

Le problème des rencontres

Le jeu de treize

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône

« L'esprit du Jeu n'est pas estimé pour ce qu'il vaut »
Fontenelle. *Éloge de M. de Montmort*

Mots clé : Jeu de rencontres, jeu de treize, probabilité, problème des chapeaux, De Montmort, Euler, nombre e , dénombrement, dérangement, permutation sans point fixe, crible de Poincaré, inversion de Pascal, jeu de hasard.

Résumé : Le jeu de rencontre (connu également sous le nom de jeu de treize ou, dans sa version moderne du nom de problème des chapeaux) formulé par De Montmort fut étudié par de nombreux mathématiciens : Euler, dont l'approche est présentée dans cet article, en fit partie.

La multiplicité des approches confère au problème un intérêt particulier, certaines sont présentées ici : en langage de permutations, de séries (problème de capes), de matrices ou d'ensembles.

1. Euler et le problème de de Montmort

L'Étude des Jeux était à l'aube du XVIII^e « *un vaste pays inculte, où à peine voyait-on cinq ou six pas d'hommes* » écrit Fontenelle dans son *Éloge de M. de Montmort*. « *Il s'y engagea, poursuit le secrétaire de l'Académie Royale des Sciences, avec un courage de Christophe Colomb, et en eut aussi le succès. Ce fut en 1703 qu'il donna son Essai d'Analyse des Jeux de Hasard, où il fit découvrir un nouveau Monde aux géomètres. Au lieu des courbes qui leur sont familières, des sections, des cycloïdes, des spirales, des logarithmiques, c'étaient le Pharaon, la Bassette, le Lansquenet, l'Ombre, le Trictrac, qui paraissaient sur la Scène assujettis au Calcul, et domptés par l'Algèbre* »

Parmi ces Jeux de hasard, le Jeu du Treize (ou problème des rencontres) et sa (ses) solution(s) connut une certaine fortune parmi les mathématiciens. De Moivre, Euler, Laplace après De Montmort s'y intéressèrent également.

« Les Joueurs tirent d'abord à qui aura la main. Supposons que ce soit Pierre, et que le nombre des Joueurs soit tel qu'on voudra. Pierre ayant un jeu entier composé de cinquante-deux cartes mêlées à discrétion, les tire l'une après l'autre, nommant et prononçant un lorsqu'il tire la première carte, deux lorsqu'il tire la seconde, trois lorsqu'il tire la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la treizième qui est un Roy. Alors si dans toute cette suite de cartes il n'en a tiré aucune selon le rang qu'il les a nommées, il paye ce que chacun des Joueurs a mis au jeu, et cède la main à celui qui le suit à la droite.

Mais s'il lui arrive dans la suite des treize cartes, de tirer la carte qu'il nomme, par exemple, de tirer un as dans le temps qu'il nomme un, ou un deux dans le temps qu'il nomme deux, ou un trois dans le temps qu'il nomme trois, et s'il prend tout ce qui est au jeu et recommence comme auparavant, nommant un, ensuite deux, etc.

Il peut arriver que Pierre ayant gagné plusieurs fois, et recommençant par un, n'ait pas assez de cartes dans la main pour aller jusqu'à treize, alors il doit, lorsque le jeu lui manque, mêler les cartes, donner à couper, et ensuite tirer du jeu entier le nombre de cartes qui lui est nécessaire pour continuer le jeu, en commençant par celle où il est demeuré dans la précédente main. Par exemple, si en tirant la dernière carte il a nommé sept, il doit en tirant la première carte dans le jeu entier, après qu'on a coupé, nommer huit, et ensuite neuf, etc. jusqu'à treize, à moins qu'il ne gagne plus tôt, auquel cas ils recommenceront, nommant d'abord un, ensuite deux, et le reste comme on vient de l'expliquer. D'où il paraît que Pierre peut faire plusieurs mains de suite, et même qu'il peut continuer le jeu à l'infini. »

La solution donnée par De Montmort est exacte mais n'est pas démontrée. L'auteur envisage les différents cas suivant le nombre de cartes dans le jeu. Si « l'argent du jeu est exprimé par A »,

Dans le cas de deux cartes, le « sort du Joueur sera $S = \frac{1}{2} A$ »

