

Perspectives d'un cercle (partie 1)

Marie-Noëlle Racine mnracine@orange.fr
Alain Mascret, collègue, Gevrey-Chambertin,
mascret@ac-dijon.fr
Groupe Math et Arts de l'IREM de Dijon

Résumé : Comment représenter un cercle en perspective centrale (linéaire) ou en perspective cavalière. Quelques exemples au musée des Beaux-Arts de Dijon.
Cet article sera publié en deux parties, perspective cavalière (partie 1) dans ce numéro 121 de la *Feuille de Vigne*, perspective centrale, ou linéaire (partie 2) dans le prochain numéro 122 de la *Feuille de Vigne*.

Mots clés : Perspective cavalière, perspective centrale, GeoGebra, geowiki, arts et math, perspective linéaire, cercle, perspective, sphère.

Chaque année, le groupe « math et arts » organise une journée musée. Le thème de la dernière, en mai 2011, était la perspective des corps ronds. Cet article reprend la méthode de représentation d'un cercle, présentée par Marie-Noëlle Racine le matin. Nous l'illustrerons par quelques tableaux du musée des Beaux-Arts de Dijon, présentés par Liliane Boccacio-Leclerc lors de la visite commentée l'après-midi au musée.

Vous retrouverez la plupart des figures de cet article sur geowiki, le site du groupe « géométrie dynamique », plus précisément à la page :
http://geowiki.u-bourgogne.fr/doku.php?id=activites:perspective_d_un_cercle
Vous pourrez y refaire les constructions pas à pas. Chaque instruction du logiciel GeoGebra est commentée.

Les photos de tous les tableaux, insérées dans cet article, ont été faites sans flash et sans pied-photo au musée des Beaux Arts de Dijon (MBAD) par Marie-Noëlle Racine. Elles sont publiées au titre de la formation d'enseignants, sans but lucratif ou commercial et ne peuvent en aucun cas être copiées ou reproduites, par quelque moyen que ce soit, à titre commercial, sans autorisation préalable de leur auteure et du musée des Beaux Arts de Dijon.

1. Perspective cavalière : (figure 1)

Sur chaque face visible d'un cube, nous allons dessiner un cercle tangent aux quatre arêtes.

Méthode de construction :

Sur la face ABCT, située dans un plan frontal, le cercle $\mathcal{C}$ de centre N est en vraie grandeur, sans déformations.

Les représentations des cercles sur les autres faces du cube sont des transformations géométriques de ce cercle $\mathcal{C}$ de centre N. Il s'agit d'affinités (voir une démonstration en fin d'article).

Appelons $\mathcal{C}'$ la transformation qui fait passer de $\mathcal{C}$ à son image $\mathcal{C}'$ sur la face ATKI.

Construisons $\mathcal{C}'$ point par point.

Pour tout point P du cercle $\mathcal{C}$, traçons la droite (PQ) parallèle à (AB) passant par P, avec Q sur [AT].

Pour obtenir le point E (image de P par $\mathcal{C}'$), construisons les images des droites (NP) et (PQ) par la transformation $\mathcal{C}'$.

(QP) étant parallèle à (AB), son image (d) dans la face ATKI est la parallèle à (AI) passant par Q.

(NP) coupe (AT) en R. L'image de (NP) est (RO) où O est le point d'intersection des diagonales de ATKI.

E est l'intersection de (RO) et (d).

À tout point P du cercle $\mathcal{C}$ de centre N correspond bien un point E sur la face ATKI (et de la même manière, un point E' sur la face ABJI).

La représentation du cercle $\mathcal{C}'$ tracé sur la face ATKI est le lieu des points E quand P décrit le cercle $\mathcal{C}$.

