# Une généralisation du théorème de Ptolémée

*Michel LAFOND,*
*Mlafond001@yahoo.fr*

*Mots clés* : Ptolémée ; cercles ; tangentes ; quadrilatère inscriptible.

*Résumé* : Une généralisation du célèbre théorème de Ptolémée.

## *1. Rappel de l'énoncé traditionnel.*

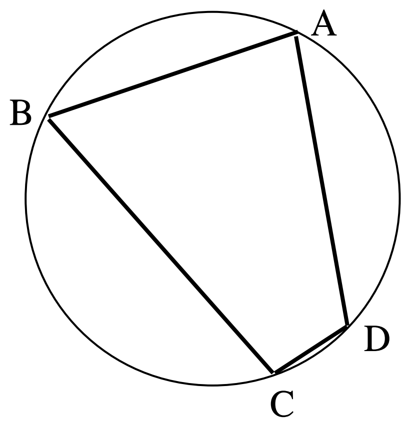



***Figure 1***

**Théorème de Ptolémée** : un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Avec les notations de la figure 1 : AB . CD + AD . BC = AC . BD

On en trouve une démonstration sur Wikipédia avec sa réciproque.

Ce théorème est vrai lorsque le cercle est dégénéré, c'est-à-dire lorsque son rayon est nul (le cercle est un point, A, B, C, D sont confondus) ou lorsque son rayon est infini.

Dans ce dernier cas, le cercle est une droite, et :

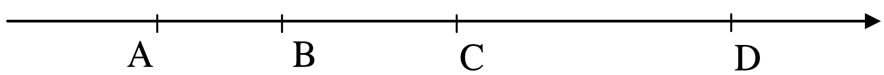



***Figure 2***

si A, B, C, D sont, dans cet ordre, quatre points de la droite et si, dans un repère de cette droite, ils ont pour abscisses $a$, $b$, $c$, $d$ alors, concernant les mesures algébriques, on a la relation : $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$
équivalente à l'identité $(b - a)(d - c) + (d - a)(c - b) = (c - a)(d - b)$.

## *2. Le principe de la généralisation.*

L'idée de la généralisation est, dans la figure 2, de considérer la relation précédente avec les longueurs. (Ce n'est pas gênant puisque toutes les mesures algébriques sont positives).

On retrouve : AB . CD + AD . BC = AC . BD,

puis de voir chaque longueur comme celle d'une tangente commune extérieure à deux cercles :

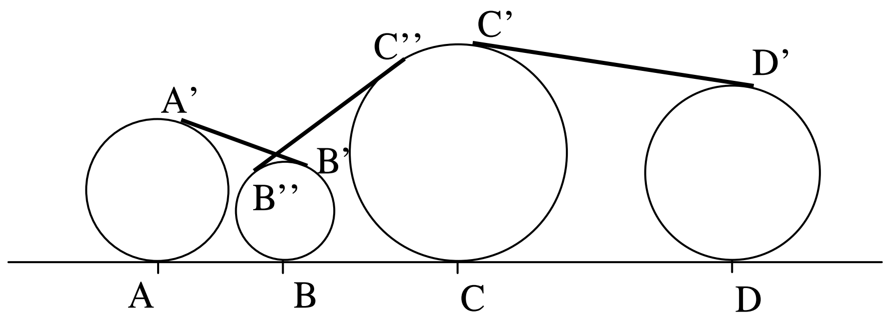



***Figure* 3**

En effet, dans la figure 3, AB = A'B' ; BC = B''C'' ; CD = C'D'.

On n'a pas l'air d'avancer, mais que se passe-t-il lorsque le cercle n'est pas dégénéré ?

Ce serait quand même extraordinaire si, dans la figure 4 ci-dessous, où les lettres désignent les longueurs des tangentes extérieures (en gras), on avait : ***ac* + *bd* = *ef*** !

