Patrons et Economie

Michel LAFOND,

Mots clé : Cube, découpages, minimum, patron.

Résumé : Une étude des « patrons » du cube axée sur l'économie de papier…

Ici, l'économie est celle du papier et les patrons sont plus souples que dans la réalité.
Tout le monde a construit un cube à partir d'un rectangle de papier ou de carton, il est donc naturel de se poser la question suivante :

Trouver un rectangle de surface minimale dans lequel on puisse découper un patron du cube unité.

Ce problème figure sous la référence D431 sur le site diophante.fr.
Il a été posé par Lucien Pianaro dans « Jouer Jeux Mathématiques n°8 ».
L'auteur affirme que le rectangle minimum a une aire égale à 189/26, mais en l'absence d'une définition précise de PATRON, on va voir que la réponse est loin d'être aussi simple.

Une remarque avant d'entamer le débat :
La surface latérale du cube unité ayant une aire égale à 6, on a déjà une borne inférieure aux aires des rectangles contenant un patron du cube. Le rectangle de Lucien Pianaro a une aire d'environ 7,27.

A. Une définition provisoire de « PATRON »

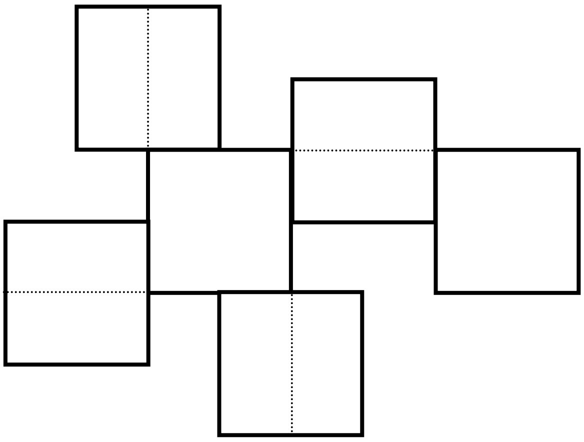
Disons qu'un patron (on ne répètera pas qu'il s'agit du cube unité) est une ligne polygonale fermée délimitant un intérieur pas nécessairement convexe, mais connexe et qui, après un nombre fini de pliages (rotations autour de segments) permet d'obtenir exactement le cube unité complet.

Il est essentiel que le pliage soit physiquement réalisable, sans faire appel au scotch et donc la contrainte de connexité est indispensable. Sinon un rectangle de 2×3 découpé en 6 carrés unité ferait l'affaire. La version papier du patron sera donc en un seul morceau.

Par ailleurs les contraintes de la définition sont minimales : il n’est pas imposé que l’aire du patron soit égale à 6 ce qui autorise implicitement les recouvrements lors des pliages (et on ne s’en privera pas).
Il n’est pas non plus imposé que le patron soit une réunion de carrés unité. Une face pourra donc être « éclatée » en plusieurs morceaux dans le patron pour former un carré unité seulement après pliages.

Nommons PATRON CLASSIQUE la réunion connexe de six carrés unité, sans recouvrement et connectés par des côtés entiers (aussi appelée hexamino comme extension de domino).
Dans les patrons classiques, la connexion doit se faire par côtés entiers pour éviter les situations comme celle de la figure 1 ci-dessous dans laquelle les pliages se font aux contacts des carrés gras et selon les pointillés :

Figure 1

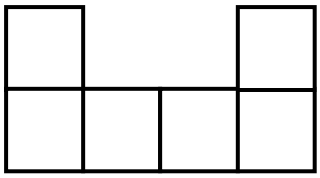


Remarquons qu’après les pliages, quatre des faces du cube sont éclatées en deux morceaux.

B. Examen des patrons classiques

Il est bien connu, et c’est un bon exercice pour les élèves, qu’il y a exactement 11 patrons (classiques) du cube. Nous admettrons ce résultat démontrable en examinant les 35 hexaminos, et en rejetant ceux qui ne conviennent pas.

Ceci n’est pas un patron :



Un bon exercice pour les plus grands est de trouver les 54 patrons du pavé droit (parallélépipède rectangle).
Donnons en figure 2, pour chacun de ces 11 patrons, l’aire du « plus petit » rectangle le contenant.

Cela donne lieu à 11 exercices de géométrie-analyse-trigonométrie intéressants, dont un, représentatif, est traité en annexe.