Figure 1

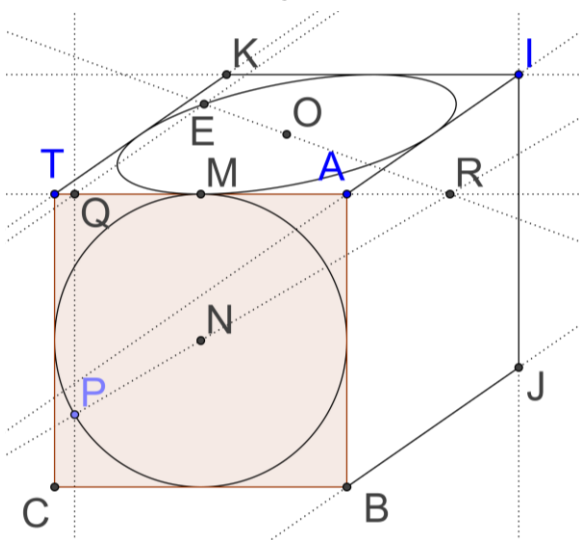
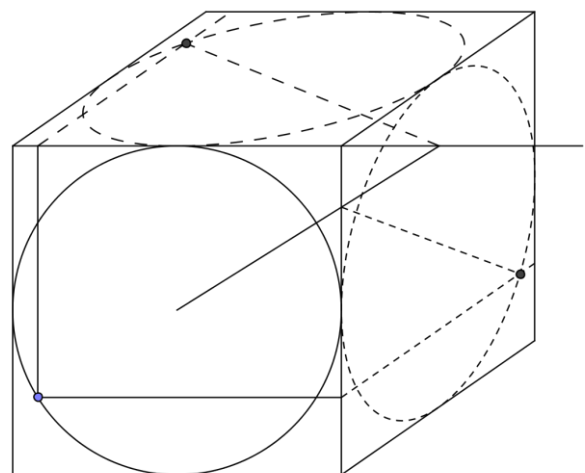


Figure 2



Pour une construction sur papier, « à la main », on peut utiliser huit points et leurs huit tangentes au cercle $\mathcal{C}$ ou à la représentation de $\mathcal{C}'$ sur la face ATKI (*figure 3*) :

- les 4 milieux des arêtes d'une face du cube ;
- les 4 points d'intersection du cercle avec les diagonales de la face du cube.

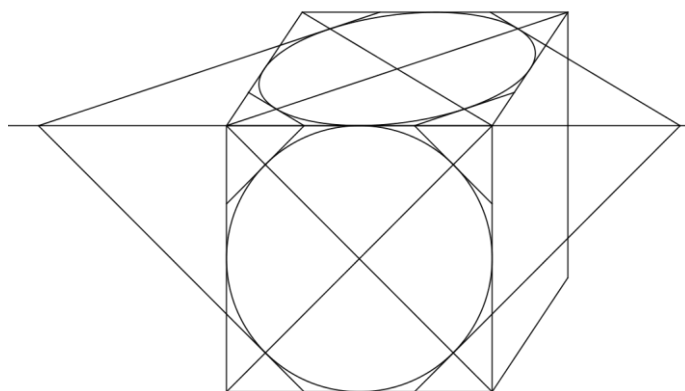


Figure 3

Notons :

- 1) aux points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les diagonales [AC] et [BT] de ABCT, les tangentes à $\mathcal{C}$ sont parallèles, respectivement aux diagonales [BT] et [AC]. Ainsi, les tangentes à la représentation de $\mathcal{C}'$ aux points d'intersection avec les diagonales [AT] et [TI] sont parallèles, respectivement, aux diagonales [TI] et [AK].
- 2) la représentation de $\mathcal{C}'$ est une ellipse de centre O. Les axes de cette ellipse ne sont généralement pas parallèles aux arêtes de la face ATKI (voir *figure 4*)

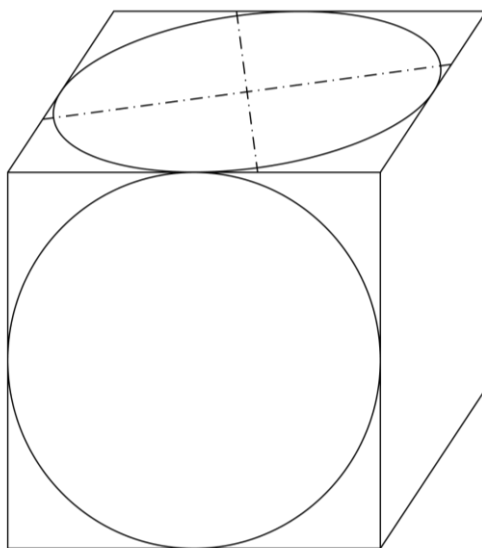


Figure 4

- 3) certains logiciels comme GeoGebra peuvent tracer la conique représentant $\mathcal{C}'$ à partir de 5 points. Cette possibilité sera notamment utilisée pour tracer les contours de représentations d'objets ronds sur des photos d'œuvres d'art (voir *figure 5*)