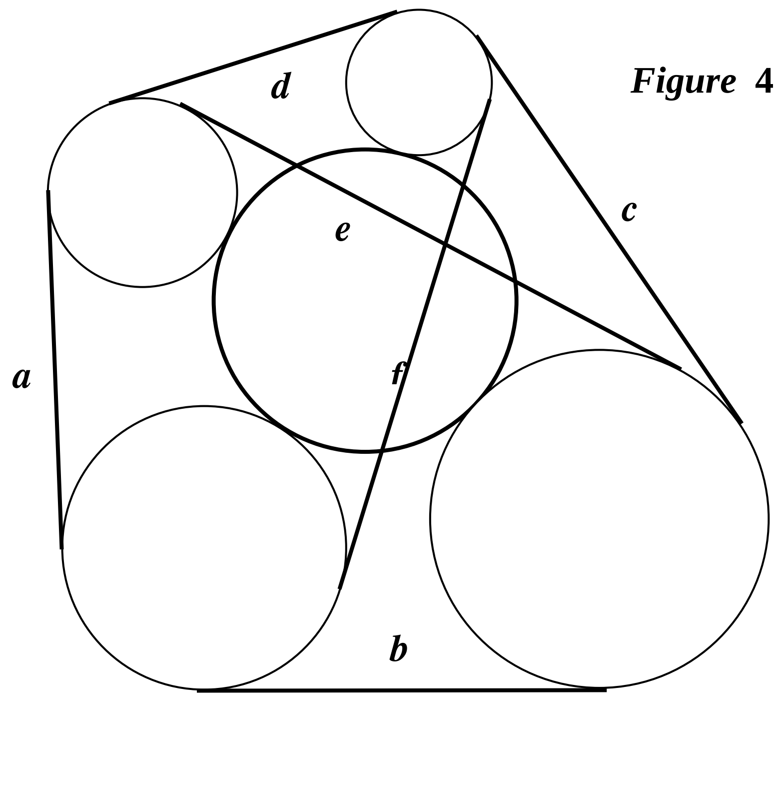



***Figure* 4**

Pourtant, c'est bien le cas, et vous pouvez reproduire cette figure pour vérifier, comme je l'ai fait.
La démonstration est dans le paragraphe 5).

On tient une généralisation : lorsque les quatre cercles extérieurs de la figure 4 ont un rayon nul, la relation $ac + bd = ef$ redonne le théorème de Ptolémée !

Mais les généralisations, ce n'est pas toujours facile. D'abord, pourquoi prendre des cercles tangents extérieurement à un même cercle ?

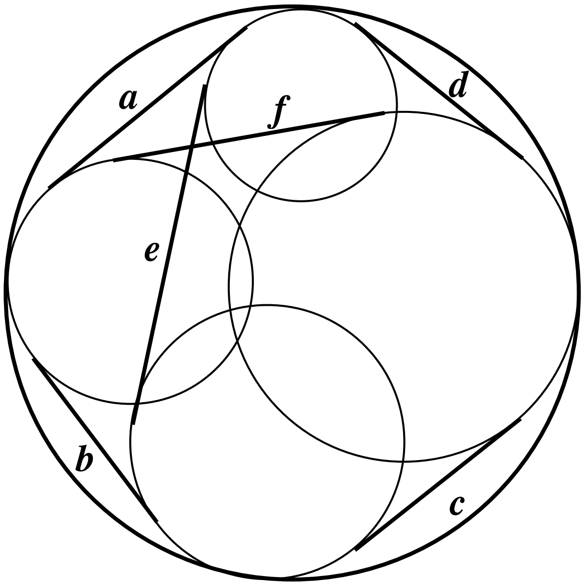



***Figure* 5**

Dans la figure 5 ci-dessus, on a encore la relation $ac + bd = ef$ .

Et tant qu'on y est, pourquoi ne pas envisager quatre cercles tangents à un même cercle sans plus de précision (extérieurement ou intérieurement) au cercle d'origine ?
On va le faire, mais avec cependant une limitation en ce qui concerne les cercles tangents intérieurement, car il y aurait de gros problèmes si ceux-ci contenaient le cercle d'origine.

## *3. La notation < $C_1C_2$ >.*

Définissons une notation pour faciliter la démonstration du théorème (paragraphe 5).