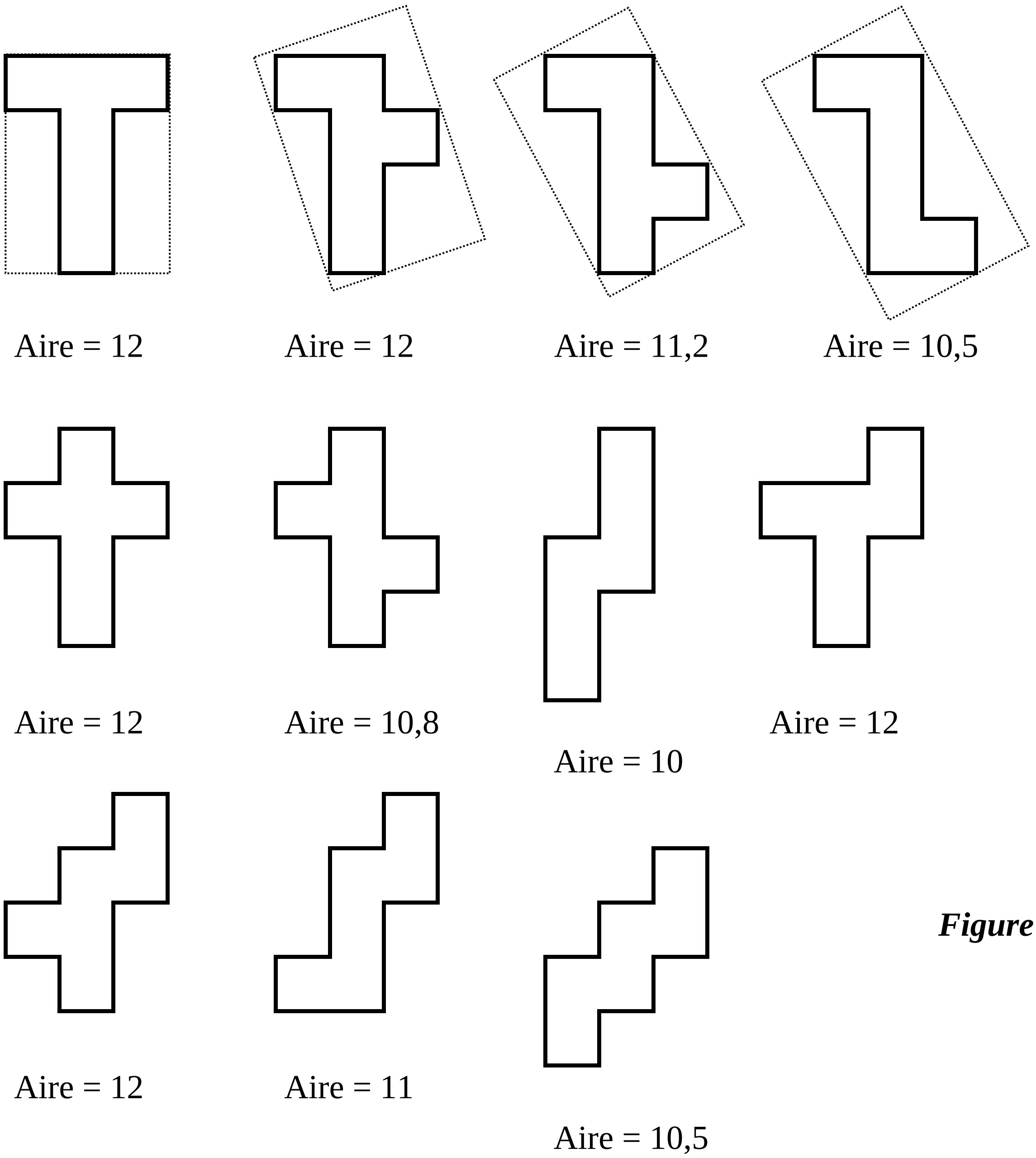


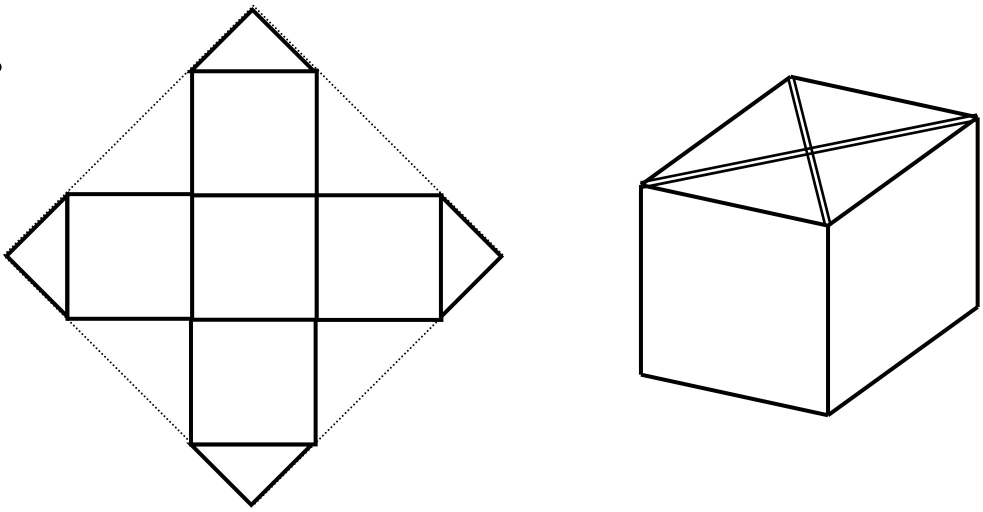
Figure 2

Comme on le constate, ce n’est pas dans le classique qu’il faut aller chercher un patron économique.
Avec eux, le mieux que l’on puisse faire est un rectangle d’aire 10. On n’a d’ailleurs pas le choix.
Regardons alors ce qui se passe lorsqu’on éclate les faces.

C. Quelques patrons dans des rectangles d'aire 8

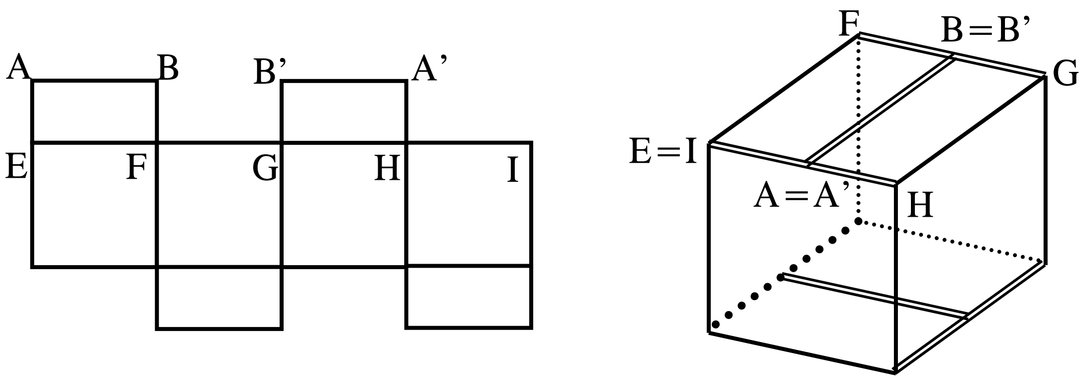
Une idée qui paraît excellente, est de choisir pour rectangle un carré avec le patron ci-dessous, qui après pliage donne un cube avec 5 faces entières et une face éclatée en quatre triangles :

Figure 3



L'aire du carré est égale à $(2\sqrt{2})^2 = 8$, c'est nettement mieux que 10 pour le patron classique vu en B) mais encore loin du minimum théorique 6.
Il y a bien d'autres exemples de rectangles d'aire 8, et l'un d'eux (figure 4) est particulièrement intéressant car c'est celui qui débouche, après quelques manipulations géométriques, au record 189/26 de Lucien Pianaro.

Figure 4

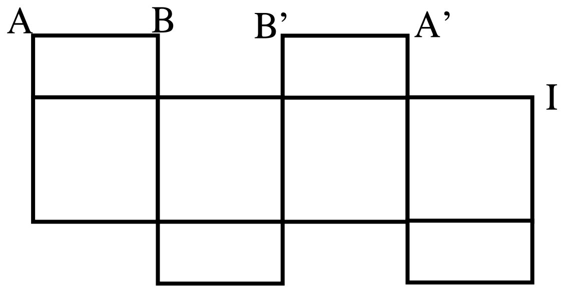


Ici, après pliage, on a un cube avec 4 faces entières et 2 faces éclatées en deux rectangles.

