

# *Origami : construction d'un l'heptagone régulier*

---

Michel LAFOND,  
mlafond001@yahoo.fr

*Résumé* : Une approche mathématique de l'origami. De nombreuses applications en géométrie (classique ou analytique) en découlent. Elles sont de tout niveau : depuis les constructions de base jusqu'à la trisection de l'angle ou la résolution des équations de degré 4.

*Mots clés* : origami, heptagone, construction, bissectrice, médiatrice, trisectrice, Gauss, Fermat, Huzita.

La géométrie euclidienne est la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas. L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être "construit" à l'aide de ces deux instruments. Mais à l'époque la notion de nombre était floue. Avec la notion moderne de nombres réels, on s'aperçoit qu'Euclide avait largement tort, car les grandeurs que l'on sait construire à la règle et au compas à partir d'une grandeur unité donnée forment un ensemble dénombrable, soit une goutte d'eau dans l'océan des nombres réels.

## *1. Rappel*

Rappelons un résultat bien connu dû à Gauss :

**Théorème de Gauss-Wantzel.** Un polygone à  $n$  côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si  $n$  est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.

Un nombre premier est dit de Fermat s'il est de la forme  $F_k = 2^{2^k} + 1$  pour un certain entier naturel  $k$ .

Georg Mohr (1672) et Lorenzo Mascheroni (1797) prouveront que toute construction à la règle et au compas peut se réaliser au compas seul.

Les nombres premiers de Fermat sont : 3, 5, 17, 257, 65537, --- ?

On ne connaît aujourd'hui que les cinq nombres de Fermat ci-dessus, obtenus pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

On sait qu'il n'en existe pas pour  $5 \leq k \leq 32$  ( $F_k$  a été prouvé composé). On ignore le statut de  $F_{33}$ .

Ainsi, les polygones constructibles à la règle et au compas sont ceux ayant  $n$  côtés pour  $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 12, 15, 16, 17, 20 \dots\}$ .

Le cas  $n = 7$  est donc le plus petit obstacle à la construction d'un polygone régulier, basée uniquement sur la règle et le compas.

## 2. L'origami en renfort

Mais il n'y a pas que la règle et le compas, il y a aussi l'origami ! Ce n'est pas un instrument, seulement une technique de pliages. Technique très puissante, car elle permet, à partir d'une grandeur unité donnée, de construire tout ce qu'on sait faire avec une règle et un compas et bien d'autres choses dont la construction de l'heptagone régulier ou, si l'on préfère, le partage d'un disque en 7 parts égales, ce qui, au passage, résout le délicat problème du partage en 7 de la pizza si on ne chipote pas trop sur l'équité répartition des olives.

Notre but est donc d'obtenir à partir d'une feuille de papier uni sans aucun tracé initial, un heptagone régulier convexe.

Il faut évidemment préciser ce qui est autorisé comme pliages. Nous ferons référence au formalisme de Huzita qui accepte 6 sortes de plis.

Une feuille de papier, vierge de tout tracé, étant donnée, on n'acceptera que les six pliages ci-dessous où le pli sera toujours un double trait  $p$ .

Quand on dit qu'une droite  $l$  est donnée, on entend par-là qu'un pliage antérieur a été fait selon le pli  $l$ .

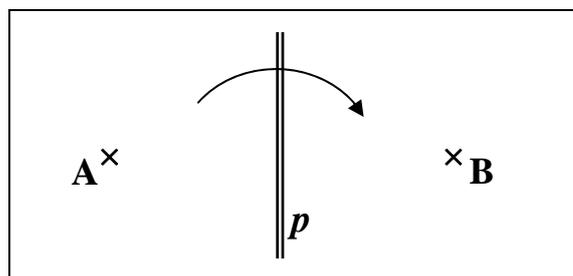
De même, quand on dit qu'un point A est donné, on entend par-là que A est l'intersection de deux plis antérieurs.

Pour les constructions, c'est la même chose : on ne peut construire une droite que par pliage et un point par intersection de deux pliages.

Voici les six sortes de plis autorisés :

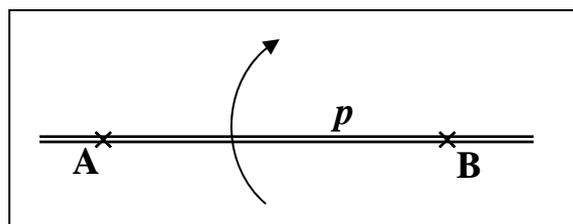
**P1** : Amener un point A donné sur un point B donné.

C'est la construction de la **médiatrice** du segment  $[AB]$  donné.