Dans le cas de trois cartes, le « sort du Joueur sera $S = \frac{2}{3} A$ »

Dans le cas de quatre cartes, le « sort du Joueur sera $S = \frac{15}{24} A$ »

Dans le cas de cinq cartes, le « sort du Joueur sera $S = \frac{76}{120} A$ »

De Montmort fait un simple dénombrement des cas de rencontres, il donne alors sans plus d'explications une formule pour le cas général ainsi qu'une table :

GENERALEMENT

Si l'on nomme S le sort que l'on cherche, le nombre des cartes que Pierre tient étant exprimé par p ; g le sort de Pierre, le nombre de cartes étant $p-1$, on aura

$$S = \frac{g \times p - 1 + d}{p}$$

Cette formule donnera tous les cas, ainsi qu'on les voit résolus dans la table ci-jointe.

T A B L E.

Si $p = 1$, on aura $S = A$.
Si $p = 2$, on aura $S = \frac{1}{2}A$.
Si $p = 3$, on aura $S = \frac{2}{3}A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{6}A$.
Si $p = 4$, on aura $S = \frac{5}{8}A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}A$.
Si $p = 5$, on aura $S = \frac{19}{10}A = \frac{1}{2}A + \frac{2}{15}A$.
Si $p = 6$, on aura $S = \frac{21}{144}A = \frac{1}{2}A + \frac{19}{144}A$.
Si $p = 7$, on aura $S = \frac{531}{840}A = \frac{1}{2}A + \frac{111}{840}A$.
Si $p = 8$, on aura $S = \frac{1641}{5760}A = \frac{1}{2}A + \frac{761}{5760}A$.
Si $p = 9$, on aura $S = \frac{18673}{45360}A = \frac{1}{2}A + \frac{5923}{45360}A$.
Si $p = 10$, on aura $S = \frac{18319}{44800}A = \frac{1}{2}A + \frac{5919}{44800}A$.
Si $p = 11$, on aura $S = \frac{1513123}{3991680}A = \frac{1}{2}A + \frac{527383}{3991680}A$.
Si $p = 12$, on aura $S = \frac{101786759}{479001600}A = \frac{1}{2}A + \frac{63285959}{479001600}A$.
Si $p = 13$, on aura $S = \frac{109339663}{172972800}A = \frac{1}{2}A + \frac{12853263}{172972800}A$.

Il sera facile à partir de cette table de déterminer la probabilité P d'une rencontre

Si $p = 1$ alors $P = 1 \cdot A$

Si $p = 2$ alors $P = 1 \cdot A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A$

Si $p = 3$ alors $P = A - (A - \frac{1}{2}A) - (\frac{1}{2}A - \frac{2}{3}A) = A(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3})$

Si $p = 4$ alors

$$P = A + (\frac{1}{2}A - A) + (\frac{2}{3}A - \frac{1}{2}A) + (\frac{5}{8}A - \frac{2}{3}A) = A(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4})$$

&c.

« Il reste pour expression du sort de Pierre cette suite très simple

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots$$

Euler reprit le problème étudié par de Montmort et y apporta sa propre solution, en notant que

« l'on peut supposer que ces deux personnes dont l'une soit nommée A, & l'autre B, aient chacune un certain & même nombre de billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4, 5 &c. & que chacune en tire un billet après l'autre, jusqu'à ce qu'elles rencontrent le

même numéro à la fois : & que ce soit la personne A qui gagne alors. Or s'il arrive, que ces deux personnes tirent tous leurs billets sans rencontrer jamais le même nombre, la personne B gagne.

Comme il est indifférent, de quel numéro chaque billet soit marqué, il est permis de supposer que A tire ses billets selon l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, &c. Ou pour faire l'application aux cartes on concevra les cartes de l'un & l'autre jeu tellement numérotées selon l'ordre comme elles sont tirées successivement par A : de sorte que Nr1 sera la carte que A tire la première, Nr 2. celle qu'il tire la seconde ; Nr 3. la troisième, & ainsi de suite. »

Euler envisage comme De Montmort, les cas où le nombre m de cartes est peu élevé. Si $m=1$, A gagne à coup sûr.

Si $m=2$, la probabilité pour A de gagner est égale à $\frac{1}{2}$.