D. Amélioration de la figure 4 pour aboutir à une aire de 189/26 < 8

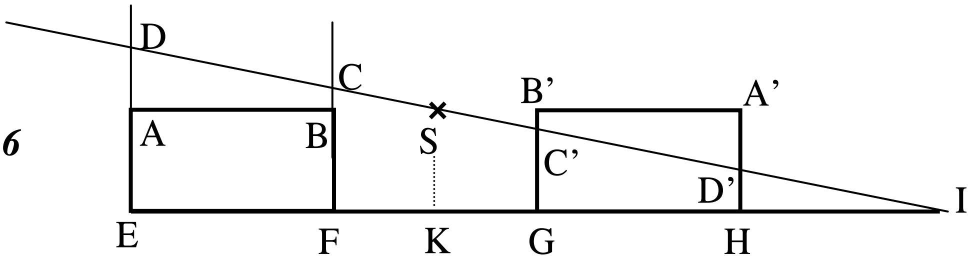
On va procéder en deux temps :

Figure 5



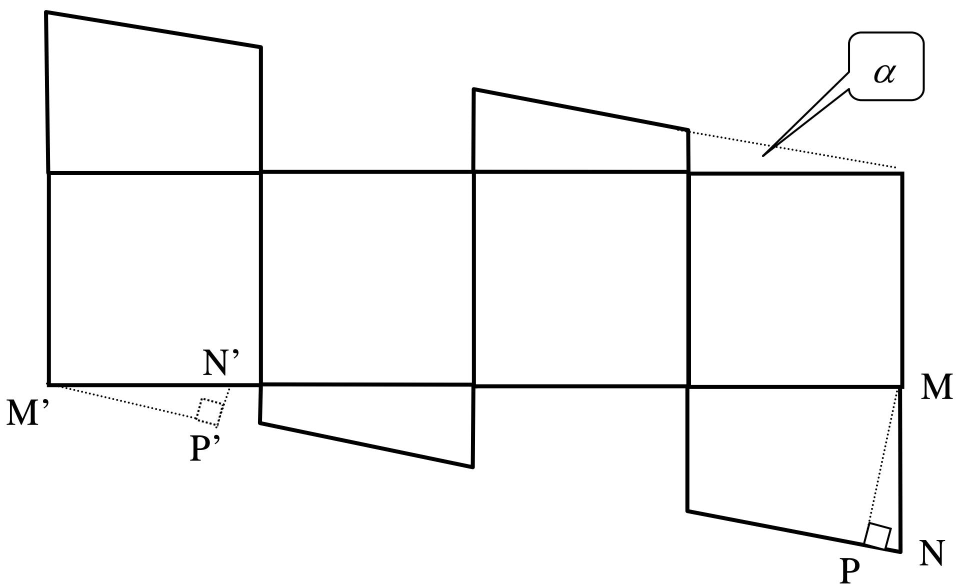
Dans le pliage du patron de la figure 5, A vient en A' et B vient en B'. Cela se traduit par une symétrie centrale dont le centre est le milieu S de [BB']. Cette symétrie échange les deux rectangles supérieurs. (Voir la figure 6 ci-dessous qui représente le haut de la figure 5).

Figure 6



Dans un premier temps, joignons IS (figure 6) et remplaçons le trapèze [A'B'C'D'] par son symétrique [ABCD]. La face supérieure du cube, qui dans la figure 4 était composée des deux rectangles, sera maintenant composée des deux trapèzes inégaux [C'D'HG] et [EFCD].
En procédant de même pour la partie basse de la figure 4, on aboutit au patron visible ci-dessous :

Figure 7



S'il y a des sceptiques, faites comme moi : construisez ce patron en papier ou en carton.

L'angle α a une tangente égale à KS / KI = 1 / 5 [Voir figure 6].

On tire : $\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{26}}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{26}}$. Avec MN = 4 $\tan(\alpha)$ = 4/5, on trouve facilement l'aire du parallélogramme contenant le patron de la figure 7, cette aire vaut 36 / 5 = 7,2. On progresse…

En effet, ce parallélogramme n'est pas un rectangle mais on va en faire un rectangle dans un deuxième temps en remarquant ceci :

Lors du pliage du patron de la figure 7, M se transforme en M' et N se transforme en N'. Le triangle [MPN] rectangle en P peut donc être déplacé et mis en [M'P'N']. En procédant symétriquement pour la partie Nord de la figure 7, on aboutit au curieux patron visible ci-dessous dans la figure 8, facile à construire à partir des données précédentes :

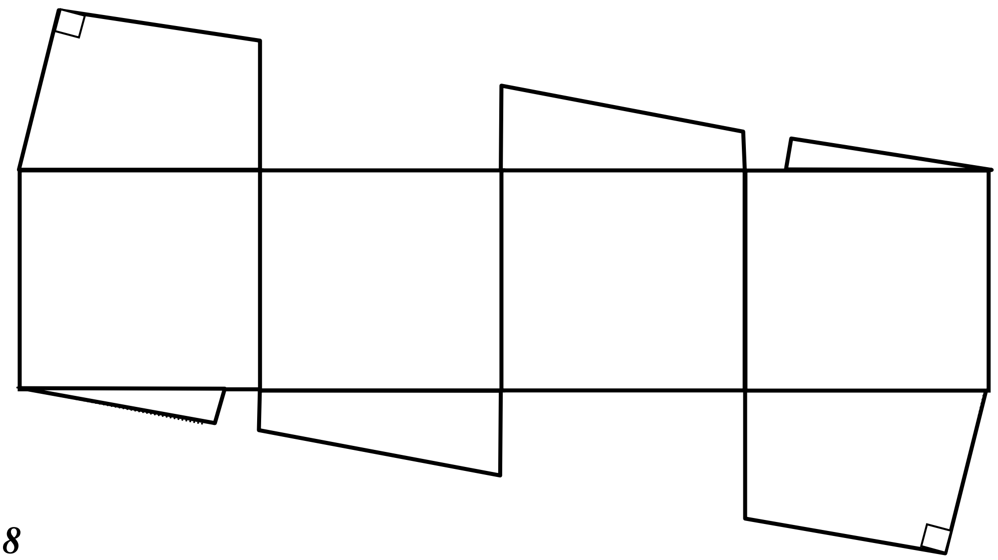


Figure 8

Calculons l'aire du rectangle minimal contenant ce patron (en pointillé dans la figure 9) :