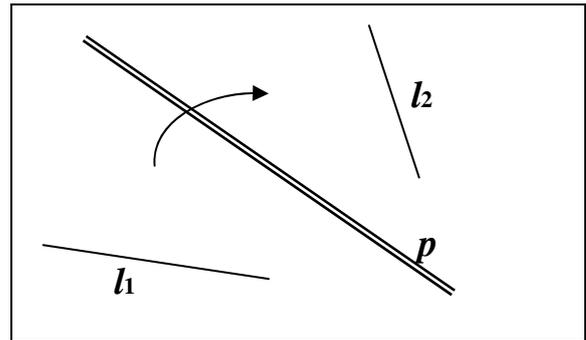
**P2** : Plier selon deux points A, B donnés.

C'est la construction de la **droite**  $(AB)$ .



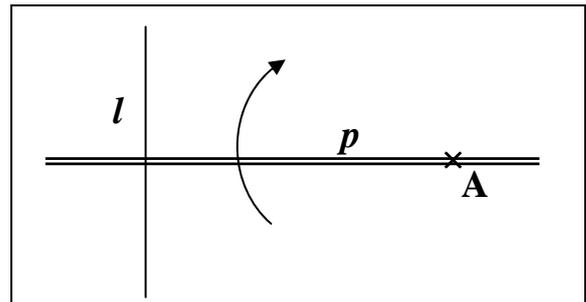
**P3** : Amener une droite  $l_1$  donnée sur une autre droite  $l_2$  donnée.

C'est la construction de l'axe de symétrie de deux droites, donc de la **bissectrice** de deux droites.



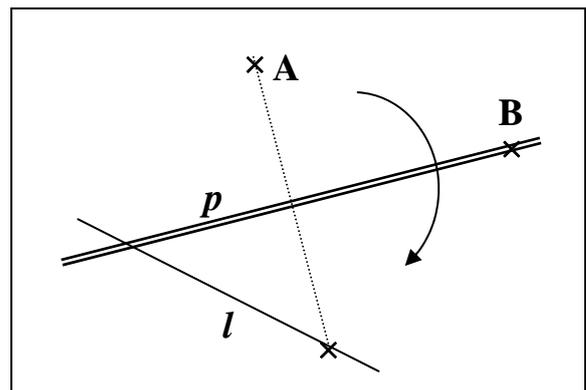
**P4** : Plier une droite  $l$  sur elle-même par un pli passant par un point A donné.

C'est la construction de la **projection orthogonale** d'un point sur une droite. On dispose donc d'une **équerre virtuelle**.



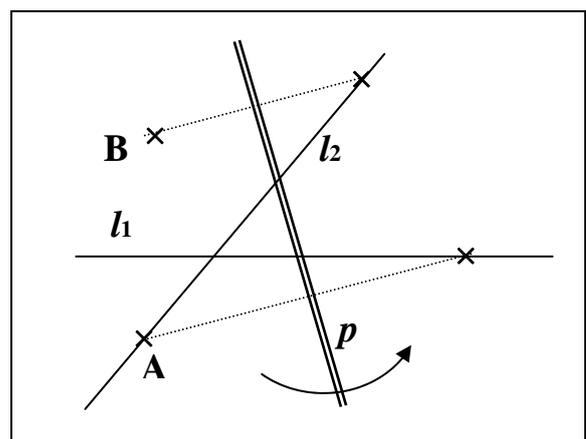
**P5** : Amener un point A donné sur une droite  $l$  donnée par un pli qui passe par un autre point B donné.

P5 permettra la "construction" de la racine carrée.



**P6** : Amener simultanément un point A et un autre point B donnés respectivement sur une droite  $l_1$  et une autre droite  $l_2$  données.

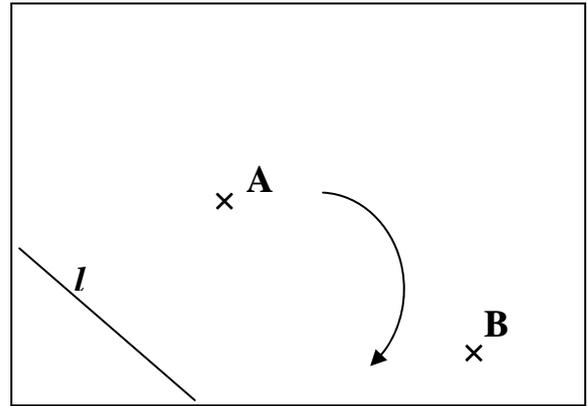
C'est une construction très puissante qui est la clé pour la construction de l'heptagone.



Remarque :

Si, P1, P2, P3, P4 sont toujours réalisables, ce n'est pas le cas de P5 comme on le voit ci-contre, car le symétrique de A par rapport au pli supposé n'est pas sur la feuille. C'est vrai aussi pour P6.