Le cercle d'origine de centre O et de rayon non nul sera noté C = (O, $R$).
Les quatre cercles qui lui sont tangents (extérieurement ou intérieurement) seront notés :

$C_1 = (O_1, R_1)$, $C_2 = (O_2, R_2)$, $C_3 = (O_3, R_3)$, $C_4 = (O_4, R_4)$, leurs rayons pouvant être nuls.
Le point de contact de $C_i$ avec C sera noté $P_i$.
Dans le cas où $C_i$ est tangent intérieurement à C, on suppose $R_i < R$.

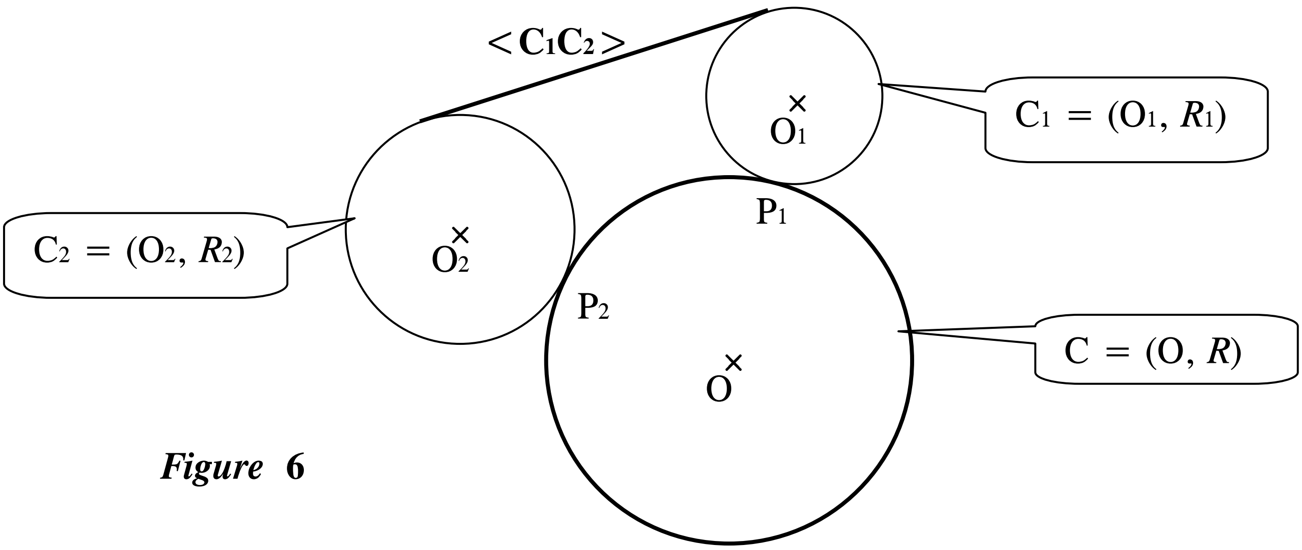



***Figure* 6**

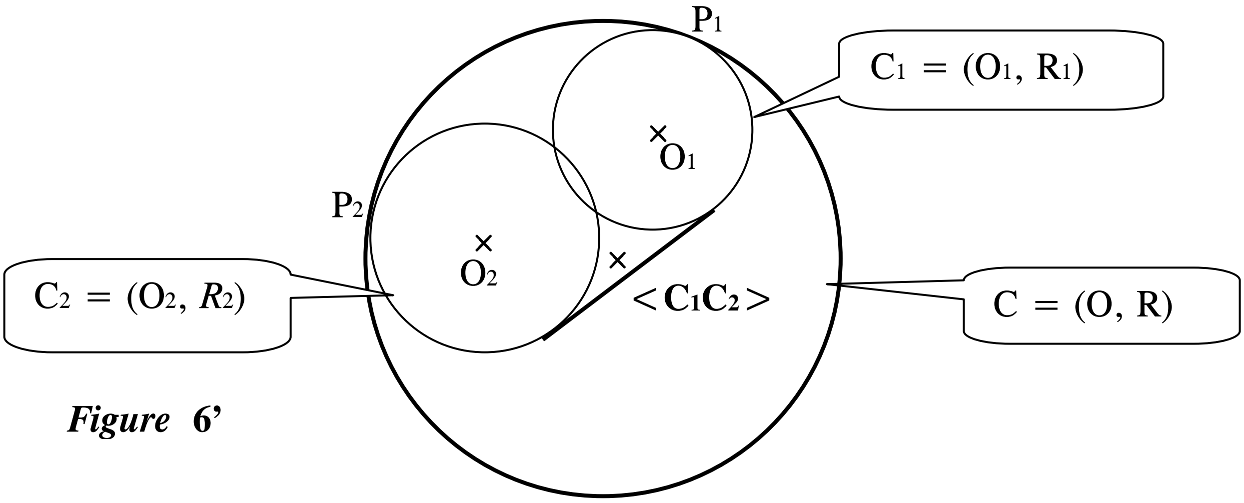
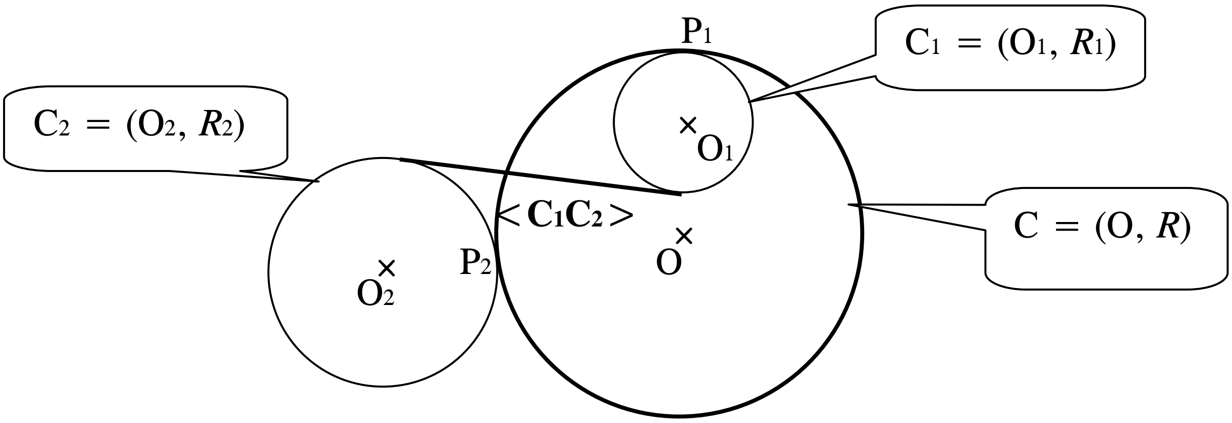



***Figure* 6'**

Si $C_1 = (O_1, R_1)$ et $C_2 = (O_2, R_2)$ sont tangents tous deux extérieurement [Figure 6] ou tous deux intérieurement [Figure 6'] à C et si $P_1 \neq P_2$ on note $< \mathbf{C_1C_2} >$ la longueur de leur tangente commune extérieure. Elle existe puisqu'il est impossible qu'un cercle contienne l'autre.
[Si $C_2$ contenait $C_1$, alors $C_2$ contiendrait $P_1$ et $P_2$ soit deux points de C et il n'y aurait plus tangence].

*Figure* **7**




Si $C_1 = (O_1, R_1)$ et $C_2 = (O_2, R_2)$ sont tangents à C, l'un extérieurement et l'autre intérieurement, et si $P_1 \neq P_2$ [Figure 7], on note < $\mathbf{C_1C_2}$ > la longueur de leur tangente commune intérieure. Elle existe de manière évidente.

## *4. Calcul de $L = < C_1C_2 >$.*

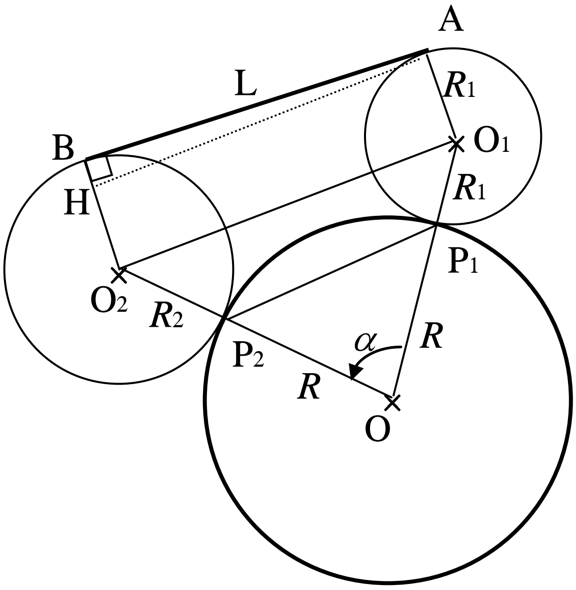



*Figure* **8**

- Dans le cas où $C_1 = (O_1, R_1)$ et $C_2 = (O_2, R_2)$ sont tangents extérieurement à C (Figure 8) :

