Représentation en 3 dimensions des tables de Karnaugh

Bruno PRETOT, Lycée Fourier à Auxerre

Résumé : A travers cet article, nous allons travailler avec les variables booléennes. Nous allons découvrir ou redécouvrir la représentation des tables de Karnaugh et l'utilisation de ces tables pour simplifier les fonctions booléennes. Mais le cœur de cet article est la représentation des tables de Karnaugh en 3 dimensions.

Mots-clés : Fonction booléenne ; Table de vérité ; Table de Karnaugh ; Tore à tubes interconnectiques ou tore à interconnections

Ce document comprend plusieurs parties :

- Remerciements
- Introduction : historique de ma démarche
- Rappel sur les variables booléennes
- Présentation et principe des tables de Karnaugh
- Représentation en 3 dimensions des tables de Kargnauh
- Conclusion

Remerciements : Je tiens à remercier Gérard Bonneval car il m'a mis en contact avec l'IREM de Dijon. Je remercie aussi tout particulièrement Marie-Noëlle Racine et Alain Mascret pour leur travail de relecture. C'est grâce à Alain Mascret que des représentations graphiques des tores à interconnection sont dans l'article.

I. Introduction : historique de ma démarche

Quand j'ai étudié en électronique les tables de Karnaugh, les enseignants de faculté avaient dit qu'il n'y avait pas de représentation en 3 dimensions des tables de Karnaugh à plus de 4 variables et que la représentation des tables de Karnaugh à 3 variables ou à 4 variables était un cylindre.

Un jour, je me suis penché sur la question : j'ai remarqué que la représentation dans l'espace (donc en 3 dimensions) des tables de Karnaugh 4 variables n'étaient pas un cylindre mais un tore.

Puis j'ai réussi à trouver une représentation dans l'espace des tables de Karnaugh à 5 variables, à 6 variables, puis autant de variables que je veux. J'ai appelé cette représentation un tore à interconnections. C'est en fait un tore à plus ou moins de trous suivant la valeur de n.

2. Rappel sur les fonctions booléennes

Une variable booléenne P peut prendre **deux états** :
- un état **vrai** que l'on représente par la valeur 1 et qui est noté P = 1 ou bien par abus, simplement P (notation utilisée pour les tables de Karnaugh).
- un état **faux** que l'on représente par la valeur 0 et qui est noté P = 0 ou bien par abus, simplement $\overline{P}$ (notation utilisée pour les tables de Karnaugh).

En électronique, chaque état d'une variable booléenne peut être représenté par une tension différente.

On définit trois opérations :

la somme logique notée +, appelée encore OU logique ;

le produit logique noté •, appelé encore ET logique ;

la complémentation définie par $\overline{0}=1$ et $\overline{1}=0$, appelé encore NON logique.

Avec ces opérations, on peut construire une fonction booléenne à plusieurs variables.

Les variables et les fonctions booléennes ne pouvant prendre que deux valeurs (0 ou 1), on étudie les fonctions booléennes en envisageant tous les cas possibles et en rangeant les résultats dans **une table de vérité**.

Exemple :

Table de vérité de la somme logique		
a	b	S = a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table de vérité du produit logique		
a	b	S = a • b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Théorème de Shannon

Il établit que toute fonction booléenne de n variables peut se mettre sous la forme canonique suivante : $f(a_1,a_2,....,a_n)=\sum \hat{a}_1 \bullet \hat{a}_2 \bullet .... \bullet \hat{a}_n f(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$

où $\hat{a}_i$ représente une variable directe ou complémentée :

$\alpha_i = 0$ alors $\hat{a}_i = \overline{a}_i$

$\alpha_i = 1$ alors $\hat{a}_i = a_i$

Dans cette expression, un terme tel que $\hat{a}_1 \bullet \hat{a}_2 \bullet .... \bullet \hat{a}_n$ dans lequel toutes les variables interviennent sous la forme directe ou complémentée est appelé un **minterm.**

Exemple : $f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.c + a.b.\overline{c} + a.b.c$

a.b.c est un minterm,

f(a, b, c) est la somme de 4 minterms.

3. Présentation et principe des tables de Karnaugh

Une table de Karnaugh permet de représenter une fonction booléenne et surtout de la simplifier. Chaque case d'une table de Karnaugh correspond à une ligne de la table de vérité mais la disposition de Karnaugh est beaucoup plus pratique.