Ceci n'est pas gênant puisqu'on va voir que les déplacements (translations, rotations) de segments sont réalisables par pliages.



### 3. Opérations géométriques réalisables par origami.

#### 3.1 Le déplacement

Il est essentiel de pouvoir reporter une longueur donnée (par un segment  $[AB]$ ) n'importe où sur la feuille, disons en  $A'B'$  où  $A'$  est donné ainsi que la direction (orientée)  $\Delta = A'B'$ .

On suppose évidemment que l'extrémité  $B'$  est sur la feuille.

On a besoin pour cela de quelques opérations élémentaires :

D'abord, P1 et P2 permettent en deux pliages d'obtenir le milieu d'un segment  $[AB]$  quelconque.

Ensuite, on peut obtenir en cinq pliages le symétrique d'un point par rapport à un autre point. Mais attention, ce n'est pas si simple. Voir la figure 1 ci-dessous.

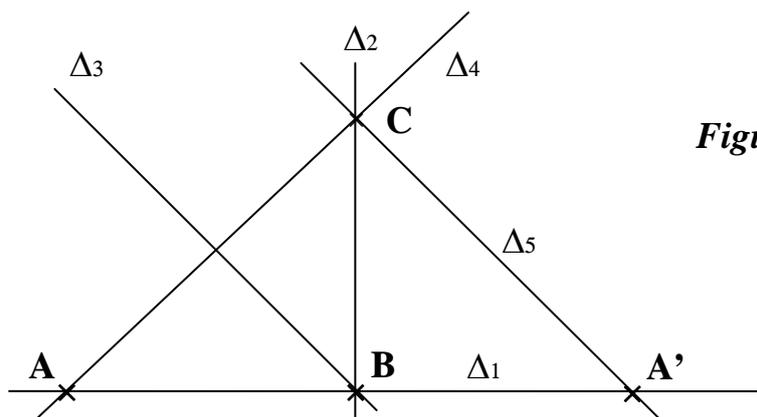


Figure 1

A et B étant donnés distincts, On commence par construire la droite  $\Delta_1 = (AB)$  et la perpendiculaire  $\Delta_2$  à  $(AB)$  passant par B. Mais ce dernier pliage ne construit pas le symétrique  $A'$  de A par rapport à B car il n'est pas permis de "décalquer" un point ou une droite. [Essayez pour voir]. Rappelons qu'un point n'est dit construit que s'il est obtenu par l'intersection de deux pliages.

On continue ainsi : on construit la bissectrice  $\Delta_3$  de  $(\Delta_1, \Delta_2)$  puis la perpendiculaire  $\Delta_4$  à  $\Delta_3$  passant par A. On obtient le point  $C = \Delta_2 \cap \Delta_4$ .

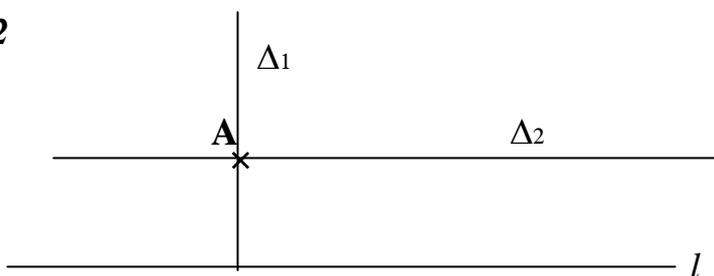
Enfin, la perpendiculaire  $\Delta_5$  à  $\Delta_4$  passant par C donne  $A' = \Delta_1 \cap \Delta_5$  qui est le symétrique de A par rapport à B.

On peut construire en deux pliages la parallèle à une droite donnée  $l$  passant un point donné A (extérieur à  $l$ ) [Figure 2] :

Pour cela, on construit simplement la perpendiculaire  $\Delta_1$  à  $l$  passant par A puis la perpendiculaire  $\Delta_2$  à  $\Delta_1$  passant par A.

La construction origamique de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné aurait ravi Euclide, mais les papyrus de l'époque ne devaient pas être commodes pour l'origami.

*Figure 2*



Pour effectuer un déplacement de segment, huit pliages suffisent. Examinons la figure 3 ci-dessous dans laquelle il s'agit de reporter AB sur la droite  $\Delta$  donnée avec A' pour origine et A'B' dans la direction indiquée.