Un peu de Pythagore dans ABH (AH parallèle à $O_1O_2$) montre que :

$L^2 = <\mathbf{C_1C_2}>^2 = O_1O_2^{\,2} - (R_2 - R_1)^2$ (1)

Dans $OO_1O_2$ on a : $O_1O_2^{\,2} = (R + R_2)^2 + (R + R_1)^2 - 2\,(R + R_2)(R + R_1)\cos(\alpha)$ (2)

Dans $OP_1P_2$ on a : $P_1P_2^{\,2} = 2\,R^2 - 2\,R^2\cos(\alpha) = 2\,R^2\,(1 - \cos(\alpha))$ (3)

(1) et (2) donnent :

$$L^2 = (R + R_2)^2 + (R + R_1)^2 - 2\,(R + R_2)(R + R_1)\cos(\alpha) - (R_2 - R_1)^2$$

On développe :

$$L^2 = 2R^2 + 2R\,(R_1 + R_2) + R_1^2 + R_2^2 - 2\,(R + R_2)(R + R_1)\cos(\alpha) - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1R_2.$$

il reste : $L^2 = 2\,(R + R_2)(R + R_1)\,(1 - \cos(\alpha))$ (4)

On remplace dans (4) $1 - \cos(\alpha)$ par $P_1P_2^2 / 2R^2$ tiré de (2) pour obtenir :

$L^2 = (R + R_2)(R + R_1)\, P_1P_2^2 / R^2$ d'où

$$L = <C_1C_2> = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R+R_1)(R+R_2)} \qquad (5)$$

- Dans le cas où $C_1 = (O_1, R_1)$ et $C_2 = (O_2, R_2)$ sont tangents tous deux intérieurement à C, les calculs sont presque identiques et donnent :

$$L = <C_1C_2> = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R-R_1)(R-R_2)} \qquad (6)$$

- Enfin, dans le cas où $C_1 = (O_1, R_1)$ est tangent intérieurement à C et $C_2 = (O_2, R_2)$ est tangent extérieurement à C, on a la Figure 9 ci-dessous :

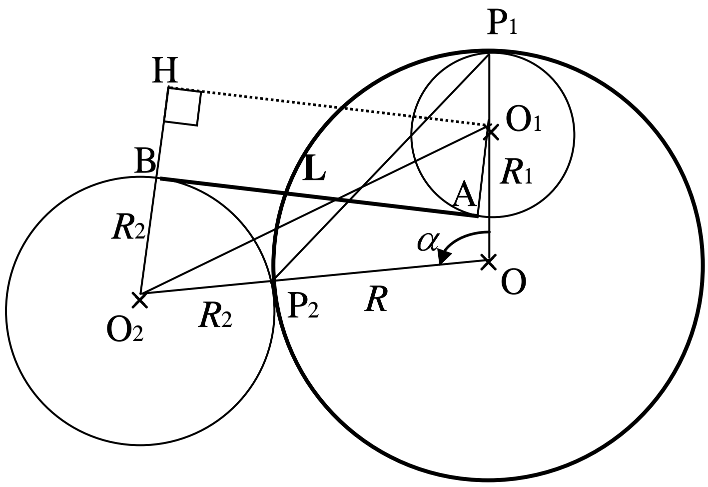



***Figure* 9**

Un peu de Pythagore dans $O_1O_2H$ ($O_1H$ parallèle à AB et $O_2H$ parallèle à $O_1A$) montre que :

$$L^2 \; <\mathbf{C_1C_2}>^2 = O_1O_2^2 - (R_1 + R_2)^2 \qquad (7)$$

Dans $OO_1O_2$ on a :

$$O_1O_2^2 = (R + R_1)^2 + (R + R_2)^2 - 2\,(R + R_1)(R + R_2)\cos(\alpha) \qquad (8)$$

