

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU - 69.

Réaliser l'égalité $a^b \times c^d \times e^f = g^h \times i^j$, sachant que
 $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

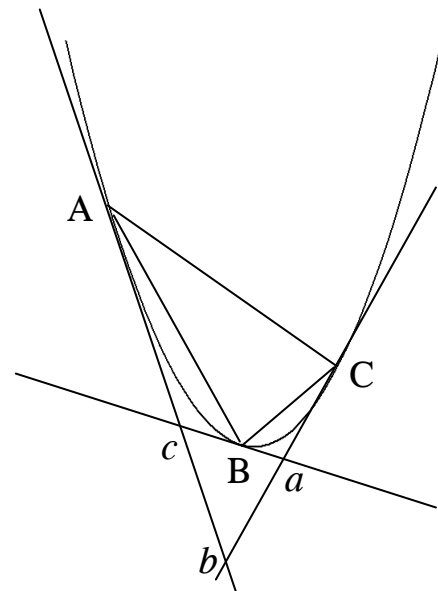
PROBLÈME - 69.

Étant données trois tangentes à une parabole, A, B, C sont les points de contact.

(voir figure ci-contre).

Démontrer que :

$$\text{Aire (ABC)} = 2 \text{ Aire (abc)}.$$



Solutions

JEU - 68.

Soient :

$$A = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$B = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

A-t-on $A = B$?

Solution :

La réponse est oui avec la calculatrice, et rigoureusement :

On pose $a = \sqrt{11+2\sqrt{29}}$ et $\bar{a} = \sqrt{11-2\sqrt{29}}$

On a : $\bar{a}^2 = 11-2\sqrt{29}$ d'où $16-2\sqrt{29} = \bar{a}^2 + 5$

Donc $B = a + \sqrt{\bar{a} + 5 + 2\sqrt{5}\bar{a}} = a + \sqrt{(\sqrt{5} + \bar{a})^2} = a + \bar{a} + \sqrt{5}$

$$B = \sqrt{5} + \sqrt{(a + \bar{a})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{a^2 + \bar{a}^2 + 2a\bar{a}}$$

Mais $a^2 + \bar{a}^2 = 22$ et $a\bar{a} = \sqrt{5}$ donc $B = \sqrt{5} + \sqrt{22+2\sqrt{5}} = A$.

PROBLÈME - 68.

Démontrer que si p est un nombre premier, alors la partie entière de $\frac{(p-1)!}{p}$ est paire.

Solution :

On sait que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. C'est le théorème de Wilson.

Cela prouve que $k = \frac{(p-1)! + 1}{p}$ est un entier.

Si $p = 2$, $k = 1$

Si $p > 2$, p est impair alors que $(p-1)!$ est pair. k est encore impair comme son numérateur.

Et pour finir, en notant $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x , $k = \frac{(p-1)! + 1}{p}$ peut s'écrire

$(p-1)! = kp - 1$ donc :

$$\left\lfloor \frac{(p-1)!}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kp - 1}{p} \right\rfloor = \left\lfloor k - \frac{1}{p} \right\rfloor = k - 1 \text{ qui est pair. CQFD.}$$