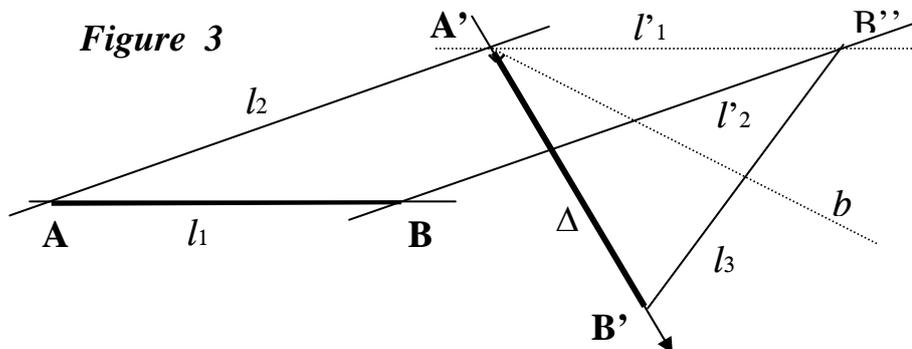
On construit la droite  $l_1 = (AB)$  et la droite  $l_2 = (AA')$ .

Ensuite on construit la parallèle  $l'_1$  à  $l_1$  passant par A' et la parallèle  $l'_2$  à  $l_2$  passant par B. Le point  $B'' = l'_1 \cap l'_2$  est maintenant connu.

On construit la bissectrice  $b$  de  $(\Delta, l'_1)$  [celle des deux bissectrices qui nous intéresse en fonction de la direction imposée] et la perpendiculaire  $l_3$  à  $b$  passant par B''.

$B' = \Delta \cap l_3$  est l'extrémité cherchée puisque  $AB = A'B'' = A'B'$ .

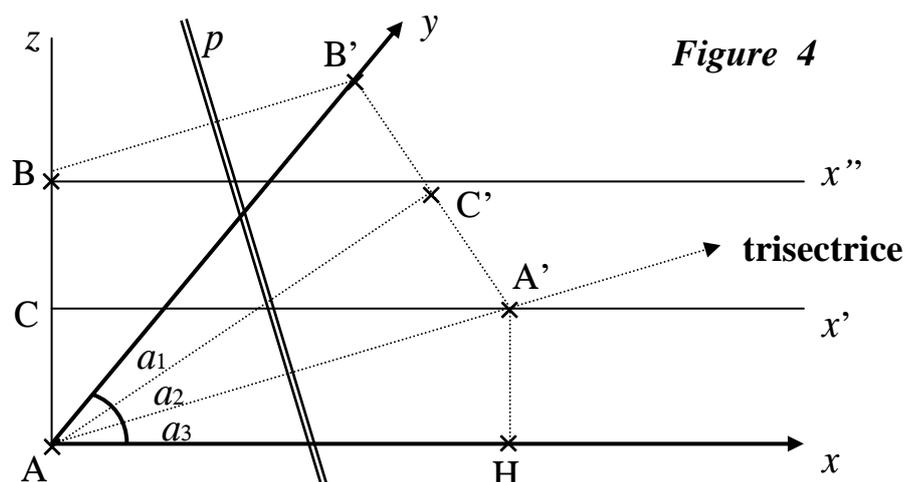
*Figure 3*



### 3.2 La trisection.

Une dernière opération géométrique nous sera nécessaire pour la suite, c'est la trisection de l'angle (célèbre problème qui a fait transpirer des générations de mathématiciens !).

Soit à trisecter l'angle aigu  $(Ax ; Ay)$  de la figure 4 ci-dessous.



On construit la perpendiculaire  $(Az)$  à  $(Ax)$  et deux parallèles  $(Cx')$  et  $(Bx'')$  à  $(Ax)$  telles que  $AC = CB$ .

P6 permet d'obtenir par le pli  $p$ , l'envoi simultané du point  $A$  sur  $A'$  de la droite  $(Cx')$  et du point  $B$  sur  $B'$  de la droite  $(Ay)$ .  $H$  est la projection de  $A'$  sur  $(Ax)$ .

$C$ , milieu de  $[AB]$ , est envoyé par symétrie sur  $C'$ , milieu de  $[A'B']$ .

Les triangles  $(AA'C')$  et  $(AC'B')$  sont égaux ce qui implique  $a_1 = a_2$  et les égalités des triangles  $(CAA')$  et  $(HAA')$  d'une part et  $(CAA')$  et  $(AA'C')$  d'autre part impliquent celle des triangles  $(HAA')$  et  $(AA'C')$  d'où  $a_2 = a_3$ .

Huit plis ont suffi (5 pour obtenir  $B$ , 1 pour  $Bx''$  et 2 pour  $p$  et  $AA'$ ).

L'affaire est réglée pour les angles aigus  $\alpha$ , et pour trisecter un angle obtus

$\beta = \alpha + \pi / 2$ , il suffit de remarquer que  $\frac{\beta}{3} = \frac{\alpha + \pi/2}{3} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6}$  ramène le problème au cas de l'angle aigu.