Dans le cas $m=3$, Euler donne tous les tirages possibles :

A	B					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	2	1
3	3	2	3	1	1	2

« De ces 6 cas il y en aura donc deux, le premier & le second, qui feront gagner A, & où le jeu finit par conséquent au premier coup ; des quatre autres cas il n'y en a qu'un, savoir le cinquième, qui fera gagner A au second coup, & qui y finit le jeu. Parmi les trois cas il y a encore le troisième, qui fait gagner A au troisième coup. »

La probabilité pour le joueur A de gagner est donc de $\frac{2}{3}$.

Dans le cas $m=3$, Euler donne à nouveau dans un tableau tous les tirages possibles :

A	B																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2	2	2	3	3	4	4	3	3	4	4	1	1	4	4	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3
3	3	4	4	2	2	3	4	1	1	3	4	3	1	2	2	4	1	4	2	3	3	1	1	2
4	4	3	2	4	3	2	1	4	3	1	3	4	2	3	4	2	4	1	3	2	1	3	2	1

La probabilité pour le joueur A de gagner dans ce cas est de $\frac{15}{24}$ ou $\frac{5}{8}$.

Le cas $m = 5$ exclut, du fait de ses 120 permutations, la présentation des résultats sous forme de tableau ; le caractère heuristique de la recherche doit laisser place à une approche méthodique :

« il faut faire des remarques générales, qui nous puissent conduire à la connaissance des plus grands nombres de cartes, sachant déjà les probabilités pour les plus petits nombres ».

Euler entend trouver une relation liant la probabilité pour A de gagner lorsque le nombre de cartes est m en fonction des probabilités de gagner lorsque le nombre de cartes est plus petit.

Tout d'abord, Euler note que le nombre de tirages possibles pour m cartes est *« autant de fois que le produit 1.2.3..... m contient d'unités. »*

Appelant M ce nombre, il *« remarque en second lieu, qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas où la première carte tirée par B est 1 ; qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas où la première carte tirée par B est 2, & qu'il y aura autant de cas où la première carte de B est ou 3, ou 4, ou 5 &c. ou enfin m .*

De plus, si nous faisons abstraction, que le jeu finit aussitôt que B aura rencontré la carte de A, & que nous supposons qu'ils continuent à tirer leurs cartes jusqu'à la fin, quoiqu'il y fut arrivé une ou plusieurs rencontres, il est aussi clair, qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas, où la seconde carte de B sera 2 ; & autant de cas, où la troisième carte sera 3, ou la quatrième 4, ou la cinquième 5, ou la sixième 6, & ainsi de suite ».

Toutefois, des $\frac{M}{m}$ cas qui font gagner A au second coup, il faut ôter ceux qui le font gagner dès le premier (car dans ce cas, le jeu s'arrête) et du même nombre de cas $\frac{M}{m}$ qui font gagner A au troisième tirage, il faut ôter ceux qui le font gagner au premier et au second.

Euler recherche alors un procédé :

« Pour juger donc de combien il faut diminuer le nombre des cas favorables $\frac{M}{m}$ à chaque coup, ou pour en connaître le nombre de ceux qui ont déjà eu une rencontre dans quelque coup précédent, voilà comme je m'y prends. Je conçois que la carte qui se rencontre au coup proposé soit ôtée de l'un & de l'autre jeu, & l'ordre des cartes & le nombre des cas sera le même, que si le nombre des cartes était d'une unité moindre. »

L'exemple du cas $m=4$ lui indique que des 24 tirages possibles, le 3 sort au troisième coup dans les cas 1, 6, 10, 12, 20, 21 ; en ôtant des ces tirages le n°3, il vient la table :

A	B
1	1 2 4 4
2	2 4 1 4
4	4 2 4 1

De ces cas où le 3 apparaît en 3^e position « il en faut retrancher ceux qui ont déjà eu une rencontre, ou dans le premier coup, ou dans le second ; il est clair que ce nombre à retrancher se trouve des cas de trois cartes, en ajoutant ensemble les cas, où A gagnerait alors au premier coup & au second. »

