthode pour les nombres restants[9].

La phase de mise en commun après deux séances de travail a été motrice dans leur recherche. Ce groupe s'est approprié les résultats présentés par le groupe 3 et a ensuite axé sa recherche dans cette direction. Cela donne des résultats différents du groupe 3 mais l'idée est la même, trouver une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour $n$ un nombre premier et en déterminer des formules génératrices. Le problème qui en découle est également le même, à savoir, l'étude des nombres restants (pour ce groupe les cas où $n \equiv 1$ [6] et $n \equiv 5$ [6]). Ce groupe a aussi travaillé sur les démonstrations de leurs résultats[10]. Ils étaient conscients de ce qui était démontré et de ce qui restait à l'état de conjecture. Ils ont effectué de nombreux allers et retours entre une recherche empirique et une recherche théorique.

<u>Groupe 2</u> : Ce groupe, composé de 4 élèves, a ancré sa recherche dans une dimension plus formelle. Leurs différentes pistes ont été les suivantes :

[9] Ces dernières étapes sont illustrées dans leur synthèse, en annexe 1.
[10] Voir ces démonstrations en annexe 1.

- Transformation de l'équation initiale (par exemple isoler $n$). Essais pour des petites valeurs de $n$ (un seul élève suit cette piste).
- Solutions (démontrées) pour $n \equiv 0$ [2], $n \equiv 0$ [3] et $n \equiv 0$ [5].

- pour $n \equiv 0\,(3)$ : $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{\frac{n}{3}} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n}$

$$\frac{4}{n} = \frac{3}{n} + \frac{1}{n} \longrightarrow \text{VRAI}$$

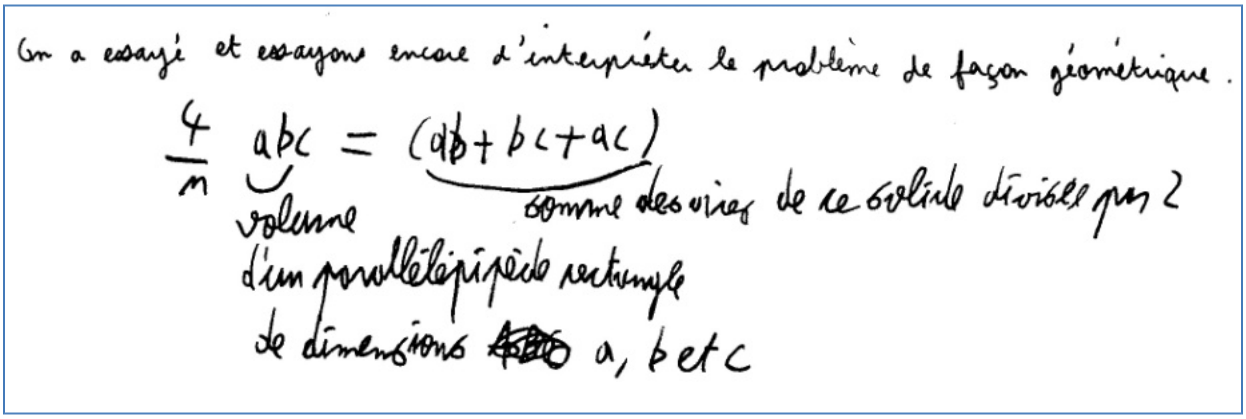
Il reste à démontrer pour $n \equiv 1\,(6)$ et $n \equiv 5\,(6)$

- pour $n = 5$ : $\dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}$
- pour $n = 25 = 5^2$ : $\dfrac{4}{25} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{100}$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2}{5}n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$$