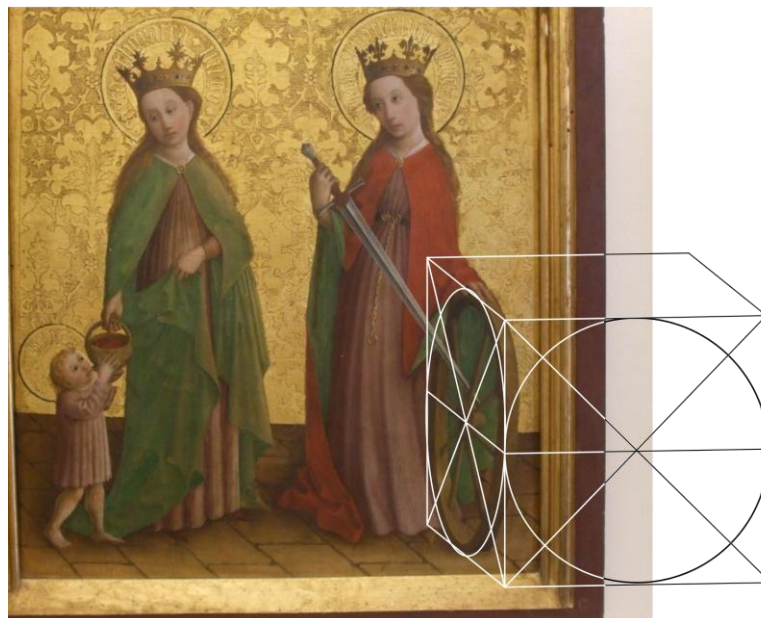
Sainte Dorothée et sainte Catherine (d'Alexandrie), tableau attribué (peut-être à tort) au maître de la Passion de Darmstadt qui l'aurait peint vers 1440-1450.

Musée des Beaux Arts de Dijon

©Photo MN Racine.

Figure 5

L'ellipse ABCDE épouse le contour intérieur de la roue. Ses deux axes, tracés en pointillés sur la *figure 5* ci-dessus sont manifestement non parallèles à la direction de projection de la perspective cavalière indiquée par les lignes de fuite repérées grâce aux joints des carreaux au sol. C'est-à-dire que les axes de la représentation d'un cercle sur la face latérale d'un cube ne seraient pas parallèles aux arêtes du cube.



maître de la Passion de Darmstadt, *sainte Dorothée et sainte Catherine*, (MBAD).

©Photo MN Racine.

Figure 6



maître de la Passion de Darmstadt, *sainte Dorothée et sainte Catherine*, (MBAD).

©Photo MN Racine.

Figure 7

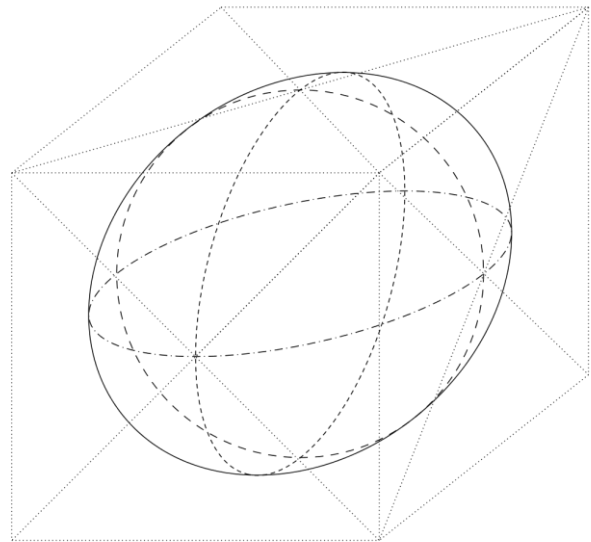
Dans la *figure 7*, à la partie du tableau limitée par le parallélogramme circonscrit à la représentation de la roue, nous avons essayé d'appliquer la transformation géométrique réciproque (affinité réciproque) $\mathcal{L}^{-1}$ de celle qui a été décrite précédemment de façon à obtenir un cercle (ou presque !) comme celui qui aurait pu être tracé sur la face avant (dans un plan frontal) du cube et qui aurait été une représentation en vue de face de la roue de S^{te} Catherine. L'image est un peu floue car il a fallu rajouter des pixels !

Représenter une sphère devient réalisable (*figure 8*). Il est important de remarquer qu'en général, on ne « voit » pas en même temps le pôle nord et le pôle sud d'une sphère lorsqu'elle est représentée en perspective cavalière.

Figure 8

Sphère inscrite dans un cube.

