# Jeux et Problèmes

*Michel Lafond*
*mlafond001@yahoo.fr*

**JEU - 61**

Quel est le plus petit entier naturel qui augmente de 50% lorsqu'on transfère le chiffre de gauche à droite ?

**PROBLÈME - 61**

Dans $\mathrm{R}^+$ démontrer que si $a \geq b \geq c$ avec $a + b + c = 1$,
alors $a^2 + 3\,b^2 + 5\,c^2 \leq 1$.

Si vous avez compris le truc, vous devriez démontrer sous les mêmes hypothèses que : $a^3 + 7\,b^3 + 19\,c^3 \leq 1$.

---

***Solutions***

**JEU - 60**

$x$, $y$, $z$ sont trois réels distincts tels que : $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}=S$.

Démontrer que $S = -\,abc$.

*Solution :*

Par hypothèse on a $\dfrac{1}{c}=a+\dfrac{1}{b}-b=\dfrac{ab+1-b^2}{b}$ et $c=a+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2b+a-b}{ab}$

On a donc $\dfrac{b}{ab+1-b^2}=\dfrac{a^2b+a-b}{ab}$ d'où en développant et en regroupant :

$a^3b^2 + a^2\,(2b - b^3) + a\,(1 - 3b^2) + b^3 - b = 0$ qu'on factorise ainsi :

$$(a - b)\,(a^2b^2 + 2ab - b^2 + 1) = 0.$$

Puisque $a \neq b$ on tire $a^2b^2 + 2ab - b^2 + 1 = 0$ qu'on factorise ainsi :

$$[(a - 1)b + 1]\,[(a + 1)b + 1] = 0.$$

L'un des facteurs est nul :

- Si c'est le premier, $b=\dfrac{1}{1-a}$ entraîne $S=a+\dfrac{1}{b}=a+1-a=1$,

de plus $c=\dfrac{b}{ab+1-b^2}=\dfrac{\dfrac{1}{1-a}}{\dfrac{a}{1-a}+1-\dfrac{1}{(1-a)^2}}=\dfrac{a-1}{a}$ après simplification.

(1 – $a$ est non nul car $b=\dfrac{1}{1-a}$ implique $a \neq 1$).

Donc $abc=a\ \dfrac{1}{1-a}\ \dfrac{a-1}{a}=\ -1$ et on a bien $S = 1 = -abc$.

- Si c'est le second, $b=-\dfrac{1}{1+a}$ entraîne $S=a+\dfrac{1}{b}=a-1-a=-1$

de plus $c=\dfrac{b}{ab+1-b^2}=\dfrac{-\dfrac{1}{1+a}}{-\dfrac{a}{1+a}+1-\dfrac{1}{(1+a)^2}}=-\dfrac{a+1}{a}$ après simplification.

(1 + $a$ est non nul car $b=-\dfrac{1}{1+a}$ implique $a \neq -1$).

Donc $abc=a\ \left(-\dfrac{1}{1+a}\right)\left(-\dfrac{a+1}{a}\right)=\ 1$ et on a bien encore $S = -1 = -abc$.

CQFD.

*Remarquons que les hypothèses (et donc la conclusion !) sont vérifiées pour*

$$a = 2\ ;\ b = -1\ ;\ c = \frac{1}{2}.$$

**PROBLÈME - 60**

Démontrer que dans $\mathrm{R}^3$, si M et M' sont deux point à coordonnées rationnelles alors la distance de M à M' est différente de $\sqrt{7}$.

*Solution :*

Soients $(\dfrac{x}{p},\dfrac{y}{p},\dfrac{z}{p})$ et $(\dfrac{x'}{q},\dfrac{y'}{q},\dfrac{z'}{q})$ les coordonnées de M et M'.

Si la distance de M à M' était égale à $\sqrt{7}$, en calculant MM'$^2$, on arriverait après multiplication par $p^2q^2$ à une égalité de la forme :
(1) $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$ avec $a$, $b$, $c$, $d$ entiers et où $d = pq$ n'est pas nul.

On va montrer par l'absurde que ceci est impossible :
Si $a$, $b$, $c$ étaient tous pairs, $d$ le serait également, et on pourrait dans (1) diviser $a$, $b$, $c$, et $d$ par 2. On va donc supposer dans la suite que $a$, $b$, $c$ ne sont pas tous pairs.

