

Courbes de poursuites avec Scilab

Fakhreddine GHOMMID, lycée Gustave Eiffel, Dijon

Résumé : Exemple d'utilisation du logiciel *Scilab* dans la résolution approchée d'un problème historique, en l'occurrence, le problème des courbes de poursuite.

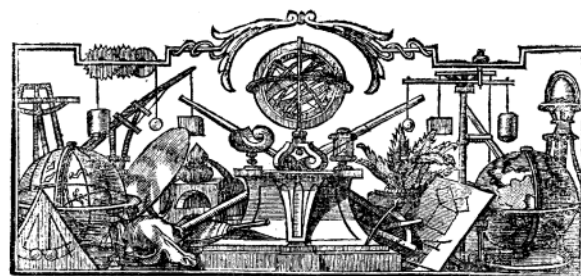
Mots clés : Courbe de poursuite ; logiciel *Scilab* ; représentation des courbes en informatique ; motivation à la recherche.

Les activités d'algorithmique développées dans les classes de lycées, permettent de revisiter de beaux problèmes, désormais devenus des « classiques », en ajoutant un caractère parfois ludique facilitant l'exploration et la recherche.

Le logiciel de calcul scientifique *Scilab*, libre et gratuit, est ici mis en avant afin de montrer quelques-unes de ses possibilités ; l'activité choisie pour cela est celle de la construction d'une *courbe de poursuite*.

Mais avant d'aller plus loin, donnons la définition de ces courbes que proposa Bouguer, publiée dans les *Mémoires de mathématiques et de physique de l'Académie Royale des Sciences*, 1732 :

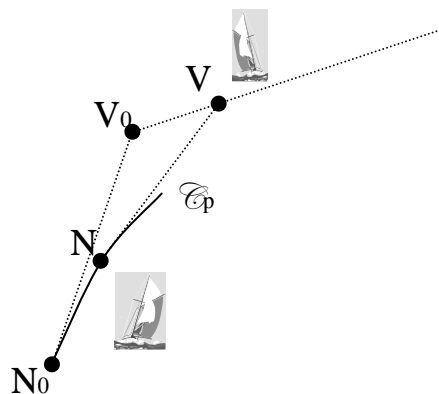
[...] On peut donner à ces courbes le nom de lignes de poursuites, parce qu'elles sont décrites par le mouvement uniforme d'un point qui en poursuit un autre. Considérées sous cette idée, on voit qu'elles sont tracées presque tous les jours, et elles l'étaient le temps passé encore plus souvent, lorsqu'on commettait fréquemment cette faute dans la Marine, de diriger exactement la Proue vers les Vaisseaux auxquels on donnait chasse. Aussitôt que le Navire qui poursuivait l'autre, n'était pas situé sur la route que suivait ce dernier, il était obligé de se détourner dans celle de la ligne droite, et de décrire la courbe dont il est ici question.



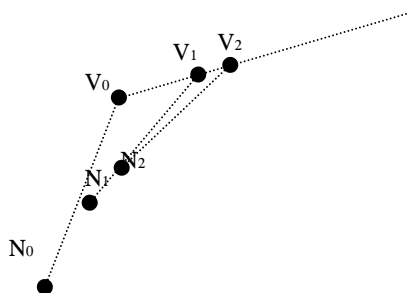
MEMOIRES
DE
MATHEMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,
TIREES DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.
De l'Année M. DCCXXXII.
SUR DE NOUVELLES COURBES
auxquelles on peut donner le nom de LIGNES
DE POURSUITE.
Par M. BOUGUER.

Examinons à l'aide de schémas l'exemple proposé :

Dans le plan, le point V représente la position du vaisseau poursuivi (V_0 étant sa position initiale) et N représente la position du navire prenant le vaisseau en chasse (N_0 étant sa position initiale). V décrit une demi-droite et N la courbe de poursuite C_p , la droite (NV) étant supposée tangente à la courbe C_p .

