

Un vaccin contre le sudoku

Michel LAFOND,

Résumé : Un exemple de sudoku à 3 dimensions.

Mots-clés : Sudoku, jeu, casse-tête, 3D.

1. L'inventeur du vaccin.

En surfant, je tombe sur le site de Nicolas Hannachi, à savoir :

<http://pagesperso-orange.fr/math-a-mater/index.htm>

Dans la page d'accueil de ce site, on peut accéder (entre autres) à la page :

<http://pagesperso-orange.fr/math-a-mater/sudoku/sudoku.htm>

qui propose un sudoku en 3 dimensions, qu'on peut faire tourner dans tous les sens avec la souris, de manière à faire apparaître la case vide de son choix qu'on remplit avec un chiffre de 1 à 8 avec les contraintes habituelles, c'est-à-dire que chaque "rangée" (dans les 3 directions) et chaque bloc soit contenir $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Voir la figure 1 page suivante.

Le commentaire est le suivant :

Avec un exercice pareil, on est normalement vacciné contre la fièvre du sudoku.

C'était inespéré !

Étant atteint depuis maintenant 3 ans par la fièvre en question, je ne soupçonnais pas l'existence d'un remède. Je me suis donc attaqué au problème, mais si le maniement du cube est aisé, il est très difficile de bien situer les chiffres déjà placés malgré l'usage judicieux de couleurs pour distinguer les différents blocs. Je l'ai donc "découpé" en 8 tranches, chacune étant un sudoku en 2 dimensions de 8×8 cases, et je l'ai résolu sur papier.

Il n'est pas trop difficile à résoudre, car le nombre d'indices donnés par le "docteur Hannachi" soit 201 cases pré remplies sur les 512 du cube, fait qu'un très grand nombre de cases ont un contenu unique de par les contraintes imposées par la règle. Il se résout de proche en proche exactement comme un sudoku en 2-D. Mais il faut du temps.

J'ai donc supprimé environ 60% des indications inutiles, et j'ai fait des permutations entre les faces et entre les chiffres pour qu'on ne puisse pas

reconnaître l'original et utiliser les indices du site. Cela donne le défi exposé au paragraphe 2.

La figure 1 ci-dessous montre la géographie du sudoku 3-D :

