

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

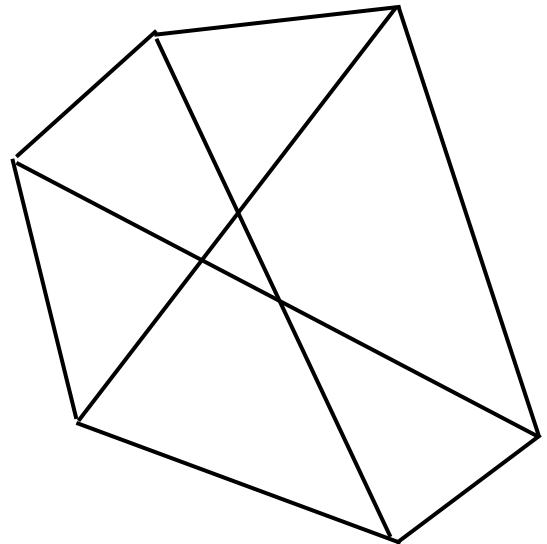
JEU – 72.

Dans l'hexagone quelconque H ci-contre,
3 diagonales sont tracées.

Elles partagent H en 7 parties (4 triangles et
3 quadrilatères).

Il s'agit de rajouter un nombre fini de sécantes
(segments joignant deux points du bord de H)
de telle sorte que toutes les parties soient des
triangles.

Autrement dit, il faut éliminer les
quadrilatères.



PROBLÈME – 72.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :
$$\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 40 \\ \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 12 \end{cases}$$

On demande les solutions exactes.

Solutions

JEU – 71.

Trouver le nombre maximal d'entiers de l'ensemble $E = \{2, 3, 4, 5 \dots 100\}$ ayant
pour produit un carré parfait.

Solution : La réponse est 83, en effet :

Le produit de tous les éléments de E , c'est à dire $100!$ vaut :

$$2^{97} 3^{48} 5^{24} 7^{16} 11^9 13^7 17^5 19^5 23^4 29^3 31^3 37^2 41^2 43^2 47^2$$

53.59.61.67.71.73.79.83.89. 97.

Si on veut un carré parfait il faut ôter impérativement les 10 nombres premiers supérieurs à 50 (Ils ont 1 pour exposant dans $100!$!)

Les autres nombres premiers ayant un exposant impair dans $100!$ sont :

2, 11, 13, 17, 19, 29 et 31.

Prenons le cas de 11. Il faudra se passer de 11 ou d'un de ses multiples.

C'est la même chose pour 13, 17, 19, 29 et 31.

Comme 11, 13, 17, 19, 29 et 31 n'ont pas de multiples communs dans E , cela fait donc 6 nombres supplémentaires à ôter de E .

Le nombre maximal d'entiers ayant pour produit un carré parfait est donc

$$99 - (16) = 83.$$

On peut effectivement atteindre ce maximum en prenant dans E tous les éléments sauf

22, 13, 17, 19, 29, 31, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 ce qui résout aussi le problème de l'exposant 97 du facteur 2.

Le produit des 83 éléments qui restent vaut :

$$2^{96} 3^{48} 5^{24} 7^{16} 11^8 13^6 17^4 19^4 23^4 29^2 31^2 37^2 41^2 43^2 47^2.$$

C'est le carré de $2^{48} 3^{24} 5^{12} 7^8 11^4 13^3 17^2 19^2 23^2 29.31.37.41.43.47$.

PROBLÈME – 71.

Démontrer que pour tout entier n le nombre $n^7 - 14 n^5 + 49 n^3 - 36 n$ est multiple de $7!$ [factorielle 7].

Solution :

$n^7 - 14 n^5 + 49 n^3 - 36 n$ a plusieurs racines évidentes : 0, 1, 2, 3 et leurs opposées.

On a donc

$$n^7 - 14 n^5 + 49 n^3 - 36 n = n (n^2 - 1) (n^2 - 4) (n^2 - 9) \text{ ou encore :}$$

$$n^7 - 14 n^5 + 49 n^3 - 36 n = (n - 3) (n - 2) (n - 1) n (n + 1) (n + 2) (n + 3)$$

où l'on reconnaît le produit $C_{n+3}^7 \times 7!$ en tous cas lorsque n est au moins égal à 4.

Mais pour $n < 4$ le produit est nul donc encore multiple de $7!$