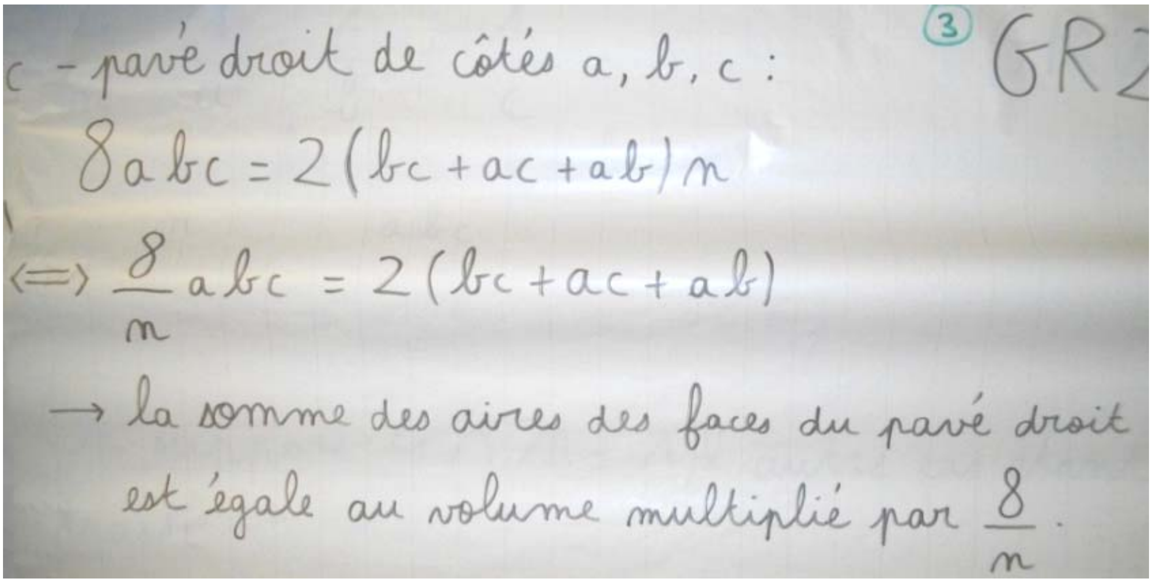
1 7 11 13 17 19 23 29 modulo 30

- Réduction aux nombres premiers.
- Essai d'un raisonnement par l'absurde.
- Essai d'un raisonnement par disjonction de cas, modulo 30.
- Utilisation du logiciel dérive pour trouver des cas particuliers.
- Tentative d'exprimer $n$ en un courbe en 3D en fonction de $a$, $b$ et $c$.
- Interprétation du problème géométriquement, avec un parallélépipède rectangle :



On a essayé et essayons encore d'interpréter le problème de façon géométrique.

$\underbrace{\frac{4}{n}\,abc}_{\text{volume d'un parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c}} = \underbrace{(ab+bc+ac)}_{\text{somme des aires de ce solide divisée par 2}}$



③ GR2

c - pavé droit de côtés a, b, c :

$8abc = 2(bc+ac+ab)n$

$\Leftrightarrow \frac{8}{n} abc = 2(bc+ac+ab)$

→ la somme des aires des faces du pavé droit est égale au volume multiplié par $\frac{8}{n}$.

- Résultat établi[11] : l'équation est possible pour $abc \equiv 0$ [4] et $ab + ac + bc \equiv 0$ [16]. De plus $abc$ n'est pas une puissance de 4 et $abc$ est un multiple de $n$.

Les différents points de vue et les différentes pistes de recherche qui en découlent ont été très riches dans ce groupe. Après avoir réduit le problème aux nombres premiers, ils se sont tournés vers une piste de recherche davantage formelle qui leur permettrait d'émettre une formule générale liant $n$, $a$, $b$ et $c$ d'un point de vue géométrique ou d'un point de vue arithmétique. De nombreuses discussions sur des aspects logiques ont étayé leurs recherches (équivalence, implication, condition nécessaire, quantificateurs). Leur résultat final, exprimé sous forme d'une condition nécessaire et suffisante a été démontré. La mise en commun n'a pas modifié leur manière de chercher.

<u>Groupe 3</u> : Ce groupe, composé de 3 élèves, a mené une recherche davantage empirique. Les différentes phases de leur recherche ont été les suivantes :

- Conjecture pour les nombres pairs.
- Essai de démontrer que $ab + bc + ac$ est un multiple de $4abc$.

[11] Ce résultat ainsi que la démonstration est en annexe 2, dans la synthèse écrite par le groupe.

- Hypothèse admise : « *si tous les nombres premiers marchent alors tous les nombres marchent* ».
- Décomposition recherchée pour $n$ = 2, 5, 7, 9, 11. Difficulté pour $n$ = 13.

$\boxed{\text{Pair}}$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$$

$\boxed{\text{Impair}}$

* multiple de 3

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\frac{n}{3}}$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{6k}$$

* multiple de 5

$$\frac{4}{5k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{10k}$$

* multiple de 7

$$\frac{4}{7k} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{14k}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}$$

- Décomposition de tous les nombres premiers jusqu'à 100 avec la méthode de la partie entière (c'est-à-dire poser $x = E\left(\frac{n}{4}\right) + 1$).

$$1/p\ \left(\ \frac{4}{23} = \frac{1}{6} + \frac{1}{138} = \frac{1}{6} + \frac{1}{276} + \frac{1}{276}\right.$$