Il poursuit : « En général donc, si le nombre des cartes est $= m$ qu'on veuille savoir de combien il faut diminuer le nombre de cas $\frac{M}{m}$, qui ont une rencontre à un coup quelconque ; il faut avoir recours au nombre des cartes $= m-1$, & en chercher les cas, qui feraient gagner A à quelqu'un des coups précédents, & le nombre de tous ces cas ensemble sera celui dont il faut diminuer le nombre $\frac{M}{m}$, pour avoir le nombre de cas, qui feront gagner actuellement A à un coup proposé. »

Soit alors a , (respectivement b, c, d, e) le nombre de cas qui font gagner A au premier coup (respectivement second, troisième, quatrième et cinquième) lorsque le jeu possède 3 cartes.

On a évidemment $a = \frac{M}{m}$ (c'est-à-dire $\frac{m!}{m}$).

De même si le jeu possède $m+1$ cartes en notant de manière analogue a' , (respectivement b', c', d', e') le nombre de cas qui font gagner A au premier coup (respectivement second, troisième, quatrième et cinquième) lorsque le jeu possède 3 cartes, on aura :

$$a' = \frac{M+1}{m+1} \text{ (càd } \frac{(m+1)!}{m+1}) \quad \text{et}$$

« en continuant le jeu, nonobstant les rencontres déjà arrivées, il y aura M cas aussi, où arriverait une rencontre au second coup : mais de ceux-ci il faut exclure ceux qui ont déjà eu une rencontre au premier coup ; & ce nombre étant $= a$, comme nous avons vu [ci-dessus], nous aurons $b' = M - a$, pour le nombre des cas, qui, font actuellement gagner A au second coup. »

De manière analogue, Euler établit
et plus généralement

$$\begin{aligned} c' &= M - a - b \\ a' &= M \\ b' &= M - a \\ c' &= M - a - b \\ d' &= M - a - b - c \end{aligned}$$

ces relations permettent à partir des calculs faits pour les cas $m=1, 2, 3$ de dresser le tableau suivant :

NOMBRE DES CARTES										
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
<i>a</i>	I	I	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
<i>b</i>	-	0	I	4	18	96	600	4320	35280	322560
<i>c</i>	-	-	I	3	14	78	504	3720	30960	387280
<i>d</i>	-	-	-	2	11	64	426	3216	27240	256320
<i>e</i>	-	-	-	-	9	53	362	2790	24024	229080
<i>f</i>	-	-	-	-	-	44	309	2428	21234	205056
<i>g</i>	-	-	-	-	-	-	265	2119	18806	183822
<i>h</i>	-	-	-	-	-	-	-	1854	16687	165016
<i>i</i>	-	-	-	-	-	-	-	-	14833	148329
<i>k</i>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	133496

À la différence du triangle de Pascal, chaque nombre n'est pas la somme de celui qui est au-dessus et de celui qui le précède, mais est égal à leur différence : le "triangle d'Euler" est alors très simple à compléter. (la première ligne étant celle des factorielles).

Il ne reste alors plus qu'à sommer les colonnes pour déterminer le nombre de rencontres en fonction du nombre de cartes dans le jeu.

L'activité ne manquerait pas d'intérêt dans une classe. Il manquera toutefois toujours au tableur l'intelligence du mathématicien et son ingéniosité, celles-là même qui poussèrent Euler à en trouver une expression simple.

Euler note : "si pour le nombre des cartes m , le nombre des cas qui font gagner A à un certain coup est p ; & le nombre des cas qui le font gagner au même coup, si le nombre des cartes est $= m+1$, soit $= q$, & le nombre des cas qui le font gagner au coup suivant $= r$ le nombre des cartes demeurant $m+1$, on aura toujours $r = q - p$.

Donc pour le nombre des cartes $= m$, le nombre de tous les cas étant $= 1, 2, 3...m = M$, l'espérance de A de gagner à un certain coup sera $= \frac{p}{m}$, que je nommerai $= P$.