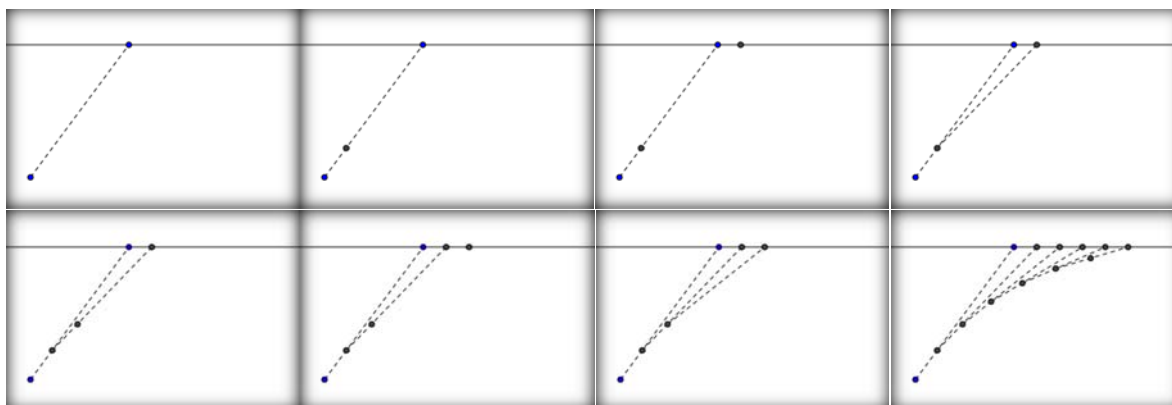


Afin de modéliser approximativement cette dynamique à l'aide d'un algorithme, donnons-nous une approche discrète, une construction « pas-à-pas » par intervalles de temps :



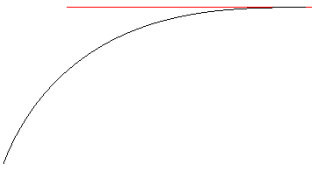
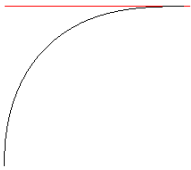
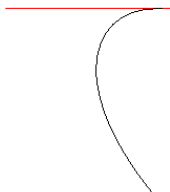
Suivant cette approximation, et étant données deux positions N_1 et V_1 , les nouvelles positions N_2 et V_2 seront, un laps de temps après, telles que $\overrightarrow{N_1 N_2} = k_1 \overrightarrow{N_1 V_1}$ et $\overrightarrow{V_1 V_2} = k_2 \vec{u}$ où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles à déterminer et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la trajectoire suivie par le vaisseau.

Mais essayons de construire point par point, « à la main » (en fait ici avec Geogebra), les positions successives de nos deux bateaux. Remarquons qu'entre les instants successifs $t=0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$ les distances parcourues restent constantes :



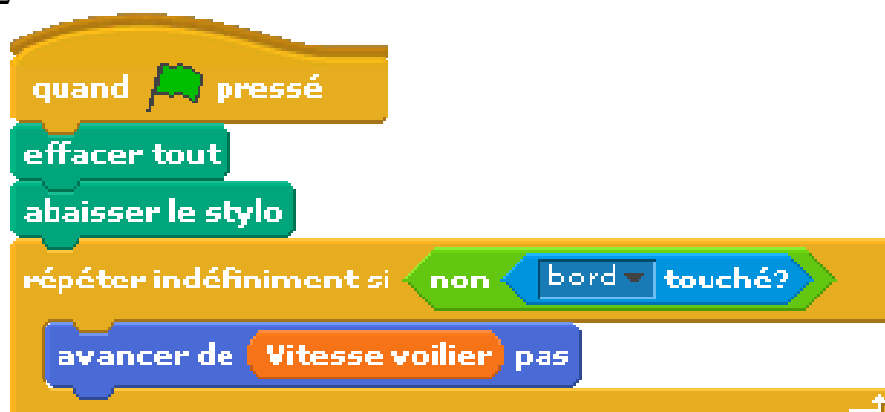
Ces constructions successives esquissent notre premier algorithme dont le code *Scilab* est donné ci-après :

