Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

JEU - 68

Soient :

A = $\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$ B = $\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$.

A-t-on A = B ?

PROBLÈME - 68

Démontrer que : si p est un nombre premier, alors la partie entière de $\dfrac{(p-1)!}{p}$ est paire.

Solutions

JEU - 67

Quelle est la « suite logique » de :

$0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 1$
$0{,}28^2 + 0{,}96^2 = 1$
$0{,}936^2 + 0{,}352^2 = 1$
$0{,}8432^2 + 0{,}5376^2 = 1$?

Solution :

C'est : $(0{,}07584)^2 + (0{,}99712)^2 = 1$.

En effet :

La clé est l'identité de Lagrange : $(x^2 + y^2) \times (u^2 + v^2) = (ux - vy)^2 + (vx + uy)^2$

qui permet d'écrire : $(x^2 + y^2)\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)=\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y\right)^2+\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\right)^2$.

D'où l'implication : $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y\right)^2+\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\right)^2=1$

que l'on peut écrire matriciellement : $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix}$

et que l'on peut interpréter comme la rotation du vecteur unitaire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un angle θ de cosinus : $\frac{3}{5} = 0{,}6$ et de sinus : $\frac{4}{5} = 0{,}8$. ($\theta \approx 53{,}1°$).

Ainsi, en posant : $x_0 = 0{,}6$ et $y_0 = 0{,}8$

avec la récurrence : $x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n - \frac{4}{5}y_n$ et $y_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n$,

on obtient successivement :

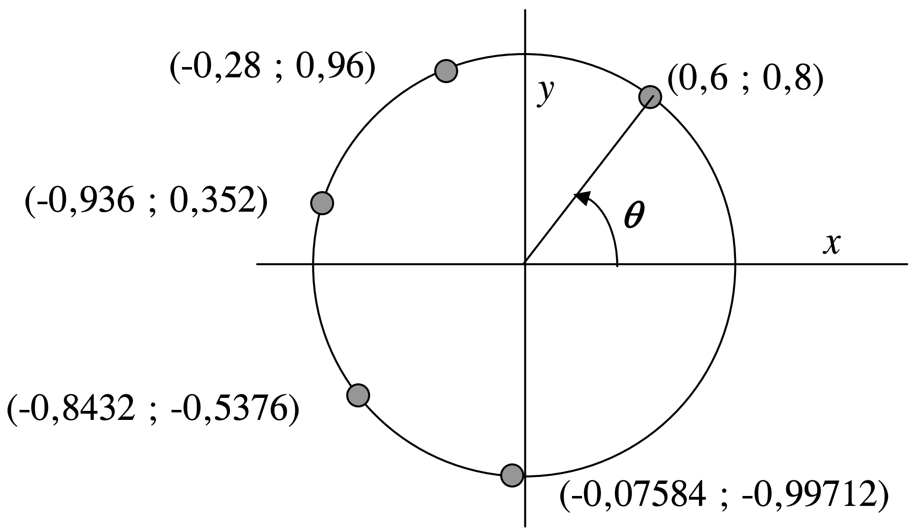
$x_1 = -\,0{,}28$ $\quad y_1 = +\,0{,}96$ $\quad x_2 = -\,0{,}936$ $\quad y_2 = +\,0{,}352$

$x_3 = -\,0{,}8432$ $\quad y_3 = -\,0{,}5376$ $\quad x_4 = -\,0{,}07584$ $\quad y_4 = -\,0{,}99712$.

La suite logique de ce qui est proposé est donc (les signes sont ignorés) :

$$(0{,}07584)^2 + (0{,}99712)^2 = 1.$$

Interprétation géométrique :



PROBLÈME - 67

Quel est le seul nombre premier qui peut s'écrire sous la forme :

$$n^4 - 22\,n^3 + 148\,n^2 - 282\,n + 27 \quad \text{avec } n \text{ entier naturel ?}$$

Solution :

La réponse est 7.

En effet :
3 et 9 sont des racines « évidentes » du polynôme $n^4 - 22\,n^3 + 148\,n^2 - 282\,n + 27$ lequel se factorise donc selon : $P = (n - 3)\,(n - 9)\,(n^2 - 10\,n + 1)$.
Les facteurs $(n - 3)$ et $(n - 9)$ diffèrent de 6. Donc pour que P soit premier, il faut que $(n - 3)$ ou $(n - 9)$ soit égal à -1 ou $+1$.

Cela laisse 4 possibilités : $n \in \{2\,;\,4\,;\,8\,;\,10\}$.
Le troisième facteur $(n^2 - 10\,n + 1)$ vaut alors respectivement

$$-15\,;\,-23\,;\,-15\,;\,1.$$

Seul le dernier cas : $n = 10$ convient ; pour lequel P vaut : $(7)\,(1)\,(1) = 7$.

M. Lucien Sautereau a résolu les deux énoncés Jeu-67 et Problème-67.