Or pour le nombre des cartes $= m+1$, le nombre de tous les cas étant $= M(m+1)$, l'espérance de A de gagner au même coup sera $= \frac{q}{M(m+1)}$, qui soit posée $= Q$, &

l'espérance de gagner au coup suivant $= \frac{r}{M(m+1)}$ qui soit $= R$. Cela posé on aura

$$R = \frac{q-p}{M(m+1)} \text{ ou bien } R = Q - \frac{P}{m+1}$$

Ainsi

« Donc posant le nombre des cartes $= n-1$; puis que l'espérance de A de gagner au premier coup est $= \frac{1}{n-1}$; pour le nombre des cartes $= n$, l'espérance de A de gagner

$$\text{au second sera} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-2}{(n-1)n}.$$

Or l'espérance de A de gagner au second coup, que le nombre des cartes est $= n-1$ étant $= n$; nous en concluons, que lorsque le nombre des cartes est $= n$, son espérance de gagner au troisième coup sera

$$= \frac{n-2}{(n-1)n} - \frac{n-3}{(n-2)(n-1)n} = \frac{n^2 - 5n + 7}{(n-2)(n-1)n} = \frac{(n-2)^2 - (n-2)}{(n-2)(n-1)n}$$

il poursuit

« Pour peu qu'on réfléchisse sur la forme de ces formules, on trouve que le nombre des cartes étant $= n$, l'espérance de A de gagner sera

$$\text{au premier coup} = \frac{1}{n}$$

$$\text{au deuxième coup} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\text{au troisième coup} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n \cdot n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{au quatrième coup} = \frac{1}{n} - \frac{3}{n \cdot n(n-1)} + \frac{3}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\text{au cinquième coup} = \frac{1}{n} - \frac{4}{n \cdot n(n-1)} + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} - \frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$\text{au sixième coup} = \frac{1}{n} - \frac{5}{n \cdot n(n-1)} + \frac{10}{n \cdot n(n-1)(n-2)} - \frac{10}{n \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{5}{n \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} - \frac{1}{n \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$$

&c.

Carte Rencontre	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
1 ^{er} tirage	$(n-4)!$	$(n-3)!$	$(n-2)!$	$(n-1)!$
2 nd tirage		$(n-3)! - (n-4)!$	$(n-2)! - (n-3)!$	$(n-1)! - (n-2)!$
3 ^e tirage				$(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$

L'espérance pour A de gagner au troisième coup sera, pour un jeu de n cartes

$$\frac{(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!}{n!} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

finaleme

« L'espérance de A de gagner en général quelque coup que ce soit, sera exprimée par la somme de toutes ces formules prises ensemble. »

Euler somme alors suivant les colonnes :

La somme de la première vaut tout simplement $n \times \frac{1}{n} = 1$.

La somme de la seconde est égale à $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{1 \cdot 2}$.

La somme de la troisième fait apparaître la somme des nombres triangulaires :

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

elle vaut donc $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Et Euler de poursuivre :

« la somme des quatrièmes = $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ des cinquièmes = $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ & ainsi de suite.

De là il s'ensuit donc, que

le nombre des cartes étant	l'espérance de gagner de A fera
1	1
2	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2}$
3	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
4	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
5	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$
6	$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

prenant de cette suite toujours autant de termes, qu'il y a de cartes.»

Prenant le cas limite $n = \infty$, Euler en conclut que l'espérance de gagner de A sera $1 - \frac{1}{e}$ et celle de B $\frac{1}{e}$.

Si l'ensemble du texte d'Euler pourrait être abordé en lycée sous forme d'activité guidée, la fin de celui-ci et l'étude de la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ demandera une autre activité particulière qu'un sujet de bac proposait il y a quelques années.

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$.

2. On considère la suite réelle (a_n) , définie sur $\mathbf{R}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Si une multiplicité de mathématiciens se sont intéressés au jeu de Treize, une multiplicité d'approches mènent à la solution, en voici quelques-unes.

2. Le langage des permutations :

On appelle dérangement toute permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ qui n'admet aucun point invariant. Soit d_n le nombre de ces dérangements.

Considérons un dérangement de $\{1, 2, \dots, n\}$, il peut s'écrire sous la forme $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ avec $\alpha_1 \neq 1$. α_1 est donc l'une des $n-1$ valeurs $2, 3, \dots, n$.

Supposons que $\alpha_1 = 2$.

Nous pouvons avoir $\alpha_2 = 1$ ou $\alpha_2 \neq 1$.