Dans $OP_1P_2$ on a :

$$P_1P_2^2 = 2\,R^2 - 2\,R^2\cos(\alpha) = 2\,R^2\,(1 - \cos(\alpha)) \qquad (9)$$

(7) et (8) donnent :

$$L^2 = (R + R_1)^2 + (R + R_2)^2 - 2\,(R + R_1)(R + R_2)\cos(\alpha) - (R_1 + R_2)^2$$

soit après simplification :

$$L^2 = 2\,(R - R_1)(R + R_2)\,(1 - \cos(\alpha)) \qquad (10)$$

On remplace dans (10) $1 - \cos(\alpha)$ par $P_1P_2^2 / 2R^2$ tiré de (9) pour obtenir :

$L^2 = (R - R_1)(R + R_2)\, P_1P_2^2 / R^2$ d'où

$$L = < \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 > = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R-R_1)(R+R_2)} \qquad (11)$$

On constate que l'expression de <**C₁C₂**> peut être est condensée en une seule expression :

$$< \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 > = \frac{P_1P_2}{R}\sqrt{(R \pm R_1)(R \pm R_2)}$$

Le signe est + pour un cercle tangent extérieurement et – pour un cercle tangent intérieurement.

## *5. Le théorème de Ptolémée généralisé*.

**Théorème :**

Soit C un cercle de rayon non nul *R*.

Soient quatre cercles $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ qui lui sont tangents (extérieurement ou intérieurement) et de rayons $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, les points de contact étant distincts et notés respectivement $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$.

On suppose $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ dans cet ordre sur C, et dans le cas où $C_i$ est tangent intérieurement à C, on suppose $R_i < R$.

Avec la notation $<C_i\, C_j>$ définie dans le paragraphe III), on a la relation :

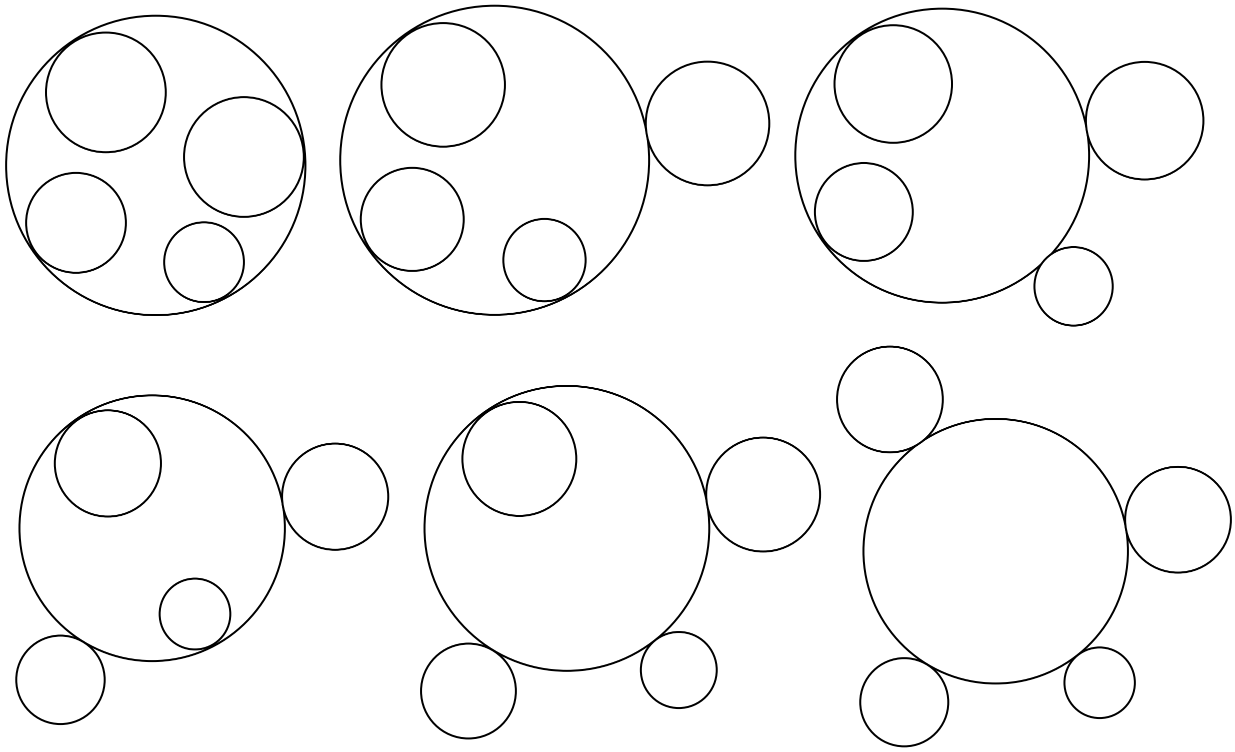
$$\mathbf{<C_1C_2> <C_3C_4> + <C_1C_4> <C_2C_3> = <C_1C_3> <C_2C_4>}.$$