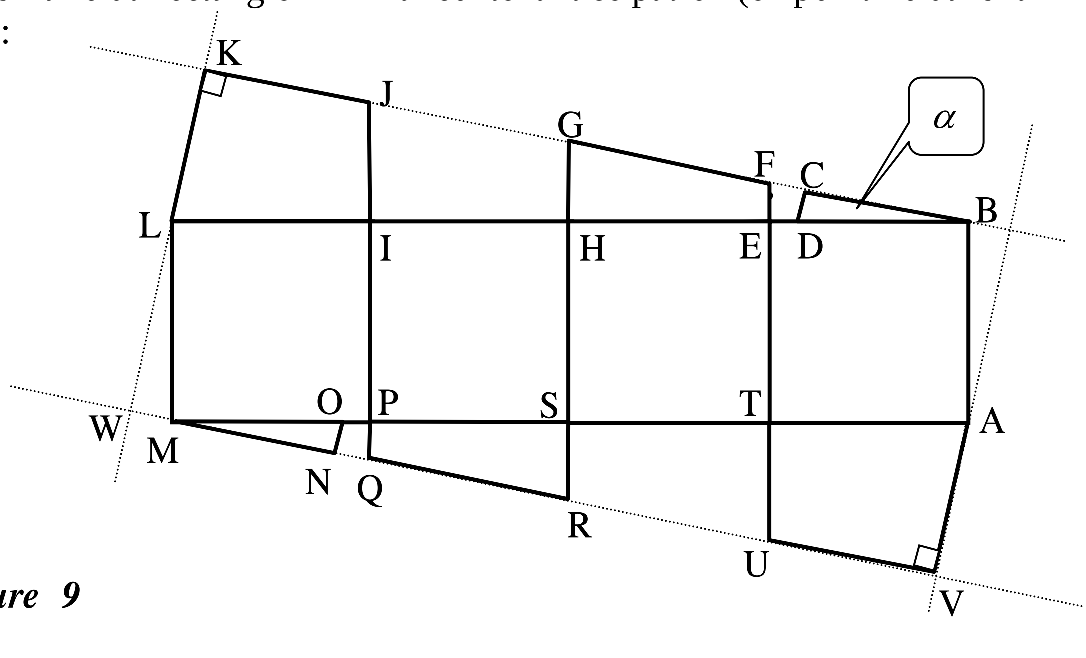


Figure 9

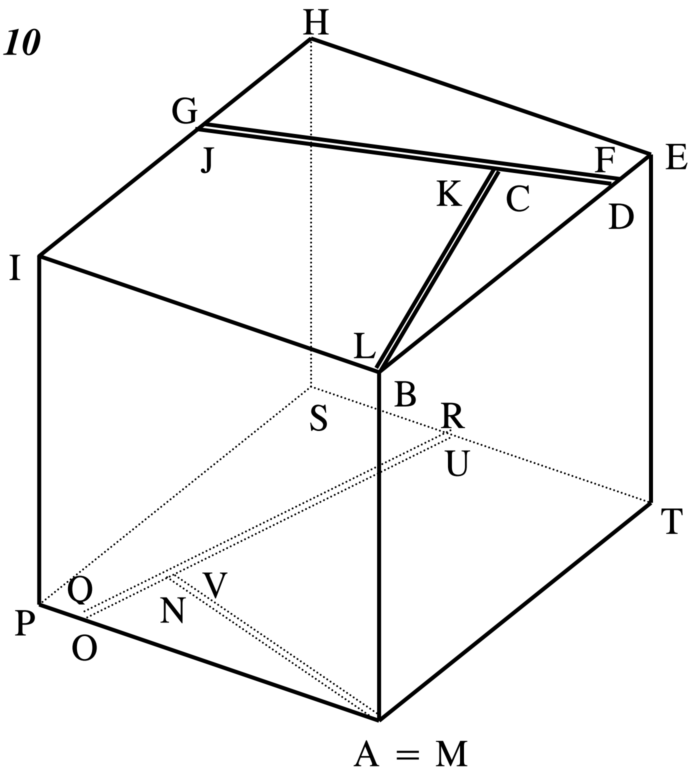
À partir de $\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{26}}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{26}}$ on obtient facilement :

- la longueur VM + MW $= 4\cos(\alpha) + \sin(\alpha)$
- la largeur KL + LW $= 4\sin(\alpha) + \cos(\alpha)$

D'où l'aire
$4\cos^2(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) + 17\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 4 + 17\times 5 / 26 = 189 / 26 \approx$ **7,27**.

On retrouve tous les points de la figure 9 dans le cube associé après pliage, sur la figure 10 ci-dessous.
Bien entendu, les pliages font qu'à la fin certains points sont confondus, il s'agit de :
F = D, B = L, M = A, O = Q, G = J, R = U, V = N.

Figure 10



Jusque là, on n'a pas exploité le recouvrement lors des pliages. Comme le recouvrement « gaspille » de la surface, cela semble bizarre d'y faire appel, et pourtant :

E. Une meilleure solution. La preuve par 7.

Les 4 schémas ci-dessous montrent un rectangle d'**aire 7** qui, à l'aide de 8 plis, permet d'obtenir un cube unité entier.
Le rectangle-patron (figure 11-1) est tout simplement une bande de longueur 7 et de largeur 1.
Les pliages (figures 11-2 et 11-3) sont effectués le long des 6 côtés communs et de 2 diagonales.