[L'angle  $\pi / 6$  se construit à partir du triangle rectangle  $(1, \sqrt{3}, 2)$  où  $\sqrt{3}$  s'obtient par la construction de la figure 5 expliquée dans le paragraphe 4].



Le pli de type P5 suivi du pli perpendiculaire (AI) permettent d'obtenir le symétrique E de A par rapport à  $p$ . E est sur la droite (BC).

E a donc les coordonnées E ( $t, 0$ ) avec  $t < 0$  si  $x < 4$  et  $t > 0$  si  $x > 4$ .

En effet, le cas  $t = 0$  correspond au cas  $x = 4$  pour lequel  $p$  est parallèle à BC.

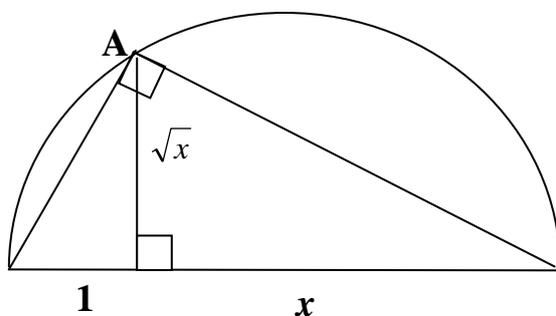
En écrivant que ID est perpendiculaire à IE, on obtient l'équation :

$$4t^2 - 4tx + x^2 - 4x = 0 \text{ qui a deux solutions } t = x/2 \pm \sqrt{x}.$$

Seule  $t = x/2 - \sqrt{x}$  convient (car  $t < 0$  si  $x < 4$  et  $t > 0$  si  $x > 4$ ), ce qui entraîne dans les deux cas :  $EC = x/2 - t = \sqrt{x}$ .

Obtenir  $\sqrt{x}$  si  $x = 2$  ou si  $0 < x < 2$ , est un bon exercice.

Attention ! La figure ci-dessous qui donne bien  $\sqrt{x}$  n'est pas réalisable par pliage [Comment est obtenu le point A ?] à moins de disposer d'un cercle tracé sur la feuille de travail, ce qui n'est pas le cas.

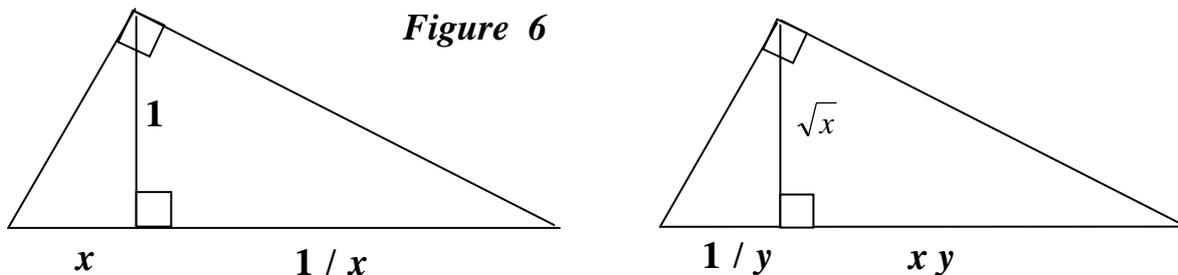


$x + y$  ;  $|x - y|$  s'obtiennent par déplacement de segments sur une même droite.

La construction de  $\sqrt[3]{x}$  n'est pas nécessaire à la construction de l'heptagone.

C'est aussi un bon exercice, mais moins facile. (Il faut utiliser P6).

Le produit et l'inverse (donc le quotient) s'obtiennent facilement à partir des propriétés du triangle rectangle (Figure 6 ci-dessous dans laquelle aucun cercle n'est nécessaire).



On peut enfin aborder :

## 5. La construction de l'heptagone

Ce n'est plus qu'une question de calcul.

Si on réussit à calculer à partir d'un segment quelconque (dont la longueur est prise pour unité) la quantité disons  $s = \sin(\pi/7)$ , l'affaire sera réglée et même pliée.

En effet : la connaissance de  $s$  donc de  $c = \sqrt{1-s^2}$  permet l'obtention d'un angle de mesure  $\pi/7$  qui donnera par duplication l'heptagone régulier.

Pour cela il suffit de trouver une expression de  $s$  ne faisant intervenir que les opérations ordinaires, racine carrée comprise.