On considère une fonction de 3 variables par exemple

$$f(a,b,c) = \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.b.c + a.b.c$$

Comme il y a 3 variables, on construit un rectangle comportant $2^3 = 8$ cases ; chacune d'elles correspondant à 1 minterm.

bc→ a	00	01	11	10
0	$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$	$\overline{a}.\overline{b}.c$	$\overline{a}.b.c$	$\overline{a}.b.\overline{c}$
1	$a.\overline{b}.\overline{c}$	$a.\overline{b}.c$	$a.b.c$	$a.b.\overline{c}$

Chaque case est à l'intersection d'une ligne et d'une colonne ; les lignes sont numérotées 0 ou 1, les colonnes sont numérotées 00, 01, 11, 10. De cette façon, une seule variable change d'état quand on change de colonne.

Les entrées horizontales du tableau correspondent à la variable *a* et les entrées verticales correspondent aux variables *b* et *c*.

Par exemple, à l'intersection de la ligne 0 et de la colonne 11 se trouve le minterm $\overline{a}.b.c$

La fonction $f(a,b;c) = \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.b.c + a.b.c$ a pour table de Karnaugh

bc a	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0

0 signifie que le minterm n'est pas pris et 1 signifie que le minterm est pris.

<u>Notion essentielle pour l'utilisation des tables de Karnaugh</u>

La notion essentielle est celle **<u>d'états adjacents</u>** : ce sont des « états » de minterms qui correspondent à la variation de l'état d'une seule variable de ces minterms. Dans une table, ils correspondent :

- soit à des cases voisines (évident d'après la construction de la table) ;
- soit à des cases qui seraient voisines si on rapprochait les bords parallèles qui limitent le rectangle.
- soit encore à des cases symétriques par rapport aux frontières qui délimitent des carrés de 4 x 4 cases dans le cas d'un plus grand nombre de variables (voir partie 4 : représentation d'une table de Karnaugh à 5 variables, représentation d'une table de Karnaugh à 6 variables)

<u>Exemple de simplication d'une fonction booléenne par l'utilisation d'une table de Karnaugh</u>

Voici une table de Karnaugh à 4 variables. Elle représente une fonction booléenne à 4 variables.

cd ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

Si on lit la table de Karnaugh suivant les « uns » (comme une table de vérité), on trouve l'expression pour la fonction booléenne suivante :

$$f(a,b,c,d) = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}cd + \overline{a}\overline{b}c\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + ab\overline{c}d + a\overline{b}\overline{c}\overline{d} + a\overline{b}\overline{c}d$$

Mais une table de Karnaugh permet de simplifier les expressions booléennes. Il suffit de faire des groupements de « uns » comprenant un nombre de un multiple d'une puissance de 2.

Il faut faire les groupements les plus grands possible.

Ici on peut faire 3 groupements :

cd ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

Groupement 1

Groupement 3

Groupement 2

Groupement 1 :
La variable d peut prendre soit la valeur 0 soit la valeur 1 ; elle est indifférente pour l'expression algébrique de ce groupement. L'expression algébrique est : $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$

Remarque : par le calcul algébrique, cela revient à faire :

$$\overline{a}\overline{b}cd + \overline{a}\overline{b}c\overline{d} = \overline{a}\overline{b}c(d + \overline{d}) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} \text{ puisque } d + \overline{d} \text{ est toujours égal à 1.}$$

Groupement 2 :
La variable a peut prendre soit la valeur 0 soit la valeur 1, de même pour la variable b ; elles sont indifférentes pour l'expression algébrique de ce groupement. L'expression algébrique est : $\overline{c}d$

Remarque : par le calcul algébrique, cela revient à faire :

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + a\overline{b}\overline{c}\overline{d} = \overline{c}\overline{d}(\overline{a}(b + \overline{b}) + a(b + \overline{b})) = \overline{c}\overline{d}$$

Groupement 3 :
La variable b peut prendre soit la valeur 0 soit la valeur 1, de même pour la variable d ; elle est indifférente pour l'expression algébrique de ce groupement. L'expression algébrique est : $a\overline{c}$

L'expression simplifiée de la fonction booléenne est donc

$$f(a,b,c,d) = \overline{a}\overline{b}c + \overline{c}\overline{d} + a\overline{c}$$

4. Représentation dans l'espace des tables de Karnaugh

1) Table de Karnaugh à deux variables

		Colone 1	Colone 2
	b a	0	1
Ligne 1	0	**1**	**2**
Ligne 2	1	**3**	**4**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras.
Puisque les cases se touchent déjà, la représentation plane est suffisante.
La représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à deux variables est un tableau plan.