Code Scilab
<pre> function result=<u>distance</u>(A, B) result=sqrt((B(1)-A(1))^2+(B(2)-A(2))^2); endfunction function [coords]=<u>deplace</u>(A, u) coords(1)=A(1)+u(1) coords(2)=A(2)+u(2) endfunction function [coords]=<u>vecteur</u>(A, B) coords(1)=B(1)-A(1) coords(2)=B(2)-A(2) endfunction d1=1.5/10 //Déplacement du Navire par intervalle de temps d2=1/10 //Déplacement du Vaisseau par intervalle de temps N=[-5,-2] //Position initiale du Navire (coordonnées) V=[-4,0.5] //Position initiale du Vaisseau (coordonnées) <u>clf</u>() //Efface le contenu de la fenêtre graphique <u>orthonorme</u> //Rend le repère orthonormé compteur=1 while ((<u>distance</u>(N,V)>0.1)&(compteur<100)) compteur=compteur+1 A=N //Mémorise les anciennes positions de N et V B=V //pour le tracé des segments avec plot2d k1=d1/<u>distance</u>(N,V) N=<u>deplace</u>(N,<u>vecteur</u>(N,V).*k1) //Nouvelles coordonnées du Navire V=<u>deplace</u>(V,[d2,0]) //Nouvelles coordonnées du Vaisseau plot2d([A(1),N(1)],[A(2),N(2)],[1],axesflag=0,rect=[-5,-2,2,1]) plot2d([B(1),V(1)],[B(2),V(2)],[5],axesflag=0,rect=[-5,-2,2,1]) end </pre>

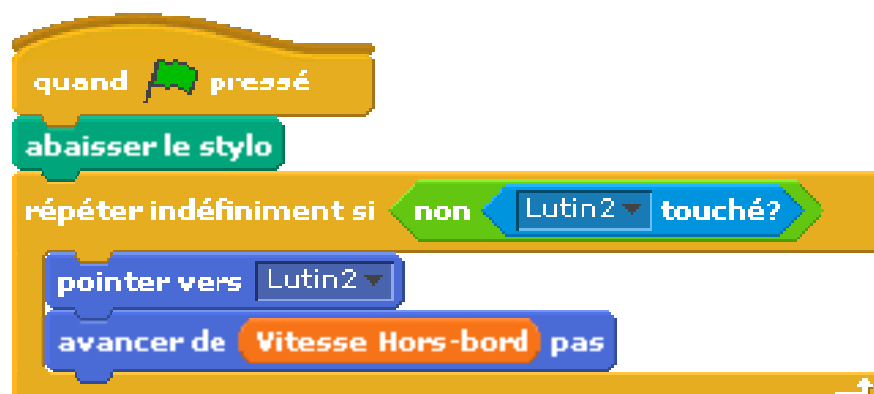
Exemples de sorties pour différentes valeurs de d_1 , d_2 , N et V . (précisées et modifiables dans l'algorithme)		
		
$d_1=1.5/10$ $d_2=1/10$ $N=[-5,-2]$ $V=[-4,0.5]$	$d_1=1.4/10$ $d_2=0.9/10$ $N=[-4,-2]$ $V=[-4,0.5]$	$d_1=1.2/10$ $d_2=1/10$ $N=[0,-3]$ $V=[-4,0.5]$

Ce type de programme peut être introduit très tôt au lycée, dès les développements des premiers algorithmes relatifs à la géométrie repérée. On pourrait bien sûr utiliser le très ludique logiciel *Scratch*, mais le contenu mathématique, déjà présenté *a minima*, serait vidé de toute substance :