Figure 11-1

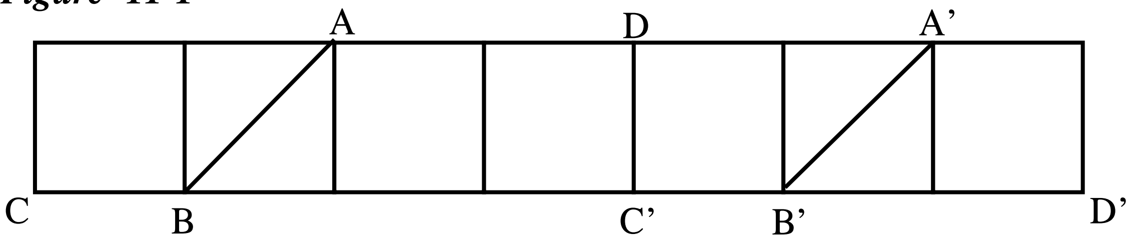


Figure 11-2

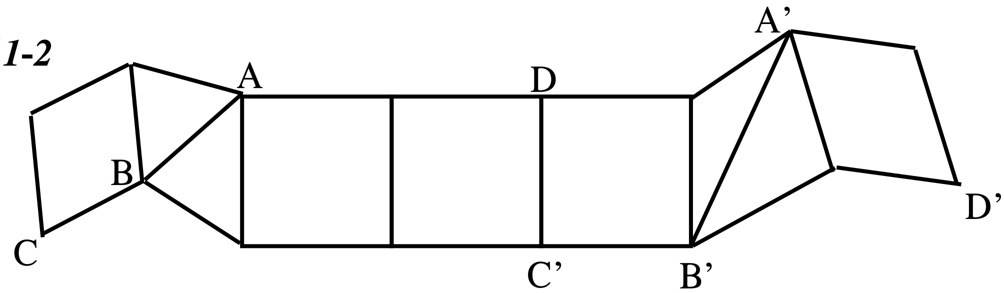
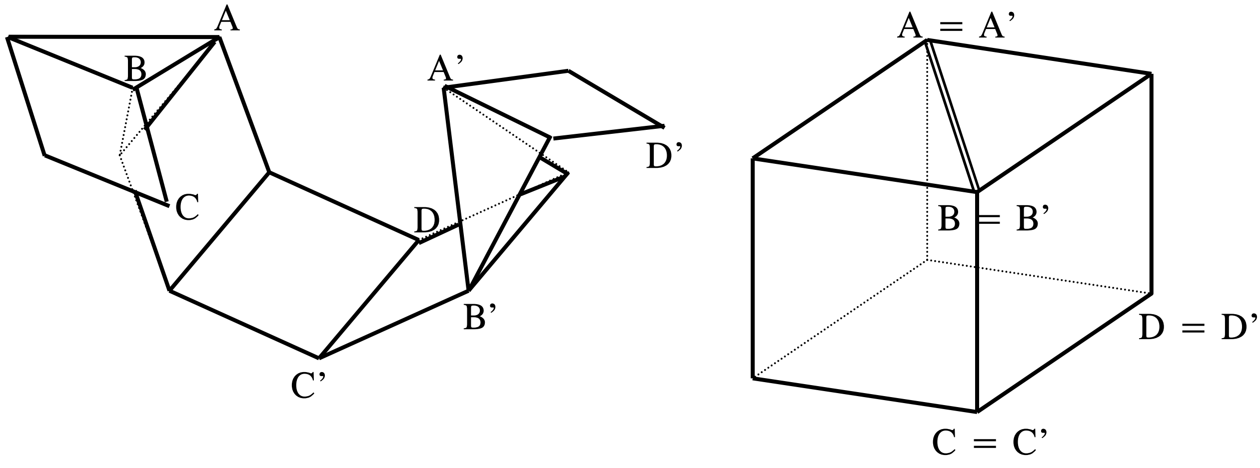


Figure 11-3



La face supérieure du cube, non seulement est éclatée, mais elle a une double épaisseur.

F. On s’approche de l’optimum.

On a bien progressé : passant d’une aire égale à 10 dans le meilleur des cas avec les patrons classiques, à une aire égale à 8 en éclatant certaines faces, puis à une aire égale à 7,27 avec un peu de chirurgie, et enfin à une aire égale à 7 en utilisant le recouvrement.
Mais, une imprécision dans la définition d’une ligne polygonale fermée va encore permettre une amélioration considérable, puisqu’on va trouver des rectangles d’<u>aires aussi proches de 6 qu’on le souhaite</u> !

En effet, examinons une bande de plusieurs carrés unité accolés et se terminant par un rectangle comme le montre la figure 12-1 ci-dessous :

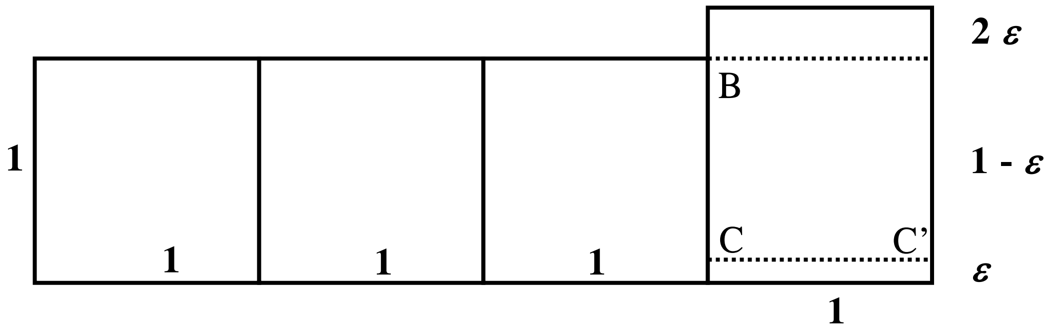


Figure 12-1

Le rectangle de droite a pour dimensions 1 et 1 + 2 ε.

Réalisons une « coupure » selon le segment [BC] de la figure 12-1.
Avec une version papier, la coupure se réalise avec une paire de ciseaux ou un cutter pour les plus audacieux. Mathématiquement, tout ce qu'on souhaite est un pliage du rectangle selon le segment [CC'].

La coupure se réalise mathématiquement en disant que la ligne polygonale fermée réalisant le patron est dorénavant la ligne [A **B C D** E F G A] de la figure 12-2 dans laquelle le segment [BC] est doublé.
C'est bien une ligne polygonale fermée qui délimite sans ambiguïté un intérieur connexe.
La nouveauté est que deux segments de la ligne ont une partie commune. Mais ce n'était pas interdit…
La découpe selon [BC] est permise puisque dans l'énoncé, le patron doit être « découpé » dans le rectangle sans plus de précision.