**Démonstration** :

Il faudrait envisager les six cas* ci-dessous, mais les démonstrations sont toutes semblables, et on va se limiter au cinquième cas.

On utilise évidemment à fond le résultat du paragraphe 4). Attention à "la règle des signes".

* Les cas 3 et 4 ci-dessous sont distincts si l'on considère l'ordre dans lequel on rencontre les cercles tangents extérieurement et les cercles tangents intérieurement.



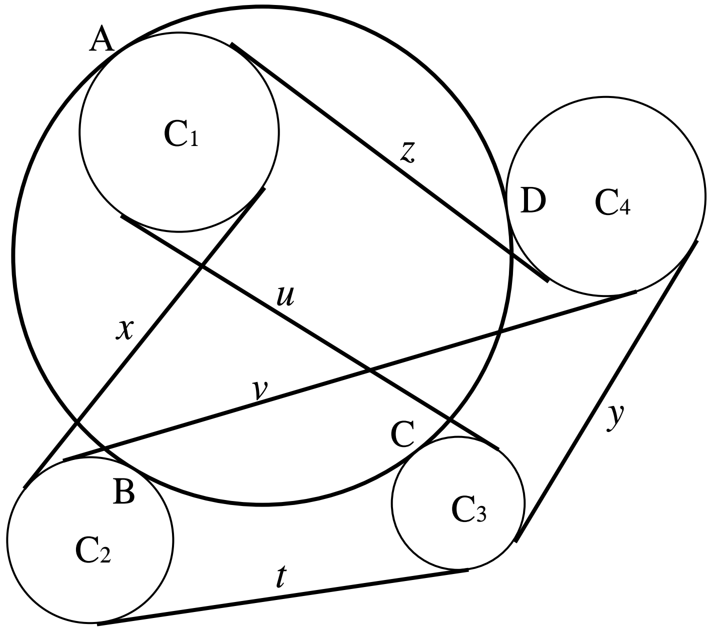



***Figure* 10**

***x y + z t = u v***

On a :

$< C_1C_2> = \dfrac{AB}{R}\sqrt{(R-R_1)(R+R_2)}$ $\qquad$ $< C_2C_3> = \dfrac{BC}{R}\sqrt{(R+R_2)(R+R_3)}$

$< C_3C_4> = \dfrac{CD}{R}\sqrt{(R+R_3)(R+R_4)}$ $\qquad$ $< C_1C_4> = \dfrac{AD}{R}\sqrt{(R-R_1)(R+R_4)}$

On en déduit :

$$< C_1C_2> < C_3C_4> = \frac{AB.CD}{R^2}\sqrt{(R-R_1)(R+R_2)}\ \sqrt{(R+R_3)(R+R_4)}$$

$$< C_1C_4> < C_2C_3> = \frac{AD.BC}{R^2}\sqrt{(R-R_1)(R+R_4)}\ \sqrt{(R+R_2)(R+R_3)}$$

donc :

$< C_1C_2>< C_3C_4> + < C_1C_4>< C_2C_3> =$

$$\frac{(AB.CD+AD.BC)}{R^2}\ \sqrt{(R-R_1)(R+R_2)(R+R_3)(R+R_4)}$$

Mais d'après Ptolémée (classique) on a : AB.CD + AD.BC = AC.BD donc :

$$< C_1C_2> < C_3C_4> + < C_1C_4> < C_2C_3> = \frac{AC.BD}{R^2}\ \sqrt{(R-R_1)(R+R_2)(R+R_3)(R+R_4)}$$