Posons $d = 2^e\,\delta$ avec $\delta = 2i + 1$ impair.

(1) devient $$a^2 + b^2 + c^2 = 7 \times 4^e\,\delta^2 \qquad (2)$$

Or $\delta^2 = (2i + 1)^2 = 4\,i^2 + 4i + 1 = 4\,i\,(i + 1) + 1$.
$i\,(i + 1)$ est nécessairement pair, donc $\delta^2$ est congru à 1 modulo 8.
$7\delta^2$ est donc congru à 7 modulo 8 et (2) pourrait s'écrire

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4^e \times (8k + 7) \quad k \text{ entier} \qquad (3)$$

Mais, modulo 8, un carré ne peut être que : 0, 1 ou 4.
L'examen des $3^3$ possibilités de $a^2 + b^2 + c^2$ modulo 8 montre que
$a^2 + b^2 + c^2$ n'est jamais congru à 7 modulo 8.

Pour terminer, distinguons trois cas dans (3) :

Si $e = 0$ (3) devient $a^2 + b^2 + c^2 = (8k + 7)$ quantité congrue à 7 modulo 8, on vient de voir que c'est impossible.
Si $e = 1$ (3) devient $a^2 + b^2 + c^2 = 4(8k + 7)$ quantité congrue à 4 modulo 8
Si $e \geq 2$ $4^e$ est multiple de 8, et alors $a^2 + b^2 + c^2$ serait congru à 0 modulo 8.
Dans ces deux derniers cas, $a^2 + b^2 + c^2$ serait pair, mais ceci n'est possible que si $a$, $b$, $c$ sont tous les trois pairs (puisque le seul résidu impair modulo 8 est 1)
C'est justement la situation qu'on a exclue au début.

(1) est impossible, et par suite, si M et M' sont deux point à coordonnées rationnelles dans $R^3$ alors leur distance est différente de $\sqrt{7}$.

Par contre dans $R^4$ la distance entre (0,0,0,0) et (1,1,1,2) est $\sqrt{7}$.

*Solutions et compléments de Beczkowski :*

**Jeu - 60**

Cherchons à calculer *a, b, c* en fonction de S.

$c = S - \dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{aS - 1}$ (si $aS - 1 \neq 0$)

$b = S - \dfrac{1}{c} = S - \dfrac{a}{aS - 1} = \dfrac{aS^2 - S - a}{aS - 1}$ et $\dfrac{1}{b} = \dfrac{aS - 1}{aS^2 - S - a}$ (si $b \neq 0$ donc $cS - 1 \neq 0$)

$a = S - \dfrac{1}{b} = \dfrac{aS^3 - S^2 - 2aS + 1}{aS^2 - S - a}$ (si $b \neq 0$ donc $cS - 1 \neq 0$)

On obtient : $(S^2 - 1)a^2 - S(S^2 - 1)a + (S^2 - 1) = 0$

soit $(S^2 - 1)(a^2 - Sa + 1) = 0$

Si $S^2 - 1 \neq 0$ on a le choix entre deux valeurs de $a$ inverses l'une de l'autre.

Mais *a, b, c* jouant des rôles symétriques on aurait à choisir entre les mêmes valeurs pour *b* et *c*. Deux d'entre eux seraient égaux et l'énoncé serait contredit.
On a donc nécessairement $S = \varepsilon = \pm 1$ et $a \neq \varepsilon$.

On en déduit : $b = \dfrac{-\varepsilon}{\varepsilon a - 1}$ et $c = \dfrac{\varepsilon a - 1}{a}$ et $-abc = \varepsilon = S$

**Problème - 60**

Si j'en crois Marc Guinot, auteur chez Aléas d'une arithmétique pour amateurs, un certain L.Aubry a publié, en 1912, une démonstration d'un théorème qui affirme que tout entier somme de 2, 3 ou 4 carrés de rationnels est aussi somme du même nombre de carrés d'entiers.

On peut donc dire que si la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ contenait un point à coordonnées rationnelles elle contiendrait aussi un point à coordonnées entières.