Partons de la relation  $\sin(3\pi/7) = \sin(4\pi/7)$  qui entraîne

$3s - 4s^3 = 4sc - 8s^3c$  ou encore  $3 - 4s^2 = 4c - 8s^2c = 4c(1 - 2s^2)$  qui, après élévation au carré donne :

$$(3 - 4s^2)^2 = 16c^2(1 - 2s^2)^2 \text{ c'est-à-dire } (3 - 4s^2)^2 = 16(1 - s^2)^2(1 - 2s^2)^2$$

$$\text{soit en développant : } 64s^6 - 112s^4 + 56s^2 - 7 = 0 \quad (1)$$

On pose  $x = s^2$  pour avoir

$$64x^3 - 112x^2 + 56x - 7 = 0 \quad (2)$$

On élimine traditionnellement le terme en  $x^2$  en posant  $y = x - 7/12$  ce qui mène après division des deux membres par 64 à la forme standard

$$y^3 + py + q = 0 \quad (3)$$

où  $p = -252/1728$  et  $q = 7/1728$ .

Le discriminant  $27q^2 + 4p^3$  étant négatif, on utilise la méthode trigonométrique en posant :

$$y = \lambda \cos(t) \text{ avec } \lambda = \sqrt{-\frac{4p}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{6} \quad (4)$$

(3) et (4) donnent alors  $y^3 + py + q = \lambda^3 \cos^3(3t) + \lambda p \cos(t) + q = 0 \quad (5)$

La linéarisation  $4 \cos^3(3t) = \cos(3t) + 3 \cos(t)$  transforme (5) en

$$\cos(3t) = -\frac{4q}{\lambda^3} = -\frac{\sqrt{7}}{14} \quad (6)$$

Les solutions à  $2\pi$  près de (6) sont

$$t = \frac{\theta + 2k\pi}{3} \text{ où } \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) \text{ et } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Ici,  $\theta \approx 1,761$  donc les solutions de (6) sont

pour  $k = 0$   $t \approx 0,587$  donc  $y = \lambda \cos(t) \approx 0,367$

pour  $k = 1$   $t \approx 2,681$  donc  $y = \lambda \cos(t) \approx -0,395$

pour  $k = 2$   $t \approx 4,776$  donc  $y = \lambda \cos(t) \approx 0,028$

Puisque  $y = x - 7/12 = s^2 - 7/12 = \sin^2(\pi/7) - 7/12 \approx -0,395$  il n'y a aucun doute, c'est la deuxième solution ( $k = 1$ ) qui convient c'est-à-dire

$$y = \lambda \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right).$$

Résumons :

$$s = \sin (\pi / 7) = \sqrt{\frac{\sqrt{7}}{6} \cos \left( \frac{1}{3} \left[ \cos^{-1} \left( -\frac{\sqrt{7}}{14} \right) + 2\pi \right] \right) + \frac{7}{12}} \quad (7)$$

Mais est-ce que tout ceci est constructible ?

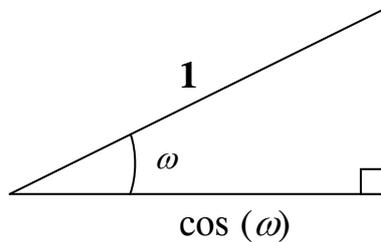
La présence de  $\pi$  semble rédhibitoire, mais le calcul de

$$\omega = \frac{1}{3} \left[ \cos^{-1} \left( -\frac{\sqrt{7}}{14} \right) + 2\pi \right] = \frac{\theta + 2\pi}{3}$$

ne représente en fait que la trisection de l'angle  $\theta + 2\pi$  donc la trisection de l'angle obtus  $\theta$ .

On a vu dans 3-2 que c'était réalisable.

Quant au terme  $\gamma = \cos \omega$ , il s'obtient par projection d'un segment unité dans un triangle approprié :



Les autres opérations de l'expression (7) sont banales.

## 6. La construction dans le détail.

Prenons la formule (7) sous la forme :

$$6s = 6 \sin (\pi / 7) = \sqrt{6\sqrt{7} \gamma + 21} \quad \text{où} \quad \gamma = \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) \quad \text{et} \quad \theta = \cos^{-1} \left( -\frac{\sqrt{7}}{14} \right) \quad (8)$$

Les figures de 7 à 13 ci-dessous montrent comment obtenir dans l'ordre :

$-\cos (\theta)$  ;  $\sin (\theta)$  ;  $\theta$  ;  $(\pi - \theta) / 3$  ;  $|\gamma|$  ;  $3|\gamma|\sqrt{7}$  ;  $3\gamma\sqrt{7} + 21$  ;  
 $6s$  ;  $(6s)^2$  ;  $(2s)^2$  ;  $2 \cos (\pi / 7)$  ;  $2 \sin (\pi / 7)$  et enfin  $\pi / 7$ .