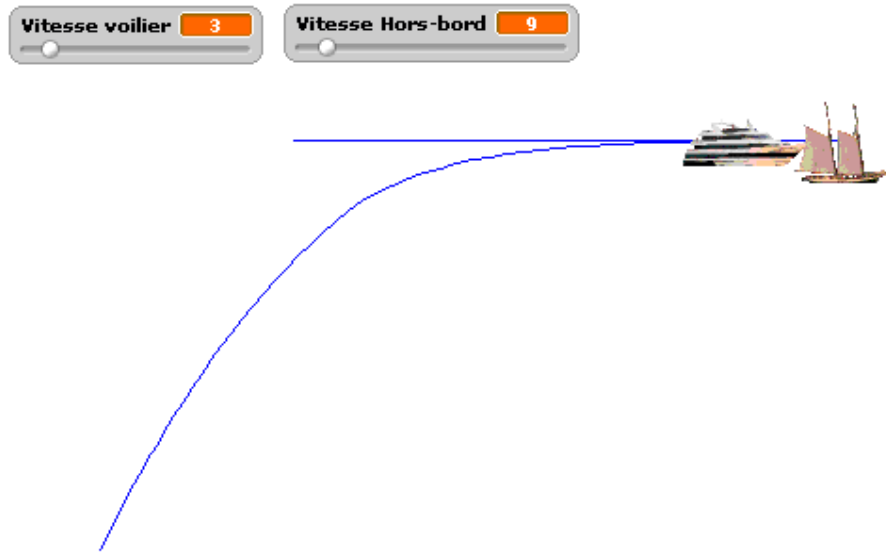
Code Lutin 2



Code Lutin



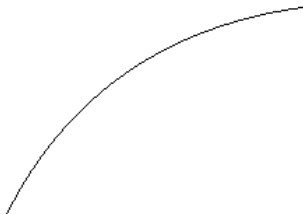
Affichage



Une autre façon de traduire cette situation de poursuite est d'introduire les suites de coordonnées dans un repère orthonormé du plan d'origine V_0 , l'axe des abscisses étant dirigé et orienté par le parcours du vaisseau. En notant $N_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ et $V_k \begin{pmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{y}_k \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel k , les positions successives de N et V , la relation vectorielle $\overrightarrow{N_k N_{k+1}} = \frac{d_1}{N_k V_k} \overrightarrow{N_k V_k}$ avec $\overrightarrow{V_k V_{k+1}} = \begin{pmatrix} d_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (où d_1 et d_2 sont toujours les distances parcourues par intervalle de temps donné), conduit à :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{d_1}{\sqrt{(d_2 k - x_k)^2 + y_k^2}} (d_2 k - x_k) + x_k \\ y_{k+1} = y_k \left(1 - \frac{d_1}{\sqrt{(d_2 k - x_k)^2 + y_k^2}} \right) \end{cases}$$

La représentation des suites avec *Scilab* étant faite sous la forme d'un tableau, l'indice initial ne peut être 0, mais 1 ; d'où une nécessaire adaptation que voici (calcul de 100 points pour l'exemple) :

Code Scilab
<pre> d1=1.5/10 //Déplacement du Navire par intervalle de temps d2=1/10 //Déplacement du Vaisseau par intervalle de temps clf() x(1)=-1 //Position initiale du Navire y(1)=-2 for n=1:100 c=d1/sqrt((d2*(n-1)-x(n))^2+y(n)^2) x(n+1)=c*(d2*(n-1)-x(n))+x(n) y(n+1)=y(n)*(1-c) end plot2d(x,y,[1],axesflag=0,rect=[-5,-2,2,1]) </pre>
Graphique obtenu 

Enfin, les possibilités de résolution numériques d'équations différentielles par *Scilab* peuvent être exploitées.

En considérant le repère précédent avec $N \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $V \begin{pmatrix} v_1 t \\ 0 \end{pmatrix}$, où x et y sont deux fonctions supposées dérivables de la variable réelle t , v_1 et v_2 les vitesses respectives du Vaisseau et du Navire, nous avons la relation $\frac{d\overrightarrow{ON}}{dt} = \frac{v_2}{NV} \overrightarrow{NV}$ qui se traduit par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{v_2}{\sqrt{(v_1 t - x(t))^2 + y(t)^2}} (v_1 t - x(t)) \\ y'(t) = -\frac{v_2}{\sqrt{(v_1 t - x(t))^2 + y(t)^2}} y(t) \end{cases}$$

Qui peut être résolu de façon approchée par *Scilab* comme suit :

Code Scilab

//Définition du système différentiel :