2) Table de Karnaugh à trois variables

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
	bc / a	00	01	11	10
Ligne 1	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Ligne 2	1	**5**	**6**	**7**	**8**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras.
La case **1** est adjacente à la case **4 par l'extérieur.**
La case **5** est adjacente à la case **8 par l'extérieur.**

Donc pour que les cases **1** et **5** touchent les cases **4** et **8**, il suffit de rouler le tableau pour les colonnes 1 et 4 se touchent ; on obtient un cylindre.
La représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à trois variables est un cylindre.

3) Table de Karnaugh à quatre variables

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
	cd / ab	00	01	11	10
Ligne 1	00	**1**	**2**	**3**	**4**
Ligne 2	01	**5**	**6**	**7**	**8**
Ligne 3	11	**9**	**10**	**11**	**12**
Ligne 4	10	**13**	**14**	**15**	**16**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras.
La case **1** est adjacente à la case **4 par l'extérieur.**
La case **5** est adjacente à la case **8 par l'extérieur.**
La case **9** est adjacente à la case **12 par l'extérieur.**
La case **13** est adjacente à la case **16 par l'extérieur.**

Donc pour que les cases **1**, **5, 9, 13** touchent les cases **4, 8, 12, 16** il suffit de rouler le tableau pour les colonnes 1 et 4 se touchent ; on obtient un cylindre.

La case **1** est adjacente à la case **13 par l'extérieur.**
La case **2** est adjacente à la case **14 par l'extérieur.**
La case **3** est adjacente à la case **15 par l'extérieur.**
La case **4** est adjacente à la case **16 par l'extérieur.**

Pour que les lignes 1 et 4 se touchent par l'extérieur, cela revient à faire toucher les deux faces du cylindre ; on obtient **un tore.**
La représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à quatre variables est un tore.

4) Table de Karnaugh à cinq variables

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	Colonne 6	Colonne 7	Colonne 8
	cde ab	000	001	011	010	110	111	101	100
Ligne 1	00	**1**	**2**	**3**	**4**	**17**	**18**	**19**	**20**
Ligne 2	01	**5**	**6**	**7**	**8**	**21**	**22**	**23**	**24**
Ligne 3	11	**9**	**10**	**11**	**12**	**25**	**26**	**27**	**28**
Ligne 4	10	**13**	**14**	**15**	**16**	**29**	**30**	**31**	**32**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras.
Maintenant chaque case est adjacente à 5 cases. Mais la table n'en montre que 4.
Pour trouver plus facilement la cinquième case, on la scinde en deux parties.
Pour la représenter dans l'espace, un tore simple ne suffit plus : il faut des interconnexions en plus, ce que j'appelle des tubes interconnectiques.
Raisonnement :
La case **1** est adjacente à la case **20 par l'extérieur.**
La case **5** est adjacente à la case **24 par l'extérieur.**
La case **9** est adjacente à la case **28 par l'extérieur.**
La case **13** est adjacente à la case **32 par l'extérieur.**

Donc pour que les cases **1**, **5, 9, 13** touchent les cases **20, 24, 28, 32** il suffit de rouler le tableau pour les colonnes 1 et 8 se touchent ; on obtient un cylindre.

La case **1** est adjacente à la case **13 par l'extérieur.**
La case **2** est adjacente à la case **14 par l'extérieur.**
La case **3** est adjacente à la case **15 par l'extérieur.**

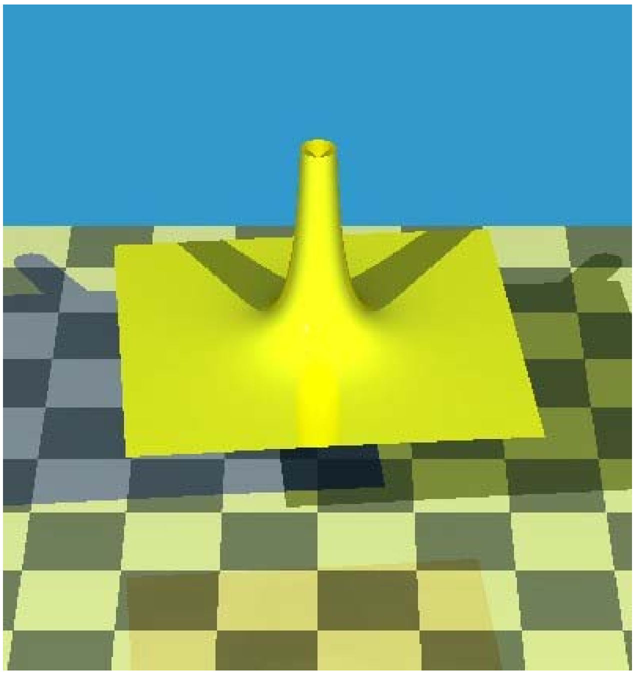
La case **19** est adjacente à la case **31 par l'extérieur.**
La case **20** est adjacente à la case **32 par l'extérieur.**