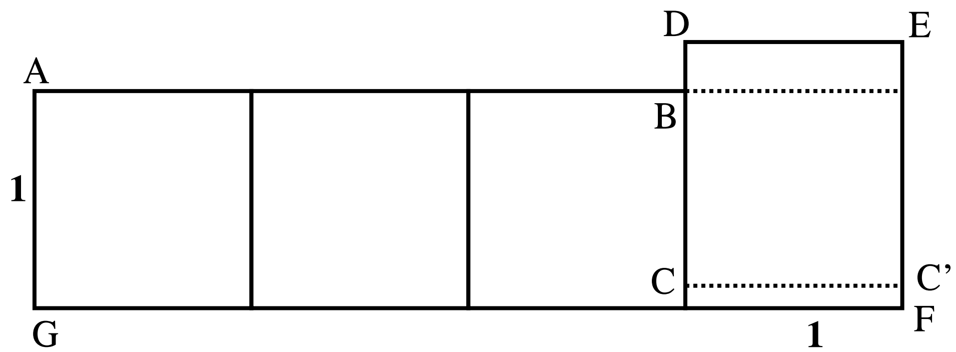


Figure 12-2

La coupure permet un premier pliage selon [CC’] pour aboutir à la figure 12-3 ci-dessous :

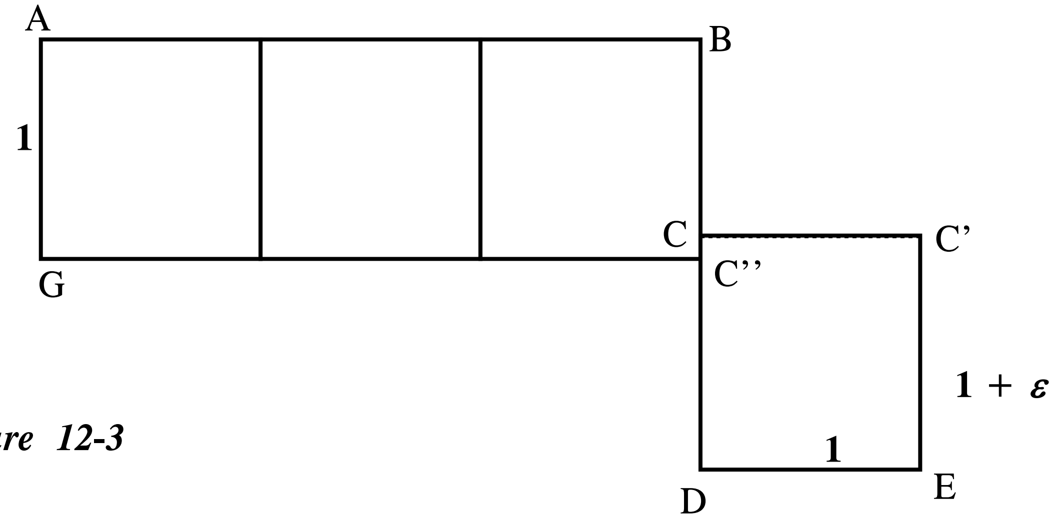


Figure 12-3

Le segment [CC’’] n’a pas été coupé (connexité oblige) donc, on peut plier le rectangle de la figure 12-3 selon le petit segment [CC’’] pour aboutir à la figure 12-4 qui est composée de 4 carrés unité, dont une bande rectangulaire de dimensions $1 \times (\varepsilon)$ en grisé a une triple épaisseur :

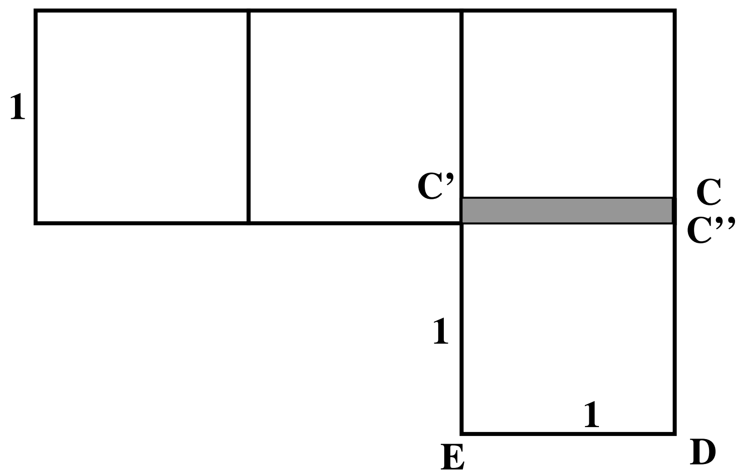
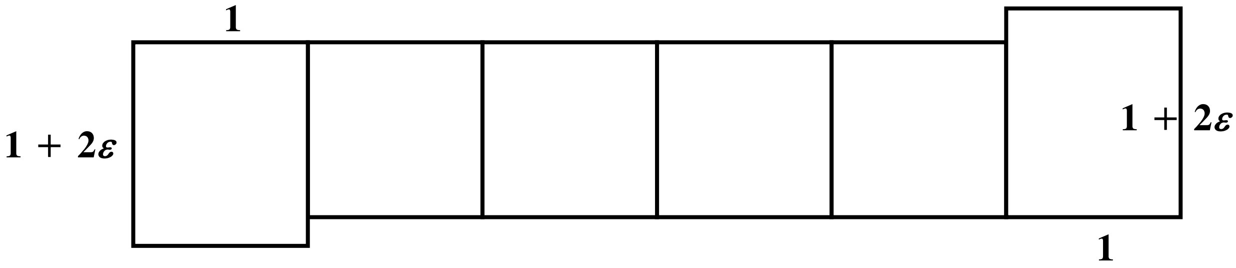


Figure 12-4

Appelons « transformation T » la succession d’opérations permettant de passer de 12-1 à 12-4.

Il suffit pour terminer de partir du patron de la figure 12-5, qui est contenu dans un rectangle de dimensions $6 \times (1 + 4\varepsilon)$, et de lui faire subir deux transformations T symétriques comme vu ci-dessus.
Ce qu’on obtient (figure 12-6) est un patron classique à la réserve près qu’il possède deux bandes (en grisé) de dimensions $1 \times (\varepsilon)$ ayant une triple épaisseur.
Cela n’empêchera pas les 5 derniers pliages aboutissant à un cube unité.
Le tout nécessite 9 pliages, peut-être peut-on faire mieux.