$< C_1C_2> < C_3C_4> + < C_1C_4> < C_2C_3> =$

$$\frac{AC}{R}\sqrt{(R-R_1)(R+R_3)}\times\frac{BD}{R}\sqrt{(R+R_2)(R+R_4)}$$

$< C_1C_2> < C_3C_4> + < C_1C_4> < C_2C_3> = < C_1C_3> < C_2C_4>$ CQFD.

Remarques :

Cette généralisation est valable si un (ou plusieurs) rayon $R_i$ est nul, avec à la limite le théorème de Ptolémée classique lorsque les quatre rayons sont nuls.
Elle reste valable si le cercle C a un rayon infini (c'est une droite).
La réciproque est vraie (moyennant les conventions sur les positions des tangentes).

## 6. *Ultime généralisation*.

Dans le cas des cercles tangents intérieurement, on a supposé jusque là $R_i < R$.
Mais la généralisation fonctionne encore dans le cas où les quatre cercles $C_i$ ont des rayons supérieurs à $R$ (donc contiennent C, comme dans la figure 11 ci-dessous).
La démonstration est la même que plus haut, avec ici, pour tout $i, j$ :

$$< C_iC_j > = \frac{P_iP_j}{R}\sqrt{(R_i-R)(R_j-R)}\ .$$

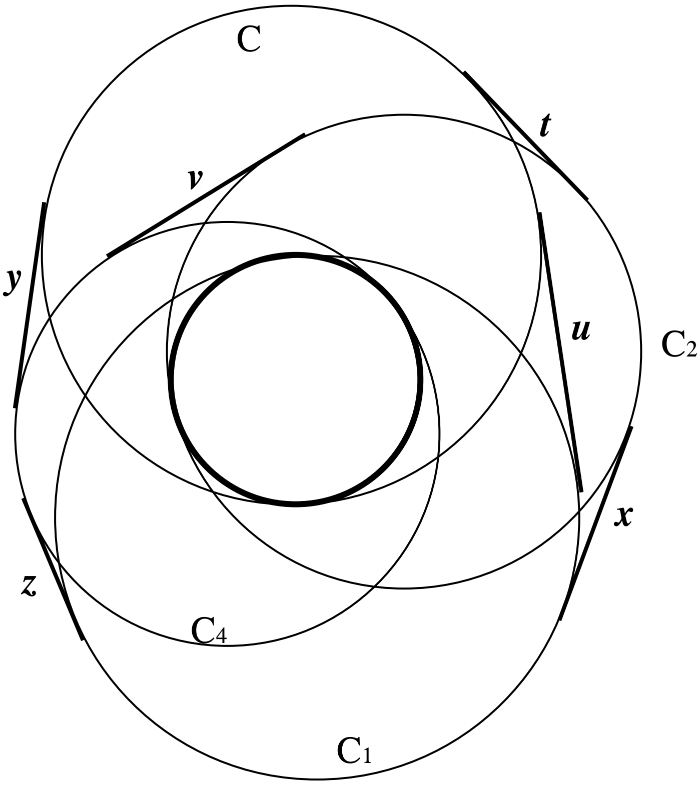



***Figure* 11**

$$x\,y + z\,t = u\,v$$

**Bibliographie** :

L'appendice de l'article "Two Applications of the Généralized Ptolemy Theorem" de Shay Gueron dans le numéro d'Avril 2002 de "The American Mathematical Monthly".
L'article signale qu'il existe d'autres généralisations du théorème de Ptolémée. Voir sitographie.

**Sitographie** :

Le site de WIKIPEDIA pour le "Ptolémée classique".
Le site de WOLFRAM : http://mathworld.wolfram.com/ où on peut trouver le théorème de Fuhrman généralisant le théorème de Ptolémée au cas d'un hexagone inscriptible : parcourir sur ce site le chemin :
Geometry – Plane geometry – Quadrilaterals – Ptolemy's theorem – Fuhrman's theorem.