Donc il suffit de courber le cylindre pour que les lignes 1 et 4 se touchent par l'extérieur ; cela revient à faire toucher les deux faces du cylindre ; on obtient **un tore**

Prenons la case 6.
Elle est adjacente à la case **2, 5, 10, 7** mais aussi à la case **23** par symétrie.
Les cases **2, 5, 10** et **7** sont, de part leur position sur le tore, adjacentes à la case **6**.

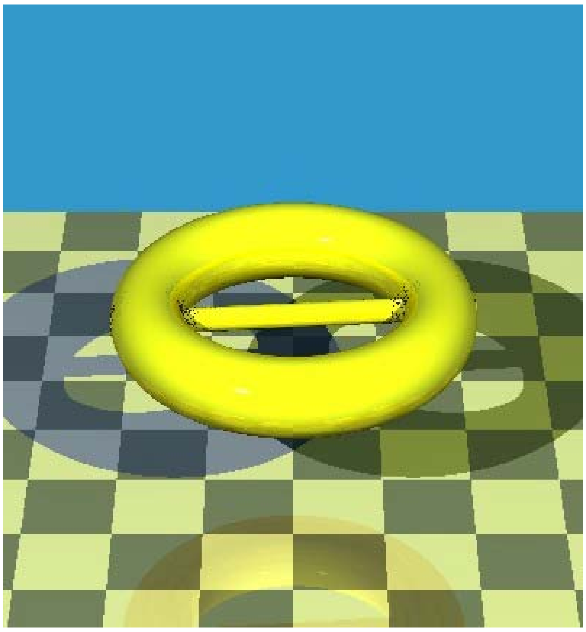
Comment faire en sorte que la case ***23*** *soit en contact avec la case* ***6*** *?*
Il suffit de placer un tube cylindrique que j'appelle tube interconnectique entre la case **6** et la case **23** ; ce tube est dans l'espace entourant le tore.

La représentation de la case 6 sur le tore n'est plus une surface curviligne mais **un pavillon de trompette avec un tube.**



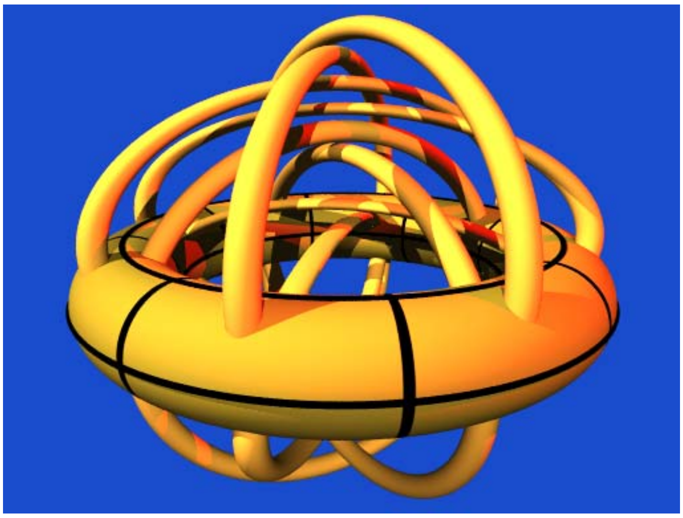
Même raisonnement
- entre **10** et **27**,
- entre **14** et **31**,
- entre **2** et **19**,
- entre **3** et **18**,
- entre **7** et **22**,
- entre **11** et **26**,
- entre **15** et **30**
- entre **1** et **4**,
- entre **5** et **8**,
- entre **9** et **12**,
- entre **13** et **16**
- entre **17** et **20**,
- entre **21** et **24,**
- entre **25** et **28**,
- entre **29** et **32**

On a en tout **16 tubes interconnectiques**.