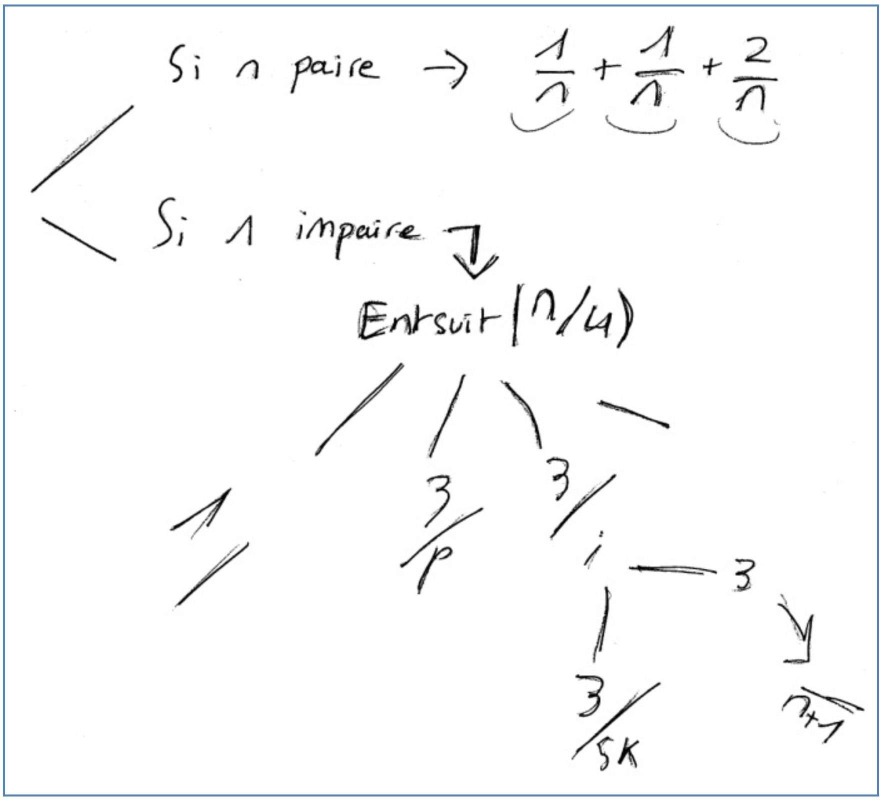
$$\frac{4}{29} = \frac{1}{8} + \frac{3}{232} = \frac{1}{8} + \frac{1}{232} + \frac{2}{232} = \frac{1}{116}$$

$$\frac{4}{31} = \frac{1}{8} + \frac{1}{248} = \frac{1}{8} + \frac{1}{496} + \frac{1}{496}$$

$$3/p\ \left(\ \frac{4}{37} = \frac{1}{10} + \frac{3}{370} = \frac{1}{10}\right.$$

$$3/i\ \left(\ \frac{4}{457} = \frac{1}{115} + \frac{3}{52555} \qquad \frac{6}{105110}\right.$$

- Détermination de formules pour certaines classes de nombres premiers qu'ils présentent sous forme d'un arbre.




- Essais de décomposition des nombres premiers entre 100 et 300.
- Précision de leurs formules et de leurs méthodes de décomposition[12].

[12] Voir leur synthèse en annexe 3.

- Difficulté pour trouver une décomposition de $n = 241$ avec leurs méthodes.

Ce groupe est toujours resté sur la même piste de recherche, à savoir décomposer de plus en plus de nombres, en espérant pouvoir tous les décomposer ! La mise en commun en classe entière n'a pas modifié leur piste de réflexion. Ils ont produit un arbre qui leur permet de spécifier leurs résultats et de mettre en évidence les nombres qu'ils n'arrivent pas à décomposer. Cependant, ils n'ont fait aucune démonstration de leurs formules (sauf celle pour les nombres pairs).

Cette première analyse, uniquement à partir de leurs écrits, met déjà en évidence les différents processus de recherche des trois groupes. Le groupe 2 a centré sa recherche du problème dans une dimension très théorique en essayant d'utiliser plusieurs raisonnements d'arithmétique ou en changeant de cadre (interprétation géométrique). Leur principal résultat est à l'image de leur recherche, c'est une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions. Le groupe 1 a davantage articulé sa recherche entre l'empirique et le théorique. Ainsi ils ont cherché à décomposer le plus grand nombre de classes de solutions tout en essayant de démontrer leurs résultats successifs. Enfin, le groupe 3 a mené une recherche très empirique en cherchant à décomposer tous les nombres premiers jusqu'à 100 puis 300 avec pour but de déterminer des formules génératrices pour tous les nombres premiers. Cependant ils n'ont pas cherché à démontrer leurs différents résultats. Nous pouvons également observer que la méthode expérimentale, que l'on peut définir par l'étude de cas particuliers pour étudier ensuite le cas général, tient une place importante dans les processus de recherche des élèves. Si tous les groupes semblent l'avoir pratiquée, la mise en œuvre d'une dimension expérimentale, caractérisée par des va-et-vient entre la théorie et l'expérience semble ne pas avoir la même importance selon les groupes. En effet le groupe 2, après avoir étudié quelques cas particuliers n'a étudié que le cas général, sans revenir et faire de liens avec leurs exemples. A contrario les groupes 1 et 3 ont axé leurs recherches sur l'étude de cas particuliers pour le général. Le groupe 1 a davantage articulé l'étude des cas particuliers et la recherche d'une démonstration générale. Une analyse plus fine et détaillée de leurs recherches permettra de préciser l'influence de la mise en œuvre d'une dimension expérimentale dans les processus de recherche d'un tel problème.

Combien vaut la moitié du tout ?  Réponse 3 mètres.  [*Le tout est de s'y mettre*]

Qu'est-ce qu'un dortoir ?  Réponse  Un groupe de Lie.

Combien vaut un Gauss ?  Réponse : pi / 2  parce que pivot de Gauss.

Quelle est la différence entre un diamètre et un rayon ?  Réponse : un rayon.

Qu'est-ce qu'une permutation ?  Réponse : E'stc  aç.

Quel est le comble pour un mathématicien ?  Réponse : Passer la nuit sur une inconnue sans pouvoir lui appliquer son système.

Un classique des perles d'élèves :