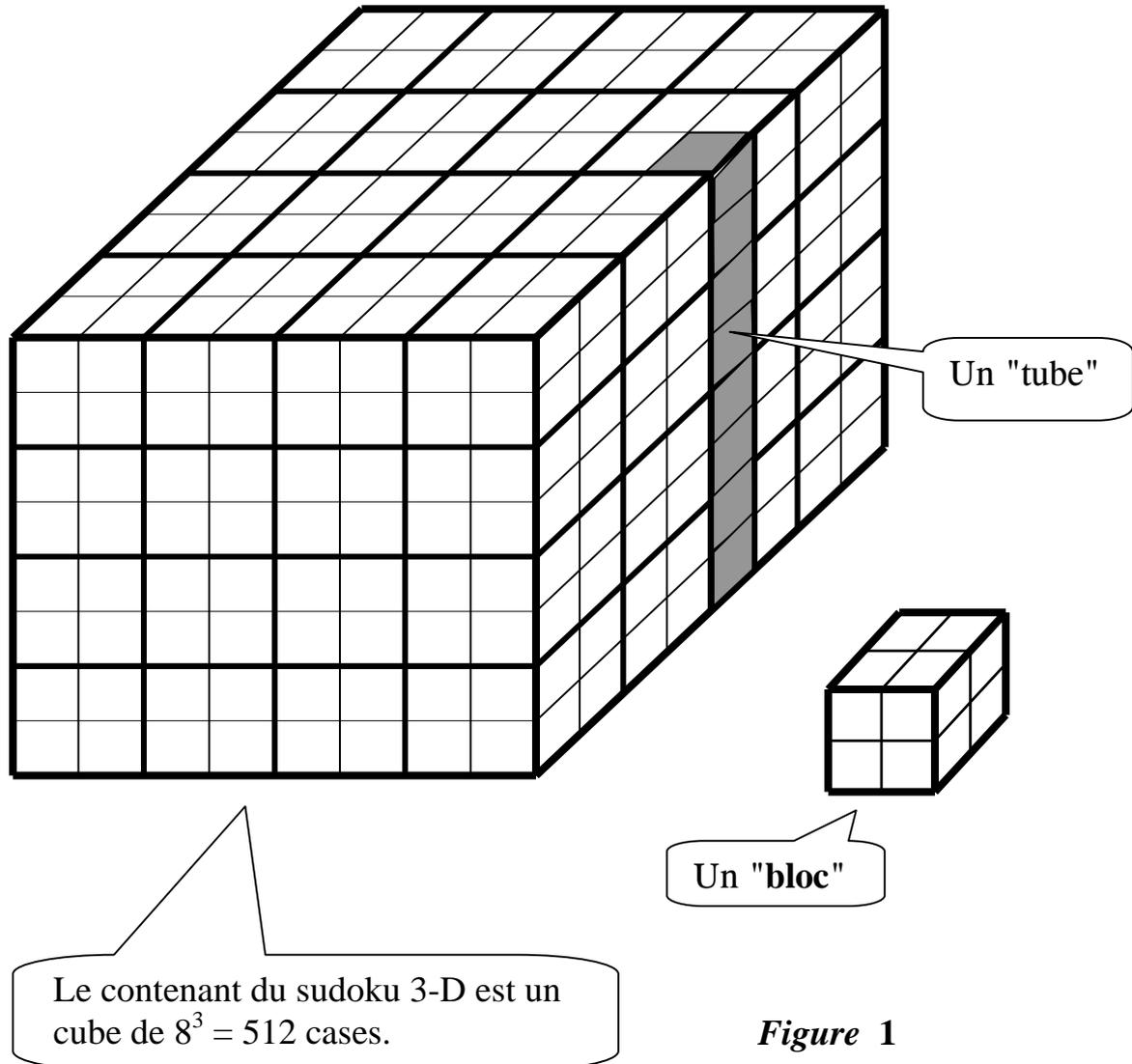


Figure 1

Le cube entier a pour côté 8 cases. Il contient donc $8^3 = 512$ cases.

Il est divisé en $4^3 = 64$ "blocs" [Voir la figure 1 ci-dessus]

Le problème est le suivant : il s'agit de remplir chaque case avec un chiffre de 1 à 8 de telle sorte :

- Chacun des 64 blocs contienne $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
- Chaque rangée de 8 cases alignées dans l'une des 3 directions parallèles aux arêtes contienne aussi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(Il y a $3 \times 8^2 = 192$ rangées).

Bien entendu des cases "indices" seront données remplies au départ, et comme dans tout bon sudoku, la solution est unique.

Remarque :

En dimension 2, un sudoku carré contient nécessairement un nombre de cases de la forme p^4 ($p = 2$ pour les enfants, $p = 3$ ou 4 pour les grands). Le plus courant a $3^4 = 81$ cases.

De même, un sudoku cubique en 3 dimensions contient nécessairement un nombre de cases de la forme p^9 , p entier. En effet :

Chaque rangée contient $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, donc le nombre total de cases est n^3 .

Mais chaque bloc est lui-même un cube de p^3 cases et doit contenir $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Donc $n = p^3$.

Finalement le nombre total de cases est $n^3 = (p^3)^3 = p^9$.

Si on élimine le cas $a = 1$! le plus petit nombre de cases d'un sudoku cubique en 3D est donc $2^9 = 512$ cases. C'est le cas dans notre exemple.

2. *Le vaccin.*

On suppose le cube posé sur une surface horizontale.

Le cube complet est découpé en huit couches (tranches) horizontales.

Pour l'énoncé du problème, je vais donner dans l'ordre les huit "couches" depuis le bas, et dans chaque couche, on repèrera les cases par leurs coordonnées x, y (Figure 2).

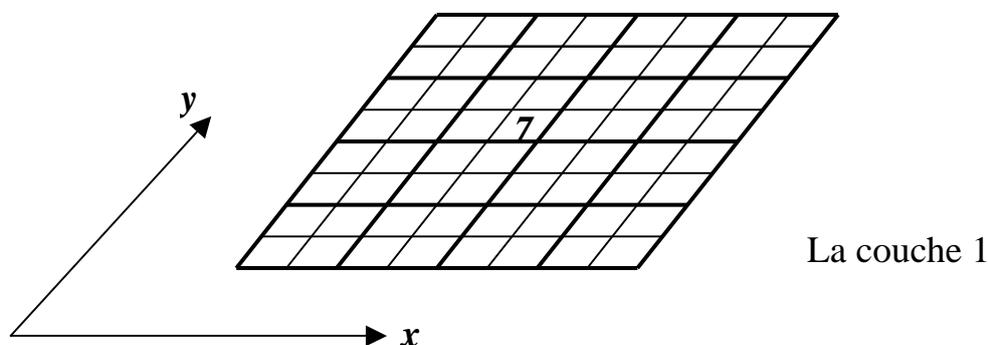
x et y décrivent $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Chaque couche comporte 8 lignes et 8 colonnes selon les termes utilisés habituellement.