`function [f]=equadiff(t, N)`

// Ici, $f(1)=x'(t)$, $f(2)=y'(t)$ et $N=[x(t),y(t)]$

`f(1)=v2/sqrt((v1*t-N(1))^2+N(2)^2)*(v1*t-N(1))`

`f(2)=-v2/sqrt((v1*t-N(1))^2+N(2)^2)*N(2)`

`endfunction`

//Valeurs des vitesses respectives :

`v1=1`

`v2=2`

`clf()`

// les valeurs des instants pour lesquels on récupère la solution (tmin=0, tmax=500)

`t = linspace(0,1,500)`

`N0 = [1 ; -1];` *// la condition initiale*

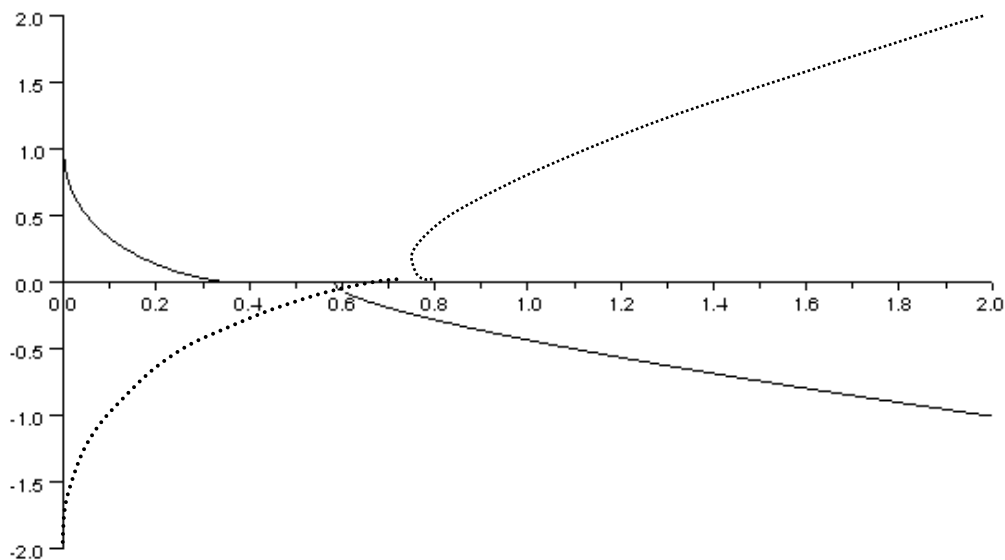
// La résolution approchée de notre équation différentielle :

`[N] = ode(N0, 0, t, equadiff)`

// Le tracé de la solution (sous réserve d'unicité):

`plot2d(N(1,:)',N(2,:))`

Exemples de courbes obtenues



Les différentes approches présentées ne doivent pas faire oublier qu'aucune technique mobilisée ici ne valide les résultats obtenus (erreur liée à la méthode et stabilité des solutions, erreur numérique, etc.). Pour comparer les constructions approchées à la trajectoire exacte, laissons à M. de Maupertuis le soin de nous exposer sa solution (voir l'encadré ci-contre, extrait du même *Mémoires de mathématiques et de physique de l'Académie Royale des Sciences de 1732*).

S U R L E S C O U R B E S D E P O U R S U I T E .

Par M. DE MAUVERTUIS.

LE Memoire que M. Bouguer lût, il y a quelques jours, m'a fait penser à une Solution assez courte du même Probleme:

PROBLEME I. *Trouver la courbe de poursuite, c'est-à-dire, la courbe par laquelle un Vaisseau doit en poursuivre un autre qui s'enfuit par une ligne droite, en supposant que les vitesses des deux Vaisseaux soient toujours dans le même rapport.*

