Proposition d'exercice utilisant la trigonométrie

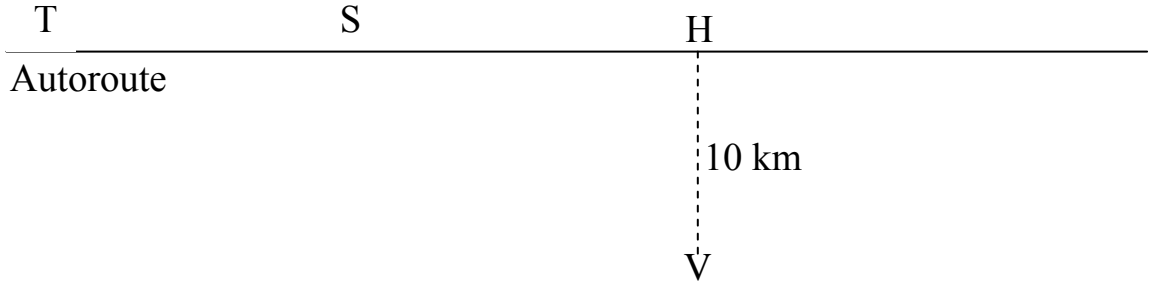
Jean Terreran (†), groupe épistémologie et histoire des mathématiques

Résumé : Utilisation de la trigonométrie pour optimiser un trajet.

Mots clés : Sinus ; cosinus ; trigonométrie ; optimisation de trajet.

Voici un exercice dont la résolution peut permettre d'utiliser une formule ressemblant **à la loi des sinus.**

Énoncé :
Un projet d'autoroute rectiligne doit passer à 10 km de votre ville. Vous l'emprunterez tous les soirs pour rentrer de votre travail et vous souhaitez que votre trajet vous prenne le moins de temps possible, tout en respectant les limitations de vitesse, à 130 km/h sur autoroute et 90 km/h sur route. A quelle distance souhaitez-vous que l'on place la sortie (avec péage, ne rêvez pas !). T est votre domicile, S le lieu où placer la sortie d'autoroute, V le lieu de votre travail, et H, (TS) le trajet autoroutier et H la projection orthogonale de V sur (TS). Ainsi, le trajet de votre véhicule est la ligne brisée TSV.



On pose $x = \widehat{HVS}$ et d = TH. La durée du trajet est $t = \frac{TS}{130} + \frac{SV}{90}$.

$SV = \frac{10}{\cos x}$ et TS = TH – TS = d – SH = d – SV sin x = d – 10 tan x.

Alors $t = \frac{d - 10\tan x}{130} + \frac{10}{90\cos x}$. C'est une fonction de x.

Sa dérivée est $-\frac{10}{130\cos^2 x}+\frac{10\sin x}{90\cos^2 x}$. L'étude de son signe fait apparaître un minimum quand $\sin x = \frac{9}{13}$, c'est-à-dire pour $x \approx 43°48'47''$.

SH = 10 tan $x \approx 9{,}6$ (en km).

La sortie doit être placée en S, à 9,6 km de H.

Remarque 1 : Si votre lieu de travail est situé à moins de 9,6 km de H, allez-y en vélo !

Remarque 2 : Si la sortie est réalisée 10 km avant, vous ne perdrez que quelques secondes, alors ne vous énervez pas au volant !...