Figure 12-5



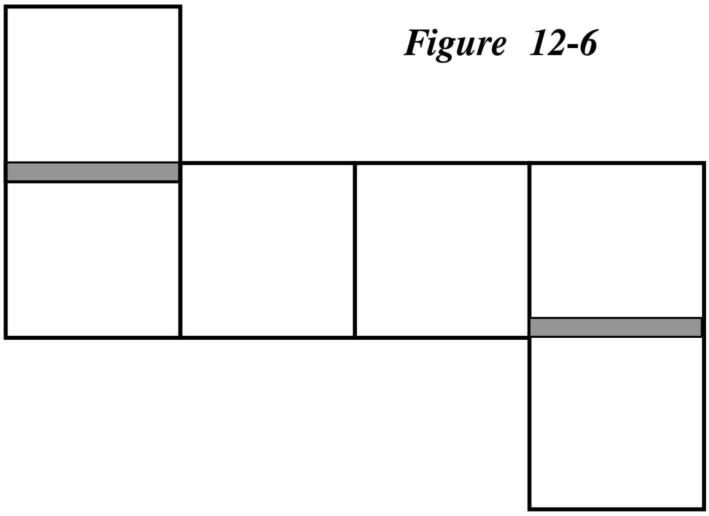
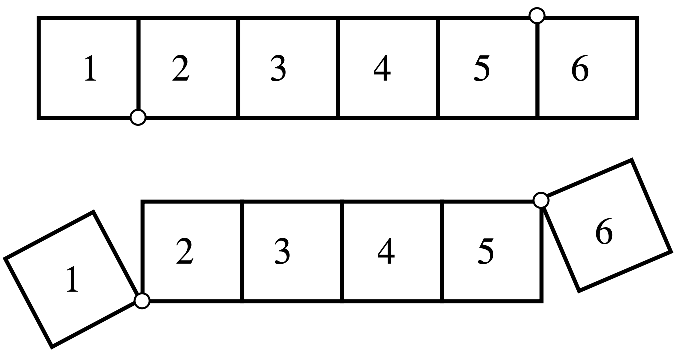


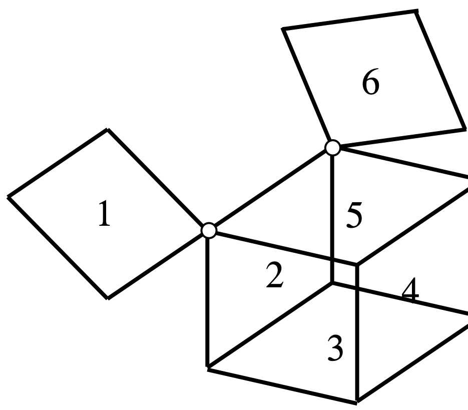
Figure 12-6

Le rectangle contenant le patron 12-5 a pour dimensions 6 × (1 + 4ε), son aire est aussi proche de l'optimum 6 que l'on veut.

G. Une nouvelle définition d'un patron et de nouvelles questions.

Dans la définition provisoire d'un patron, on a oublié de dire qu'un pliage devait s'effectuer selon un segment **non réduit à un point**. Un pliage selon un point n'est pas réaliste avec une feuille en papier, mais mathématiquement c'est possible, le pliage devenant une rotation autour du point.
Cette possibilité permettrait d'envisager le patron d'aire 6 de la figure ci-dessous qui, avec 2 découpes, 4 pliages « normaux » et deux « pivotements » aboutirait au cube unité.





À la fin du pliage, 3 est en bas, 5 est en haut, la face 1 vient en avant et la face 6 en arrière.
Pour éviter ce genre de situation, je propose la définition suivante du patron qui est physiquement acceptable :

> Un patron (du cube unité) est une ligne polygonale fermée délimitant un intérieur pas nécessairement convexe, mais connexe et qui, après un nombre fini de pliages (rotations autour de segments non réduits à des points) aboutit exactement au cube unité complet.
> L'éclatement des faces, les découpes (préservant la connexité) et les recouvrements restent autorisés.

On peut alors se poser de nouvelles questions comme :

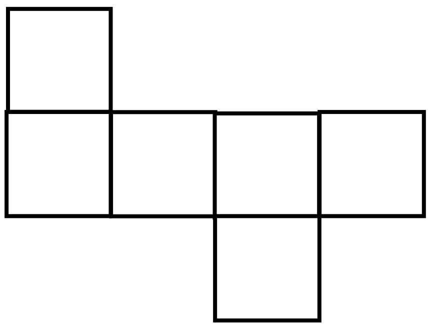
Trouver un <u>ensemble convexe</u> de surface minimale dans lequel on puisse découper un patron du cube unité.

Trouver un <u>carré</u> de surface minimale dans lequel on puisse découper un patron du cube unité.

Je pense sans preuve, que pour cette dernière question, un carré de côté $\sqrt{6}\ (1+\varepsilon)\ \ \varepsilon > 0$ arbitraire devrait convenir.

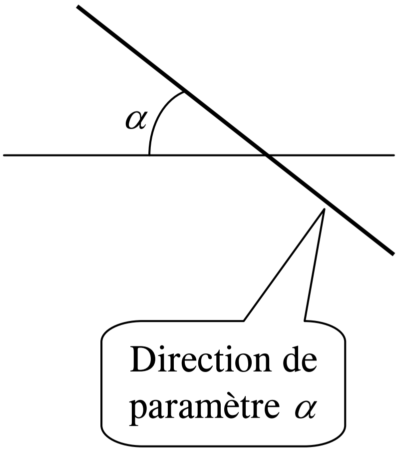
H. ANNEXE : Comment trouver le plus petit rectangle contenant un patron ?

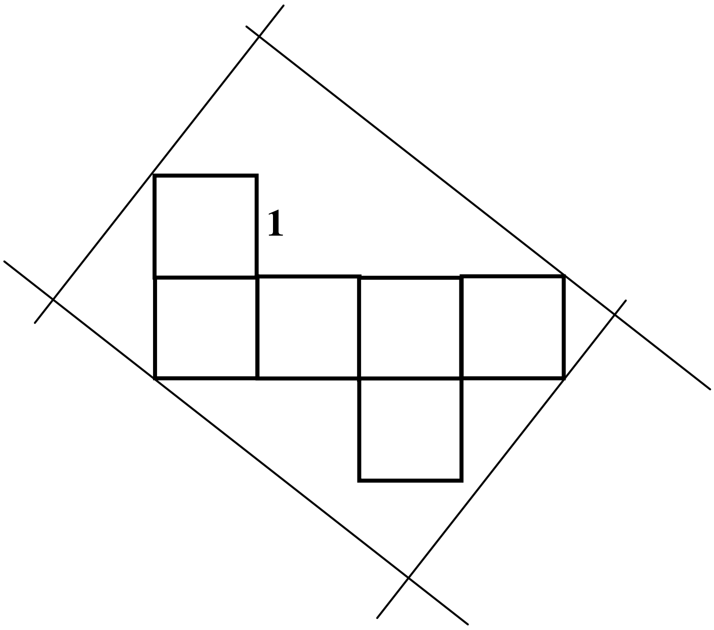
Soit le patron P_1 ci contre :



On ne connaît pas *a priori* l'orientation du rectangle minimal contenant P_1.
L'orientation du rectangle sera définie par le paramètre α : angle aigu que fait le support d'un côté par rapport à « l'horizontale ». Il faut faire varier α de 0 à π/2.