SOLUTION. Ce Probleme se réduit à trouver la courbe où la resecte est proportionnelle à l'arc (j'appelle *Resecte*, la partie de l'abscisse prise depuis l'origine jusqu'à la rencontre de la tangente). Prenant donc x pour l'abscisse; y pour l'ordonnée, & s pour l'arc, on a $\frac{y dx}{dy} - x = ms$, ou $\frac{dy^2 dx + y dy ddx - y dx ddy}{dy^2} - dx = m ds$. Cette équation, si l'on fait dy constant, se réduit à $\frac{dx}{\sqrt{dy^2 + dx^2}} = \frac{m dy}{y}$, ou (intégrant par logarith.) $l(dx + \sqrt{dy^2 + dx^2}) - l dy = mly - mlA$, ou, passant aux nombres, $dx + \sqrt{dy^2 + dx^2} = y^m A^{-m} dy - dx$, ou $\sqrt{dy^2 + dx^2} = y^m A^{-m} dy - dx$, ou $dy^2 + dx^2 = y^{2m} A^{-2m} dy^2 - 2y^m A^{-m} dy dx + dx^2$, ou $dy = A^{-2m} y^{2m} dy - 2A^{-m} y^m dx$, ou $dx = \frac{1}{2} A^{-m} y^m dy - \frac{1}{2} A^m y^{-m} dy$, ou enfin $x = \frac{1}{2m+1} A^{-m} y^{m+1} + \frac{1}{2m-1} A^m y^{-m+1} + B$.

Ou dans le cas $m=1$, $x = \frac{1}{4} A^{-1} yy - \frac{1}{2} A ly + C$.

« **PROBLÈME 1.** Trouver la courbe de poursuite, c'est-à-dire, la courbe par laquelle un Vaisseau doit en poursuivre un autre qui s'enfuit par une ligne droite, en supposant que les vitesses des deux Vaisseaux soient toujours dans le même rapport.

SOLUTION. Ce Problème se réduit à trouver la courbe où la resecte est proportionnelle à l'arc (j'appelle *Resecte*, la partie de l'abscisse prise depuis l'origine jusqu'à la rencontre de la tangente). Prenant donc x pour l'abscisse, y

pour l'ordonnée, & s pour l'arc, on a $\frac{y dx}{dy} - x = ms$, ou

$\frac{dy^2 dx + y dy ddx - y dx ddy}{dy^2} - dx = m ds$. Cette équation, si l'on fait dy constant, se

réduit à $\frac{dx}{\sqrt{dy^2 + dx^2}} = \frac{m dy}{y}$, ou (intégrant par logarith.)

$l(dx + \sqrt{dy^2 + dx^2}) - l dy = mly - mlA$, ou, passant aux nombres,

$dx + \sqrt{dy^2 + dx^2} = y^m A^{-m} dy - dx$, ou $\sqrt{dy^2 + dx^2} = y^m A^{-m} dy - dx$, ou

$dy^2 + dx^2 = y^{2m} A^{-2m} dy^2 - 2y^m A^{-m} dy dx + dx^2$, ou $dy = A^{-2m} y^{2m} dy - 2A^{-m} y^m dx$, ou

$dx = \frac{1}{2} A^{-m} y^m dy - \frac{1}{2} A^m y^{-m} dy$, ou enfin $x = \frac{1}{2m+1} A^{-m} y^{m+1} + \frac{1}{2m-1} A^m y^{-m+1} + B$.

Ou dans le cas $m=1$, $x = \frac{1}{4} A^{-1} yy - \frac{1}{2} A ly + C$. »

Il aboutit à démontrer que la courbe de poursuite admet, dans le cas $m = \frac{v_2}{v_1} > 1$, une équation de la forme :

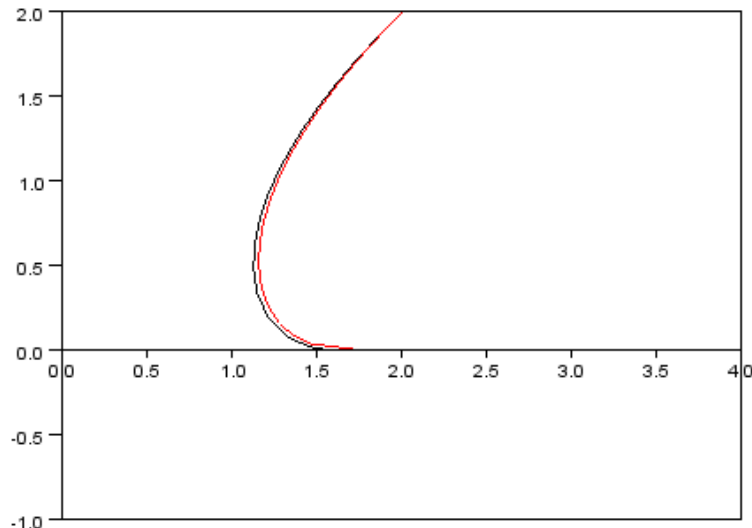
$$x = \frac{1}{2(m+1)} y^{m+1} + \frac{1}{2(m-1)} y^{-m+1} + B$$