Si $\alpha_2 = 1$, la permutation s'écrit $\{2, 1, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ où $\{\alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ est l'un des d_{n-2} dérangements des entiers $\{3, 4, \dots, n\}$.

Si $\alpha_2 \neq 1$ alors $\{ \alpha_2, \dots, \alpha_n \}$ est l'un des d_{n-1} dérangements de $\{1, 3, \dots, n\}$.

Nous en déduisons donc la formule de récurrence :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \text{ pour } n \geq 3 \quad \text{et} \quad d_1 = 0, d_2 = 1$$

Ces valeurs nous permettent de calculer de proche en proche celles de d_n et la relation permet de trouver une expression simple de d_n (voir ci-dessous¹).

Soit $p_n = \frac{d_n}{n!}$, la probabilité qu'une permutation à n éléments soit un dérangement,

nous avons

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{d_n}{n!} = \frac{(n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})}{n!} \\ &= (n-1) \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{d_{n-2}}{(n-2)!} \right] \\ &= (n-1) \left[\frac{p_{n-1}}{n} + \frac{1}{n(n-1)} p_{n-2} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{n}(p_{n-1} - p_{n-2})$$

soit alors (v_n) la suite de terme général $v_n = p_n - p_{n-1}$

(v_n) vérifie $v_n = -\frac{1}{n}v_{n-1}$ ou encore $v_n = \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)v_{n-2}$

et par une récurrence immédiate $v_n = (-1)^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) \dots \frac{1}{3} \cdot v_2$

et comme $v_2 = p_2 - p_1 = \frac{d_2}{2!} - \frac{d_1}{1!} = \frac{1}{2}$

Il vient finalement $v_n = (-1)^n \frac{1}{n!}$

Maintenant, nous avons la somme

$$\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n (p_k - p_{k-1}) = p_n - p_0$$

et donc $p_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

que l'on peut également écrire sous la forme :

$$p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

¹ Notons dans un tableau les nombres R_n de parties avec rencontres et d_n de parties sans rencontres.

Nombre de cartes	Parties avec Rencontres R_n	Parties sans Rencontres d_n
1	1	0
2	1	1
3	4	2
4	15	9
5	76	44
6	455	265

Une règle simple de formation des termes de ces suites peut être trouvée :

$$R_n = nR_{n-1} + (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

La formule donnant D_n s'établit par une simple récurrence à partir de la relation donnée plus haut.

3. Le langage des séries :

Vieux problème, le problème des dérangements demeure d'actualité, puisqu'il faisait l'objet d'une partie du second problème du CAPES 2010 dont le thème général était l'étude des séries génératrices et leurs diverses applications.

Voici la partie sur les dérangements :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Un dérangement de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est une permutation $\sigma \in S_n$ sans point fixe c'est-à-dire telle que pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$. On note d_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

On pose $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $p_n = \frac{d_n}{n!}$

1. Calculer d_1, d_2, d_3

2. a) Pour $0 \leq k \leq n$, on note B_k l'ensemble des permutations de S_n ayant exactement k points fixes.

Montrer que le cardinal de B_k vérifie l'égalité $\text{Card}(B_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$ et en déduire

que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$$

Une permutation de B_k possédant k points fixes, il y a donc $\binom{n}{k}$ façons de choisir les points fixes, ces points étant choisis, il reste alors $n - k$ éléments qui ne sont pas fixes et qui définissent un dérangement de $n - k$ éléments, le nombre de ces dérangements étant par définition d_{n-k} , il y aura donc $\binom{n}{k} \times d_{n-k}$ permutations de S_n laissant k points fixes (la formule restant vraie pour $k = n$)
 La famille (B_k) ($0 \leq k \leq n$) forme une partition de S_n (une permutation ne pouvant appartenir à deux ensembles B_k distincts) on a donc $\sum_{k=0}^n \text{card}(B_k) = \text{Card}(S_n)$

$$\text{c'est-à-dire } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$$

$$\text{en posant } p = n - k \quad \sum_{p=0}^n \binom{n}{n-p} d_p = n! \text{ ou } \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} d_p = n!$$

2. b) Soit P la série génératrice de la suite (p_n) . Montrer que

$$E(X) \times E(Y) = \sum_{n \geq 0} X^n \text{ où } E(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n.$$