α étant donné, on trouve facilement les deux parallèles « nord et sud » faisant un angle α avec l'horizontale, puis les deux parallèles perpendiculaires aux précédentes et qui contiennent au mieux le patron. Le rectangle minimal correspondant a une aire $f(\alpha)$.

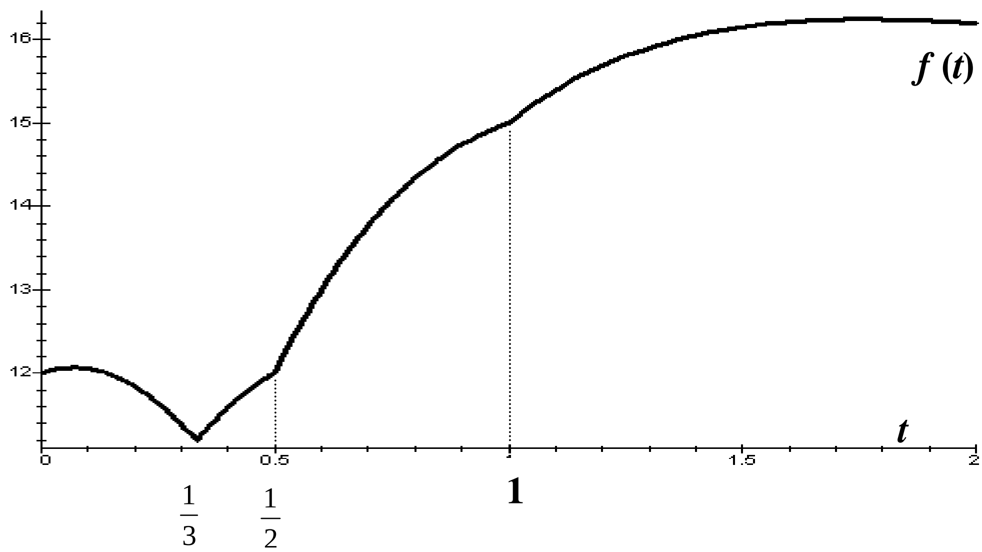




f est continue, rationnelle par morceaux, et définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2\ (-t^2+t+6)}{1+t^2} & si \quad 0 \le t \le 1/3 \\ \dfrac{4\ (t^2+3t+2)}{1+t^2} & si \quad 1/3 \le t \le 1/2 \\ \dfrac{2\ (4t^2+9t+2)}{1+t^2} & si \quad 1/2 \le t \le 1 \\ \dfrac{3\ (4t^2+5t+1)}{1+t^2} & si \quad 1 \le t < +\infty \end{cases} \qquad \text{où } t = \tan(\alpha)$$

La courbe représentant f est visible ci-dessous :

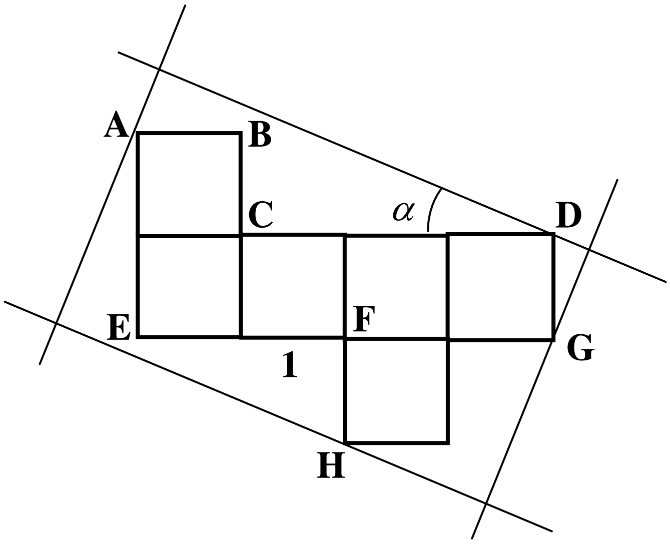


Explications :
Il est clair qu'on a 4 cas de figure selon que t est compris dans

[0 ; 1/3], [1/3 ; 1/2], [1/2 , 1] ou [1 ; +∞[.

Traitons par exemple le deuxième cas : $t \in [1/3 ; 1/2]$ avec la figure A1 ci-dessous.

Figure A1



Puisque $t = \tan(\alpha) \in [1/3 ; 1/2]$ et que $\tan(\text{BDC}) = 1/3$; $\tan(\text{HEF}) = 1/2$, les contacts du rectangle et du patron se font en A, D, G, H.

On a : $1 + t^2 = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$ d'où :

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+t^2} \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{t}{1+t^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Le calcul de la longueur du rectangle se fait en projetant par exemple le trajet [AEG] joignant 2 bords opposés. Cela donne :

$$\text{longueur} = 4\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha).$$

Le calcul de la largeur du rectangle se fait en projetant par exemple le trajet [DGFH] joignant 2 bords opposés. Cela donne :

$$\text{largeur} = 2\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha).$$

D'où l'aire égale à

$$8\cos^2(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) + 12\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{8}{1+t^2} + \frac{4t^2}{1+t^2} + \frac{12t}{1+t^2}$$

Dans ce cas, on a bien : $f(t) = \dfrac{4\ (t^2+3t+2)}{1+t^2}$.

Les 3 autres cas se traitent de la même manière.

Le minimum de l'aire a lieu pour $t = 1/3$ et vaut $f(1/3) = 11{,}2$.

Pour les autres patrons classiques, tous les résultats donnés en B) se traitent de la même manière.

Sitographie :

Le site *diophante.fr* dans lequel figurent plus d’un millier de problèmes avec la plupart du temps les solutions des lecteurs. Chaque mois il y a environ 5 nouveaux problèmes, parfois un casse-tête…

Bibliographie :

Je n’ai pas les références précises sur :
« Jouer Jeux Mathématiques n°8 » par Lucien Pianaro.