Mais un tore à un tube interconnectique est un tore à 2 trous. (Voir ci-contre)

Donc le tore à 16 tubes interconnectiques est un tore à 17 trous.



La représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à 5 variables est un tore à 16 tubes interconnectiques ou un tore à 17 trous.

5) Table de Karnaugh à six variables

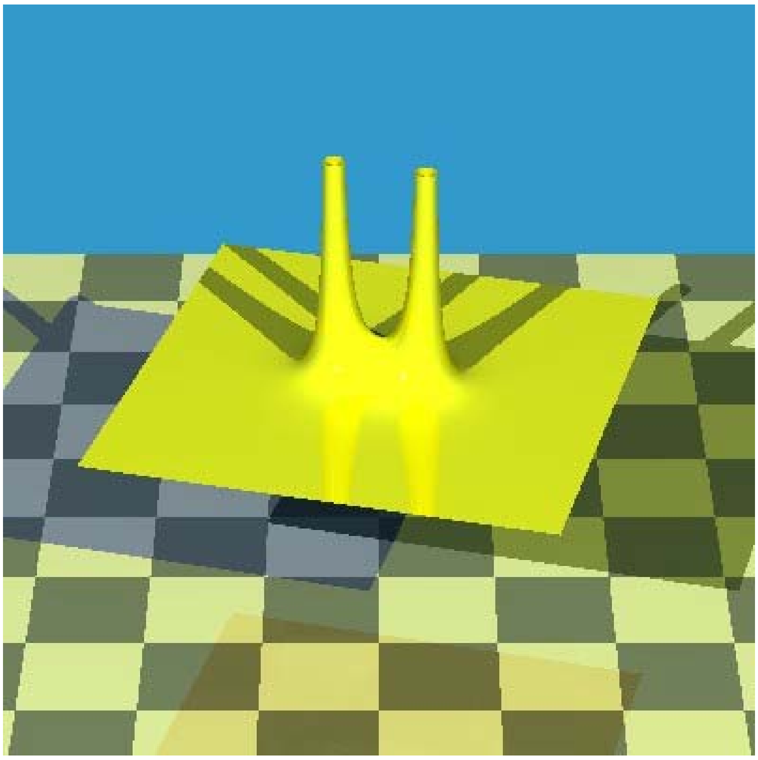
		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	Colonne 6	Colonne 7	Colonne 8
	def abc	000	001	011	010	110	111	101	100
Ligne 1	000	**1**	**2**	**3**	**4**	**17**	**18**	**19**	**20**
Ligne 2	001	**5**	**6**	**7**	**8**	**21**	**22**	**23**	**24**
Ligne 3	011	**9**	**10**	**11**	**12**	**25**	**26**	**27**	**28**
Ligne 4	010	**13**	**14**	**15**	**16**	**29**	**30**	**31**	**32**
Ligne 5	110	**33**	**34**	**35**	**36**	**49**	**50**	**51**	**52**
Ligne 6	111	**37**	**38**	**39**	**40**	**53**	**54**	**55**	**56**
Ligne 7	101	**41**	**42**	**43**	**44**	**57**	**58**	**59**	**60**
Ligne 8	100	**45**	**46**	**47**	**48**	**61**	**62**	**63**	**64**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras. **Maintenant chaque case est adjacente à 6 cases** et la table est scindée en quatre parties.

Raisonnement

Prenons la case 6

La case 6 est adjacente aux cases **2, 5, 10, 7, 23, 42.** L'adjacence des cases **2, 5, 10, 7** est réalisé par le tore. (Les lignes 1 et 8 se touchent les colonnes 1 et 8 se touchent).
Pour respecter l'adjacence des cases **6** et **23** et **6** et **42**, il faut placer deux tubes interconnectiques partant de la case **6**.



Donc en tout il faut :
1 – 4 ; 1 – 13 17 – 20 ; 17 – 29 33 – 45 ; 33 – 36 49 – 61 ; 49 – 52
5 – 8 ; 5 – 41 21 – 24 ; 21 – 57 (37 – 9) ; 37 – 40 53 – 56 ; (53 – 25)
9 – 12 ; 9 – 37 25 – 28 ; 25 – 53 (41 – 5) ; 41 – 44 57 – 60 ; (57 – 28)
13 – 16 ; (13 -1) 29 – 32 ; (29 – 17) (45 – 33) ; 45 – 48 61 – 64 ; (61 – 43)

