LES RALLYES

Corrigé : Lycées

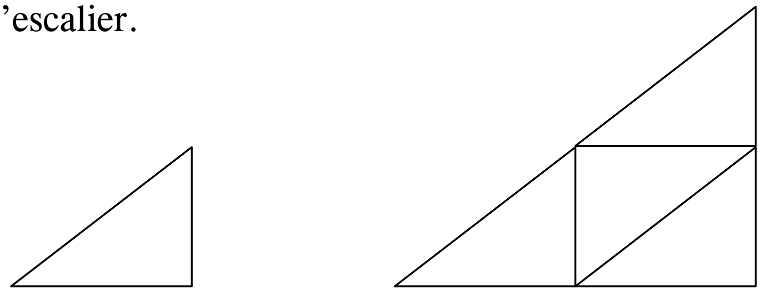
1 – ATTENTION À LA MARCHE

Énorme succès pour cet exercice, que tout le monde aborde, mais avec seulement 80% de réussite.

Les principales erreurs en dehors des erreurs de calcul sont :

110 kg pour 10 marches, cela fait 220 kg pour 20 marches. La simple proportionnalité ne marche pas ici !

Il ne faut pas se limiter au nombre de marches mais compter avec la section complète de l'escalier.



Certaines équipes ont compté hâtivement en se basant sur la figure ci-dessus. Elles en ont déduit que pour 20 marches, il faut 4 fois plus de ciment, ce qui donne la réponse fausse 440 kg.

L'erreur est cette fois minime, car on peut montrer que :

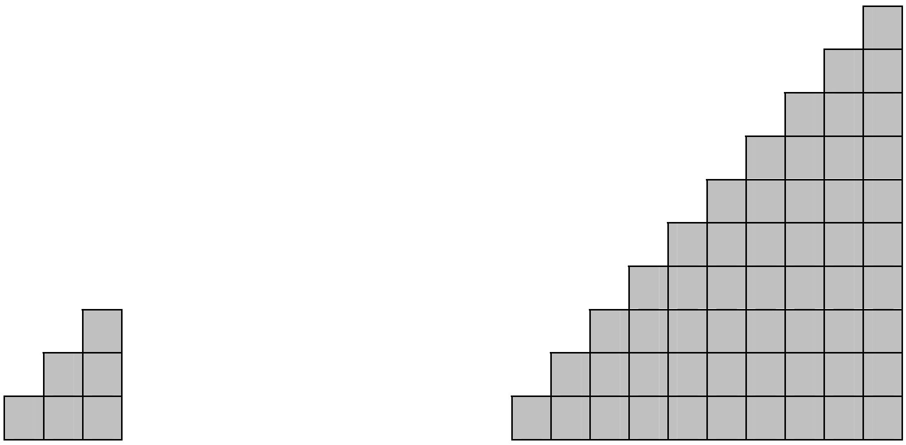
Si pour n marches il faut x kg de ciment alors pour $2n$ marches il faut

$\left(4-\dfrac{2}{n+1}\right)x$ kg de ciment.

La multiplication par 4 est donc très proche de la réalité, et d'autant plus que n est grand.

Revenons à notre problème :

Solution :



Un escalier de 10 marches a une section contenant

$$1 + 2 + 3 + \text{---} + 10 = 55 \text{ "carrés"}.$$

La section d'un escalier de 20 marches contiendra

$$1 + 2 + 3 + \text{---} + 20 = 210 \text{ "carrés"}$$

110 kg de ciment pour 55 "carrés" cela fait 110/55 kg de ciment par carré soit :
$210 \times 110/55$ = **420 kg de ciment** pour l'escalier de 20 marches.

2 – CHOUX À LA CRÈME

Cet exercice abordé par 96% des équipes a été majoritairement bien réussi.
En revanche, beaucoup de groupes ont mal géré les encadrements et obtiennent le prix d'un chou compris strictement entre 1,23 et 1,23 ! (Ce qui ne les empêche pas de conclure sur un prix unitaire de 1,23 €...)

Solution :
Soit x le prix d'un chou.
L'expression "quelques centimes" étant au pluriel, on traduit les deux hypothèses de l'énoncé par les encadrements suivants : $\begin{cases} 11{,}02 \le 9x \le 11{,}99 \\ 15{,}02 \le 13x \le 15{,}99 \end{cases}$ qui équivalent à $\begin{cases} 143{,}26 \le 117x \le 155{,}87 \\ 135{,}18 \le 117x \le 143{,}91 \end{cases}$ après multiplication des deux encadrements respectivement par 13 et 9.
Par conséquent ce système d'encadrements implique $143{,}26 \le 117x \le 143{,}91$ puis par division par 117, l'encadrement final : $1{,}22\overline{44} \le x \le 1{,}23$.