Dans le grand cube, les rangées verticales sont appelées "tubes". Il y en a 64 qui seront repérés naturellement par leurs coordonnées x, y dans un plan horizontal (même repérage que les cases d'une tranche).

Un tube est représenté en gris dans la figure 1.

Figure 2



Ainsi, la case située dans la couche 1 (du bas) de coordonnées [4 ; 5] contient le chiffre 7.

Les lignes en gras dans la figure 2 séparent les blocs.

Dans l'énoncé figurant ci-dessous, 79 "indices" sont connus, il ne restera donc "que" 433 cases à remplir.

Voici l'énoncé :

		4				3			1											3	6		
1	7							3		4		6		2						8			7
				2	5		5									3						1	
		7						6					4								4		
	3				1	7						2							7		8		
							6	5						7	1			7				5	
8							1														5	2	
		8				4				3											2		

Couche 1

Couche 2

Couche 3

Couche 4

6							5			7	4								2			
			5		2									3				2				
	1						8					7	5					8		6		
			6			5						4		3	8			5				
					6			3	5			5			6			4		8		
					1						5	2							4			
2			4				7							1								
												2										

Couche 5

Couche 6

Couche 7

Couche 8

Remarquez que chaque bloc (de 8 cases) est visible dans le descriptif ci-dessus, mais en deux morceaux de 4 cases.

Par exemple les 8 cases grisées ci-dessus sont celles d'un même bloc.

3. Comment appliquer le remède ?

Voici un début possible de raisonnement :

- Dans la couche 4, la case C = [6 ; 8] contient nécessairement un 7 car comme on le voit ci-dessus :

3 et 6 sont présents dans la ligne 8 de la couche 4 ;
 2, 4, 5, 8 sont présents dans la colonne 6 de la couche 4 ;
 1 est présent dans le tube de la case C = [6 ; 8] couche 2.

Donc :

			3	6		
			8			7
					1	
				4		
	7			8		
7					5	
				5		2
				2		

Couche 4

Cette case contient un 7

	3				1	
			3			4
		5				
				6		
7						
			6	5		
			1			
4						3

Couche 2

Le 1 présent ici dans la couche 2 interdit d'avoir un 1 deux cases au-dessus dans la couche

Voilà déjà une case remplie, il n'en reste plus que 432.

Le plus difficile est de repérer les cases "forcées".
 Quelquefois il faut utiliser les blocs pour conclure :

- Dans la couche 2, la case C' = [3 ; 1] contient nécessairement un 6 car comme on le voit ci-dessous :

3 et 4 sont présents dans la ligne 1 de la couche 2 ;
 5 est présent dans la colonne 3 de la couche 2 ;
 7 et 2 sont présents dans le tube [3 ; 1] couches 6 et 7 respectivement.
 1 et 8 sont présents dans le bloc contenant la case C'.

	3			1	
		3			4
		5			
			6		
7					
			6	5	
			1		
4					3

Couche 2

Cette case C' contient un 6

		5			7
		8			
5					
			3	5	
		7			

Couche 6

Ce 7 présent dans la couche 6 interdit d'avoir un 7 quatre cases plus bas dans la couche 2

	4				
			3		
	7	5			
	4		3	8	
	5			6	
5		2			
				1	
	2				

Couche 7

Ce 2 présent dans la couche 7 interdit d'avoir un 7 cinq cases plus bas dans la couche 2

			4		
1	7				
				2	5
		7			
	3				1
8					
		8			

Couche 1

	3			1	
		3			4
		5			
			6		
7					
			6	5	
			1		
4	C'				3

Couche 2

En grisé les 8 cases du bloc contenant la case C'. Les présences du 8 et du 1 dans ce bloc interdisent la présence du 8 ou du 1 dans la case C' du même bloc.

Vous pouvez continuer ainsi, en remplissant de manière "forcée" :

La case [4 ; 3] de la couche 4, puis la case [4 ; 3] de la couche 1, et de proche en proche toutes les cases vides restantes.

Il ne faut pas arrêter le traitement pour que le vaccin fasse son effet.

Si vous constatez des effets secondaires, écrivez au docteur Hannachi à l'adresse :
hannachi nicolas@yahoo.fr.