2 – 19 ; 2 – 14 (18 – 3) ; 18 – 30 34 – 46 ; 34 – 51 50 -62 ; (50 – 35)
6 – 23 ; 6 – 42 (22 – 7) ; 22 – 58 (38 – 10) ; 38 – 55 (54 -26) ; (54 – 39)
10 – 27 ; 10 – 38 (26 – 11) ; 26 – 54 (42 – 6) ; 42 -59 (58 -22) ; (58 – 43)
14 – 31 ; (14 – 2) (30 – 15) ; (30 – 18) (46 – 34) ; 46 – 63 (62 – 50) ; (62 – 47)

3 – 18 ; 3 – 15 (19 – 2) ; 19 – 31 35 – 47 ; 35 – 50 51 – 63 ; (51 – 34)
7 – 22 ; 7 – 43 (23 – 6) ; 23 – 59 (39 – 11) ; 39 – 54 (55 – 27) ; (55 -38)
11 – 26 ; 11 – 39(27 – 10) ; 27 – 55 (43 – 7) ; 43 – 58 (59 – 23) ; (59 – 42)
15 – 30 ; (15 – 3) (31 -14) ; (31 – 19)(47 – 35) ; 47 – 62 (63 – 51) ; (63 – 46)

(4 – 1) ; 4 – 16 (20 -17) ; 20 – 32 (36 – 33) ; 36 – 48 52 – 64 ; (52 – 49)
(8 – 5) ; 8 – 44 (24 – 21) ; 24 – 60 (40 – 37) ; (40 – 12) (56 – 28) ; (56 – 53)
(12 – 9) ; 12 – 40 (28 – 25) ; 28 – 56 (44 – 41) ; (44 – 8)(60 – 24) ; (60 – 57)
(16 – 13) ; (16 -4) (32 – 29) ; (32 – 20) (48 – 45) ; (48 – 36) (64 – 52) ; (64 – 61)

Le tube interconnectique 6 – 23 est le même que 23 – 6. Pour éviter de le compter 2 fois, je l'ai mis entre parenthèses.
Si on compte le nombre de couples de nombres sans parenthèses, on trouve 64 couples.
Donc la représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à 6 variables est un tore à 64 tubes interconnectiques ou un tore à 65 trous.

6) *Evolution du nombres de tubes interconnectiques pour les tables de Karnaugh*

Le nombre de cases adjacentes à une case donnée est égal au nombre **n** de variables de la table de Karnaugh.
Une case dans le plan est adjacence à 4 cases. Donc le nombre de tube interconectiques partant d'une case donnée est **n – 4** pour $n \geq 4$.
Le nombre de cases contenues dans un tableau à n variables est $\mathbf{2^n}$.
Il ne faut compter qu'une seule fois le tube interconnectique reliant deux cases données, donc il faut diviser par 2 le nombre de cases du tableau, c'est-à-dire $\mathbf{2^{n-1}}$.
Donc le nombre de tubes interconnectiques pour une table de Karnaugh à n variables est

$$2^{n-1} \times (n-4) \quad \textit{Pour } n \geq 4$$

Vérification

n = 5 $2^{5-1} \times (5-4) = 16$

n = 6 $2^{6-1} \times (6-4) = 32 \times 2 = 64$

Finalement, pour avoir un tableau de Karnaugh à n variables, il faut :
- d'abord faire un tableau plan
- ensuite numéroter les cases en **code de Gray**.

Le code de Gray est un code binaire tel que quand on passe d'un nombre au suivant, on ne change qu'un **seul chiffre.** (On l'appelle aussi "binaire réfléchi").

Par exemple pour 4 variables, on a la suite de nombres :
0000 000100110010 0110 011101010100 11001101111111010101011 10011000

Pour avoir une représentation en 3 dimensions de ce tableau,
- on enroule le tableau sur lui-même pour obtenir un tore.
- Puis on ajoute les tubes interconnectiques pour rendre adjacentes les cases qui doivent l'être que le tore ne met pas en contact. Ils sont au nombre de $2^{n-1} \times (n-4)$ pour un tableau de n variables.

On obtient un solide que j'appelle tore à interconnexions.

5. Conclusion

Un problème pratique, l'utilisation des tables de Karnaugh, m'a conduit à vouloir les représenter dans l'espace et finalement à un problème de nature topologique. Comme souvent en mathématiques des domaines qui semblent totalement étrangers peuvent intervenir pour résoudre un problème.

Encore un tube interconnectique ! Cette fois entre logique et topologie !