On sait que le terme général de la série génératrice du produit $E(X) \times P(Y)$ est

$$c_n = \sum_{k=0}^n p_k \times \frac{1}{(n-k)!}$$

par définition du produit.

$$\begin{aligned} \text{On a donc } c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \times \frac{d_k}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \times d_k \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times d_k = \frac{n!}{n!} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{et donc } E(X) \times E(Y) = \sum_{n \geq 0} X^n$$

2. c) Déterminer la série génératrice inverse de $E(X)$

$$\text{Supposons que } E(X)^{-1} \text{ existe, il s'écrit } E(X)^{-1} = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$$

$$\text{Le produit } E(X) \times E(X)^{-1} \text{ admet pour terme général } c_n = \sum_{k=0}^n b_k \times a_{n-k}$$

et donc

$$1 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \text{ et donc puisque } c_1 = 0 ; b_1 = a_0^{-1}(a_1 b_0)$$

(Ce qui montre que le terme général d'une série génératrice doit être non nul pour que celle-ci soit inversible).

Dans le cas présent $a_k = \frac{1}{k!}$, on établit alors sans peine que

$$b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = \frac{1}{2!}, b_3 = -\frac{1}{3!}$$

et l'on peut raisonnablement supposer que $b_k = \frac{(-1)^k}{k!}$.

Une récurrence permet d'établir le résultat.

En effet,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \times b_{n-k} \\ &= -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \times \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

2. d) En déduire que
$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

On a
$$P(X) = \left(\sum_{n \geq 0} X^n \right) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} X^k \right)$$

série dont le terme général p_n est donné par $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \times 1$

et donc
$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

4. Le langage des matrices

Soit Φ l'endomorphisme de $P_n[X]$ défini par $\Phi(P) = P(X+1)$.

Dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, Φ admet pour matrice

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Le terme général étant $\alpha_{i,j} = \binom{j}{i}$, cette matrice est appelée matrice de Pascal triangulaire supérieure, il en existe deux autres U_n et P_n respectivement triangulaire inférieure et symétrique dont les coefficients sont également les coefficients binomiaux.

On a : $(d_0, d_1, \dots, d_n) L_n = (0!, 1!, 2!, \dots, n!)$

Comme L_n est triangulaire supérieure avec les éléments diagonaux tous égaux à 1, elle est inversible et donc :

$$(d_0, d_1, \dots, d_n) = (0!, 1!, 2!, \dots, n!) L_n^{-1}$$

La détermination de L_n^{-1} se fait sans peine, on a

$$(1, X, \dots, X^n) L_n = (1, (1+X), (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$$

et donc

$$(1, X, \dots, X^n) = (1, (1+X), (1+X)^2, \dots, (1+X)^n) L_n^{-1}$$

comme

$$X^p = (1+X-1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (1+X)^k$$

décomposition de X^p dans la base, $(1+X)^k$ (pour $k=0, \dots, n$), on en déduit alors :

$$L_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{i,j} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j} \binom{j}{i}$ (pour $i \leq j$)

Propriété : (formule d'inversion de Pascal)

Si $a_p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} b_k$

alors $b_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k$

De l'égalité $(d_0, d_1, \dots, d_n)L_n = (0!, 1!, 2!, \dots, n!)$

il vient
$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$$

et d'après la formule d'inversion de Pascal

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

et en posant $p = n - k$

$$d_n = n! \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!}$$

5. Le langage des ensembles

La formule du crible de Poincaré fournit une réponse ensembliste au problème des dérangements.

Soit $A = \{1, 2, \dots, n\}$ et A_i l'ensemble des permutations laissant i invariant.

Le nombre des dérangements de A , n'est autre que le cardinal de l'ensemble des permutations ne laissant aucun entier invariant c'est-à-dire

$$\text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = n! - \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

On a
$$\text{Card}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Une permutation laissant p éléments fixes est complètement déterminée par celle qui échange les $n - p$ autres, par conséquent

$$\text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n - k)! \quad !$$

et
$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{k} (n - k)! = \frac{n!}{k!}$$

et donc
$$\text{Card}(\cup_{i=1}^n A_i) = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

et
$$\text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = n! (1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!})$$

c'est-à-dire
$$d_n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}.$$