Il faut évidemment avoir lu ce qui précède pour comprendre ce qui se passe.



Les explications concernant la figure 9 ci-dessus sont les suivantes :

$$AB = -2 \cos (\theta) \quad (\text{quantité positive})$$

$$BC = 2 \sin (\theta) \quad AB \perp BC \quad \text{donc } (Bx, By) = \theta$$

$$AD \perp (xx') \quad AD = 2 BC$$

$l_1$  est la parallèle à  $(xx')$  passant par C,  $l_2$  est la parallèle à  $(xx')$  passant par D.

Le pli  $p$  (de type P6) qui envoie A sur  $A' \in l_1$  et D sur  $D' \in (Ay)$  donne la trisectrice  $Az$  du supplémentaire de  $\theta$ .

$$\text{Donc } \gamma = \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) = -\cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} - \pi \right) = -\cos \left( \frac{\pi - \theta}{3} \right) = -\cos (\alpha) \quad \text{où}$$

$$\alpha = (Bx', Bz).$$

$$AE = 3 \quad EF \perp (xx') \quad \text{donc} \quad AF = 3 \cos (\alpha) = 3 |\gamma|$$

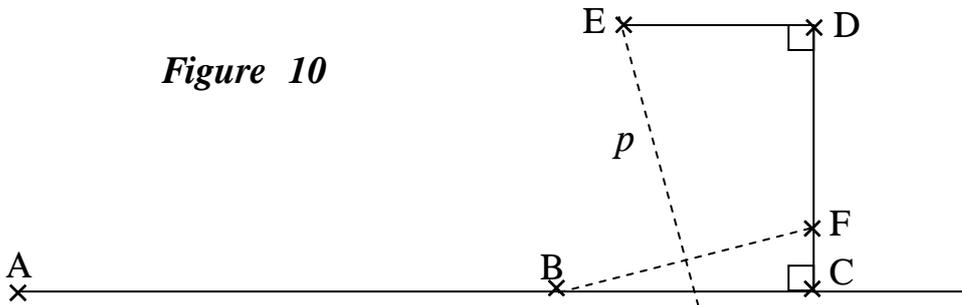
$$AG = AF \quad GH = AF - 1 = 3 |\gamma| - 1.$$

Le pli  $p'$  (de type P5) suivi de la perpendiculaire à  $p'$  passant par F donne  $F'$  sur  $(AG)$  tel que  $F'G = \sqrt{6} |\gamma|$ .

$$GI = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad [\text{C'est 4 fois la valeur CG de la figure 7}]$$

$$F'J \perp F'I \quad \text{donc} \quad GJ = 3 |\gamma| \sqrt{7}.$$

**Figure 10**



Dans la figure 10 ci-dessus,  $AB = 3 |\gamma| \sqrt{7}$  (Le GI de la figure 9)  $AC = 21 / 2$

$$\text{Donc } BC = 3 \gamma \sqrt{7} + \frac{21}{2} \quad (\text{en effet } \gamma < 0)$$

$$CD = CB \quad \text{et} \quad DE = BC - 1.$$

Le pli  $p$  (de type P5) suivi de la perpendiculaire à  $p$  passant par B donne F sur  $(CD)$

$$\text{tel que } FD = \sqrt{6\sqrt{7} \gamma + 21} = 6 s = 6 \sin (\pi / 7).$$

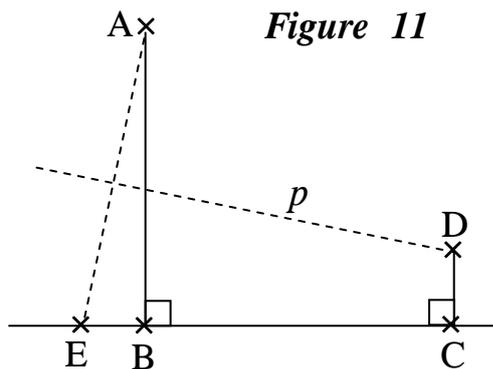
Dans la figure 11 ci-contre :

$AB = BC = 3s$   
 (La moitié de la quantité précédente).