Or il est facile de vérifier que 7 ne peut pas être somme de 3 carrés d'entiers (de 2 non plus…).

Pas de points à coordonnées entières donc pas de points à coordonnées rationnelles.

Aucun point à coordonnées entières, de l'espace ou du plan, ne peut être à la distance $\sqrt{7}$ de l'origine.

Ce résultat est un plus général que celui proposé par l'énoncé car il s'applique à deux points qui définissent un vecteur à coordonnées rationnelles sans que les coordonnées de ces points le soient nécessairement.

*Autre façon de traiter le problème* : l'inévitable Gauss a démontré qu'un entier ne peut être somme de trois carrés que si et seulement si, il n'est pas de la forme : $4^p(8q + 7)$ où *p* et *q* sont entiers.

En appelant $t$ le dénominateur commun à nos trois coordonnées (ou différences de coordonnées) on doit prouver que, pour toute valeur de $t$, l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 7t^2$ est sans solutions entières.

Si $t$ est impair, $t^2$ a pour reste 1 dans la division par 8 et $7t^2 = 7(8q+1) = 8q' + 7$

Si $t$ est pair on peut écrire $t = 2^p\ u$ d'où $t^2 = 4^p u^2$ avec $u$ impair.

On a alors : $7\ t^2 = 7 \times 4^p(8q + 1) = 4^p\ (8q' + 7)$ et $7t^2$ a donc toujours la forme interdite.

### *Généralisation du problème 59*

Ce problème m'a amené à envisager les choses de façon un peu plus générale tout en revenant à nos chers radians.

Soit sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ une subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2n}$ :

$$\left\{0,\frac{\pi}{2n},\frac{2\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n},\dots,\frac{k\pi}{2n},\dots,\frac{(n-1)\pi}{2n},\frac{\pi}{2}\right\}$$

et associons à cette subdivision les sommes

$$S^- = \cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{2\pi}{2n} + \cos^2\frac{3\pi}{2n} + \dots + \cos^2\frac{(n-3)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n} + \cos^2\frac{\pi}{2}$$

et

$$S^+ = \cos^2(0) + \cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{2\pi}{2n} + \cos^2\frac{3\pi}{2n} + \dots + \cos^2\frac{(n-3)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

Pour calculer la valeur de ces sommes, la même méthode, *regrouper deux à deux les termes « symétriques »,* fonctionne encore.

Dans le cas où n est pair :

$$S^- = \left(\cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) + \left(\cos^2\frac{2\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}\right) + \dots + \left(\cos^2\frac{(\frac{n}{2}-1)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(\frac{n}{2}+1)\pi}{2n}\right)$$

$$+ \cos^2\frac{\frac{n}{2}\pi}{2n} + \cos^2\frac{\pi}{2}$$

Soit $$S^- = \left(\frac{n}{2}-1\right)\times 1 + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Dans le cas où n est impair

$$S^- = \left(\cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) + \left(\cos^2\frac{2\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}\right) + \dots + \left(\cos^2\frac{(\frac{n-1}{2})\pi}{2n} + \cos^2\frac{(\frac{n+1}{2})\pi}{2n}\right) + \cos^2\frac{\pi}{2}$$

Soit $$S^- = \frac{n-1}{2}$$

Donc quelle que soit la parité de $n$, on a $\quad S^- = \dfrac{n-1}{2}$

Pour $S^+$ on peut se servir des résultats précédents :

$$S^+ = \cos^2(0) + S^- - \cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ces deux sommes, $S^-$ et $S^+$, font penser aux sommes de Riemann minorante et majorante de la fonction $cos^2x$ sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur laquelle elle est décroissante.

$$\Sigma^- = \frac{\pi}{2n}S^- = \frac{(n-1)\pi}{4n}$$

$$\Sigma^+ = \frac{\pi}{2n}S^+ = \frac{(n+1)\pi}{4n}$$

associées à l'intégrale $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ modulo la subdivision considérée plus haut.

Et tout rentre dans l'ordre. En effet

$$\lim_{n\to\infty}\Sigma^- = \lim_{n\to\infty}\Sigma^+ = \frac{\pi}{4}$$

et $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$

Daniel Reisz