Le contour apparent de la sphère, tracé ici en trait plein, est tangent aux cercles tracés sur la sphère. C'est encore une ellipse qui, sauf exception, n'est pas un cercle. Les 3 « cercles » en pointillés sont les translatés du cercle tracé sur la face avant et de ses représentations, tracées sur la face supérieure et sur la face droite.



Démontrons maintenant que la transformation géométrique qui transforme le cercle frontal en sa représentation sur une autre face du cube est une affinité dont l'axe est l'arête commune aux deux faces et dont la direction est la droite qui passe par les centres des deux faces.

Prenons l'exemple de la face supérieure : l'axe de l'affinité est la ligne de terre (AT) et sa direction la droite (ON).

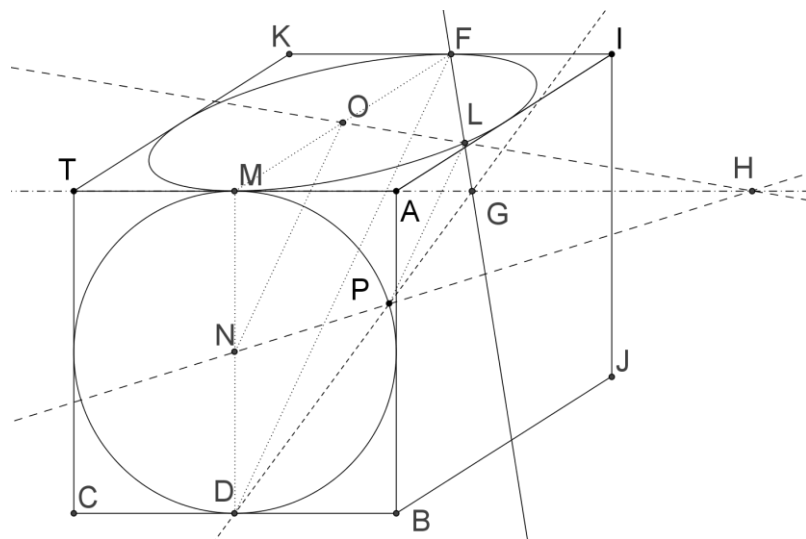


Figure 9

L'image de N, centre du cercle $\mathcal{C}$, point d'intersection des diagonales de ABCT, est le point O, point d'intersection des diagonales de ATKI.

L'image de D, milieu de [CB] est le point F, milieu de [KI].

Le point P décrit le cercle $\mathcal{C}$.

(DP) coupe l'arête (AT) en G. L'image de (DP) est (GF)

(NP) coupe l'arête (AT) en H. l'image de (NP) est (HO).

L'image L de P est à l'intersection de (FG) et (OH).

Lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$, L décrit l'image du cercle $\mathcal{C}'$.

Les points de la ligne de terre (AT) étant invariants, (AT) est l'axe de l'affinité.

(NO) et (DF) sont parallèles (théorème de la droite des milieux). La direction de l'affinité est (ON).

Comme les triangles MON et ALP sont homothétiques dans l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{MH}{AH}$, (PL) est parallèle à (ON), ce qui termine la démonstration.

Voici, à titre d'exemples, d'autres représentations de cercles inscrits sur les faces d'un cube construit dans diverses perspectives cavalières (elles seront indiquées avec la notation PC(α ; k) où α , exprimé en degrés décimaux, désigne l'angle de projection et k le rapport de projection de la perspective cavalière).

Figure 10
PC(50° ; 0,73)

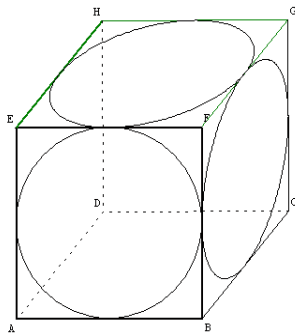


Figure 11
PC(90° ; 0,62)

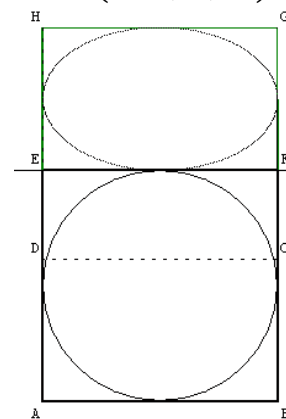


Figure 12
PC(30° ; 0,6)

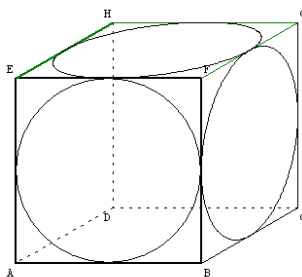


Figure 13
PC(0° ; 0,57)