où α et B sont deux constantes réelles à déterminer ($\alpha = A^m = \frac{A^m}{A^m}$ dans le texte en vis-à-vis).

En ajoutant, par exemple, les lignes suivantes (dans le cas : $N_0(2,2)$, $V_0(2,2)$, et $m=2/3$) aux codes précédents :

Code Scilab
<pre>function x=f(y) m=2/3 a=.6575230441 b=1.794112548 x=1/(2*(m+1)*a)*y^(m+1)+a/(2*(m-1))*y^(-m+1)+b endfunction y=linspace(0,2,50) x=f(y) plot2d(x,y,[5],axesflag=0,rect=[0,-1,4,2])</pre>

Nous obtenons en sortie graphique :

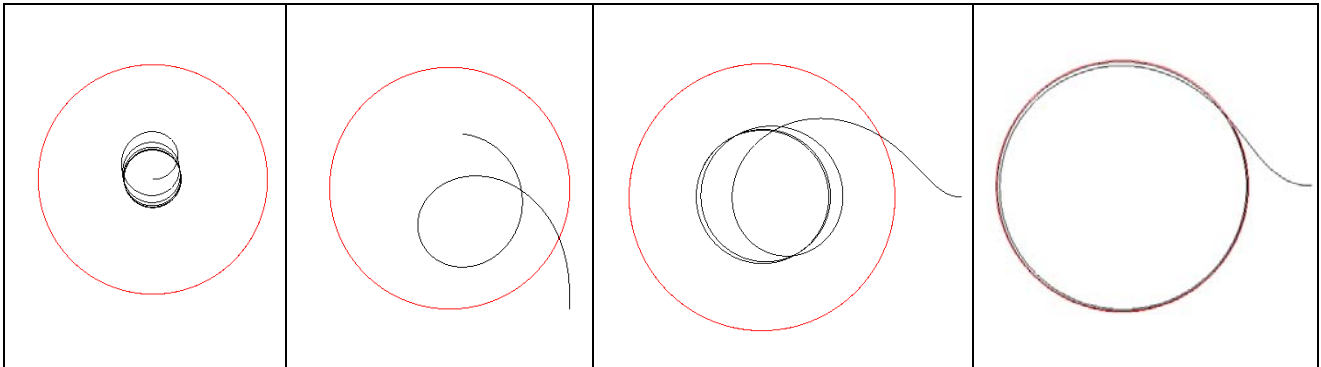


Graphique qui nous permet d'apprécier visuellement la qualité des approximations.

Bien d'autres exemples d'utilisation de fonctionnalités avancées, telles que des animations, auraient pu être présentées ici. Mais celles présentées couvrent déjà une part importante des programmes de lycée, à l'exception des probabilités et statistiques qui feront l'objet d'un prochain article.

Pour conclure, et pour le plaisir, un bon moyen de savoir si on a bien compris un algorithme ou assimilé un langage informatique est de le modifier : dès lors, quelle

serait l'allure d'une courbe de poursuite si le vaisseau poursuivi admet une trajectoire circulaire ?



Dans chacun de ces quatre cas, les courbes de poursuites ont été tracées pour différentes positions de départ du poursuivant et différents rapports de vitesses.

Bibliographie et sitographie :

- Mémoires de mathématiques et de physique de l'Académie Royale des Sciences, 1732 (disponible sur le site Gallica de la B.N.F.).
- A curve of pursuit, The American Mathematical Monthly, Vol. 28, N°2 (1921)
- The curve of pursuit, The Mathematical Gazette, Vol. 37 N°322 (décembre 1953)
- www.mathcurve.com.