Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU – 70.

Il est facile de voir que pour calculer a^{10}, quatre multiplications suffisent, par exemple :

$a \times a = a^2$ puis $a^2 \times a^2 = a^4$ puis $a^4 \times a = a^5$ et enfin $a^5 \times a^5 = a^{10}$.

Mais combien de multiplications faut-il au minimum pour calculer $a^{13} \times b^{30}$?

PROBLÈME – 70.

Dans le plan euclidien, ABC est un triangle équilatéral de côté s et M est un point du plan avec MA = p MB = q MC = r.

Démontrer que $3\,(p^4 + q^4 + r^4 + s^4) = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^2$.

Solutions

JEU - 69.

Réaliser l'égalité $a^b \times c^d \times e^f = g^h \times i^j$, sachant que

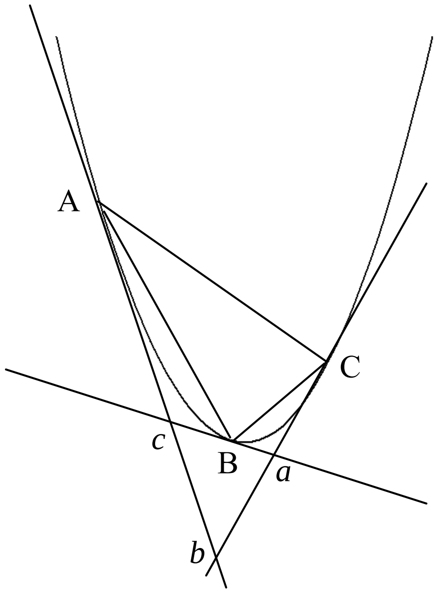
$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Solution :
On voit facilement que 5, 7 et 10 doivent figurer en haut (en exposant).
On raisonne par l'absurde :
Si 7 est présent en bas, il l'est dans les deux membres, ce qui est impossible puisqu'on n'a qu'un multiple de 7 disponible.
Si 5 (ou 10) est présent en bas, le facteur 5 est dans les deux membres, donc on a 5 d'un côté et 10 de l'autre. Par exemple a = 5 et g = 10. Mais b ou h est plus grand que 1 ce qui est impossible puisque alors un seul membre est multiple de 25. Quelques essais montrent que la seule solution est : $2^7 \times 4^3 \times 9^5 = 6^{10} \times 8^1$.

PROBLÈME - 69.

Dans un repère orthogonal, étant données trois tangentes à une parabole, A, B, C sont les points de contact.

(voir figure ci-contre).



Démontrer que :

Aire (ABC) = 2 Aire (*abc*).

Solution :

En changeant de repère et d'unités, on peut toujours supposer que la parabole a pour équation $y = x^2$.
On a alors les coordonnées : A (a, a^2), B (b, b^2), C (c, c^2).
La tangente T_A en A a pour équation : $y = a^2 + 2\,a\,(x - a)$.
La tangente en B a pour équation : $y = b^2 + 2\,b\,(x - b)$.
L'intersection de T_A et T_B est P $\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$.
De même on a : Q $\left(\dfrac{a+c}{2},\ ac\right)$ et R $\left(\dfrac{b+c}{2},\ bc\right)$.
L'aire de (PQR) est :

$$\frac{1}{2}\,|\mathrm{PQ} \wedge \mathrm{PR}| = \frac{1}{4}\,\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$$

L'aire de (ABC) est :

$$\frac{1}{2}\,|\mathrm{AB} \wedge \mathrm{AC}| = \frac{1}{2}\,\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right| \text{ d'où le résultat demandé.}$$