$CD = 3s - 1$

Le pli  $p$  (de type P5) et la  
 perpendiculaire à  $p$  passant par A

donne E tel que  $CE = \sqrt{6s}$



**Figure 11**

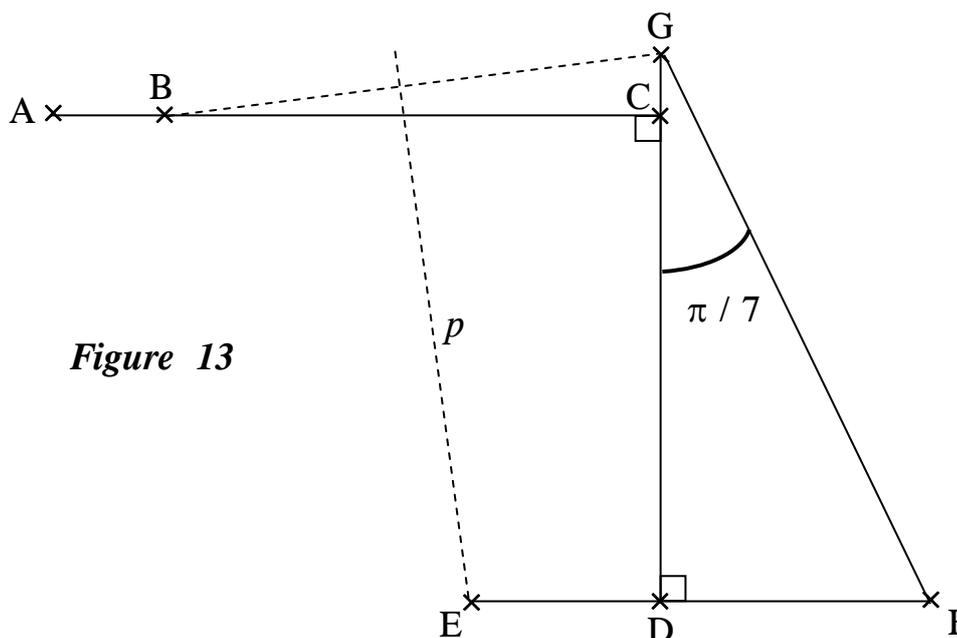
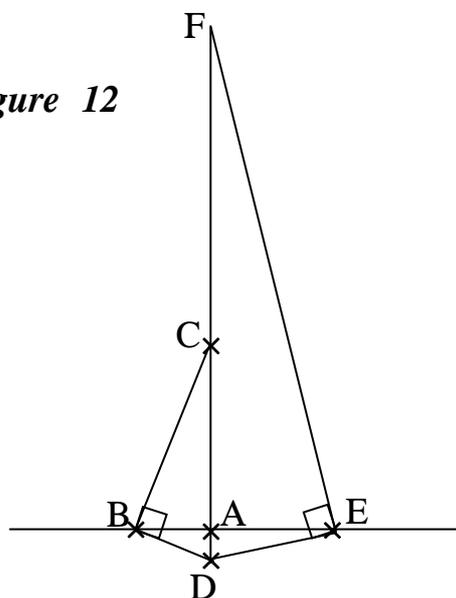
Dans la figure 12 ci-contre :

$AB = 1$              $AC = 6s$   
 Donc  $AD = 1 / 6s$ .

$AE = \sqrt{6s}$  [obtenu dans la figure 11]

Donc  $AF = (6s)^2$ .

**Figure 12**



**Figure 13**

Dans la figure 13 ci-dessus :

$AB = 2s^2$  (Le 18<sup>ème</sup> de la grandeur AF obtenue dans la figure 12)

$AC = 2$  donc  $BC = 2 - 2s^2$

$CD = CB$                        $DE = BC - 1 = 1 - 2s^2$ .

Donc le pli  $p$  (de type P5) suivi de la perpendiculaire à  $p$  passant par B donne G tel que  $DG = \sqrt{4 - 4s^2} = 2\sqrt{1 - \sin^2(\pi/7)} = 2 \cos(\pi/7)$

$DF = 2 \sin(\pi/7)$  [le tiers de  $6 \sin(\pi/7)$  qui a été obtenu dans la figure 10]

$DF = 2 \sin(\pi/7)$ ,  $DG = 2 \cos(\pi/7)$  donc DGF a bien pour mesure  $\pi/7$ .

Un conseil : si vous utilisez ce qui précède pour diviser votre pizza en 7, n'utilisez pas la pizza comme espace de travail, surtout si elle est encore chaude. Prenez une feuille de papier, effectuez la centaine de pliages indiqués, et l'angle DGF de mesure  $\pi/7$  vous fournira un gabarit incontestable pour une demi-part.

### **Sitographie :**

C'est en lisant [Novembre 2011] l'article de WIKIPEDIA Mathématiques des origamis affirmant sans démonstration que l'origami permettait entre autres la construction de l'heptagone, que j'ai eu envie de creuser le problème. Parce que si on croit tout ce qu'on lit sur Internet...

En tapant ORIGAMI HEPTAGONE dans les moteurs de recherche, on tombe sur des tas de sites intéressants. On y trouvera la mention d'une septième sorte de plis proposée par Koshire Hatori.