Un chou à la crème vaut donc $\boxed{\text{1 euro et 23 cents}}$.

3 – LA SOMME DE L'ANNÉE

92 équipes de Seconde sur 105 ont abordé cet exercice, et 77 d'entre elles ont trouvé une réponse exacte. Ce problème a donc été particulièrement bien trouvé, souvent par tâtonnement, il est vrai. Quelques équipes ont néanmoins présenté quelques bribes de raisonnement, un petit nombre d'entre elles ont rédigé une démonstration complète.
La solution trouvée est généralement celle ne comportant que des entiers positifs. Les deux possibilités comprenant des nombres négatifs ont été rencontrées à deux ou trois reprises.
Solution :
Si 2008 est somme de n entiers consécutifs ($n \ge 2$), notons k le plus petit de ces entiers ; on doit donc avoir :

$$k + (k+1) + (k+2) + ... + (k+n-2) + (k+n-1) = 2008.$$

Écrivons le membre de gauche à l'envers :

$$(k+n-1)+(k+n-2)+...+(k+1)+k=2008.$$

En ajoutant membre à membre les deux égalités, on obtient à gauche n termes identiques et égaux à $2k+n-1$. On en déduit : $n\times(2k+n-1)=2\times 2008$.

1er cas : si n est pair, posons $n=2m$ avec $m\geq 1$; il vient : $m\times(2k+2m-1)=2008$. Or, $2k+2m-1$ est impair, et nous sommes donc ramenés à décomposer 2008 en produit de deux facteurs supérieurs ou égaux à 1, dont l'un est impair et l'autre positif.

D'après la décomposition en facteurs premiers : $2008=2^3\times 251$; il y a donc deux possibilités $\begin{cases}2k+2m-1=251\\ m=8\end{cases}$ ou $\begin{cases}2k+2m-1=1\\ m=2008\end{cases}$.

On en tire $\begin{cases}k=118\\ m=8\end{cases}$ ou $\begin{cases}k=-2007\\ m=2008\end{cases}$.

Pour la première possibilité, le plus petit des entiers serait 118, et il y aurait 16 entiers consécutifs.

Cette solution convient, puisqu'en effet : $118+119+...+133=2008$.

Pour la deuxième possibilité, le plus petit des entiers serait -2007 et il y aurait 4016 entiers consécutifs.

Cette solution convient aussi si l'on accepte les entiers négatifs, puisque :

$$(-2007)+...+(-1)+0+1+...+2007+2008=2008.$$

2ème cas : si n est impair, posons $n=2m+1$ avec $m\geq 1$; l'égalité devient : $(2m+1)(2k+2m)=2\times 2008$, soit en simplifiant : $(2m+1)(k+m)=2008$. Ici encore, il s'agit de décomposer 2008 en produit de deux facteurs supérieurs ou égaux à 1, dont l'un est impair et l'autre positif.

Les deux seules possibilités sont $\begin{cases}2m+1=251\\ k+m=8\end{cases}$ ou $\begin{cases}2m+1=1\\ k+m=2008\end{cases}$.

On en tire : $\begin{cases}m=125\\ k=-117\end{cases}$ ou $\begin{cases}m=0\\ k=2008\end{cases}$.

Pour la première possibilité, le plus petit des entiers serait -117 et il y aurait 251 entiers consécutifs.

Si l'on n'accepte que des entiers positifs, cette condition ne convient évidemment pas ; si l'on tolère des nombres négatifs, elle est acceptable puisque :

$$(-117)+...+(-1)+0+1+...+117+118+...+133=2008.$$

La deuxième possibilité est exclue puisque m est supposé non nul.

Conclusion *:* Il y a une seule solution avec plusieurs entiers tous positifs :

118 + 119 +…+ 133 = 2008, … et deux autres solutions comportant des négatifs :

(– 117) + (–116) +…+ 0 + 1 +…+ 132 + 133 = 2008

et **(– 2007) + (– 2006) +…+ (– 1) + 0 + 1 +…+ 2006 + 2007 + 2008 = 2008**

4 – FRANCHE MACONNERIE

97% des équipes sont attirées par la maçonnerie, hélas, seules 18% des équipes donnent le temps minimal à la seconde près.

La principale bourde a été d'oublier que les maçons et leurs apprentis travaillent en même temps. On ajoute alors des durées qui se chevauchent en réalité, ce qui explique nombre d'erreurs.

Les "fractions" de briques ont été sources de bien des erreurs, sinon, parmi les très nombreuses équipes qui montrent bien que 1980 briques peuvent être posées en exactement 2 heures et demi soit 9000 secondes, la majorité utilise une proportionnalité pour les 20 briques restantes, ce qui occasionne une erreur de quelques secondes.

Solution :

Que peuvent faire nos ouvriers pendant ***t*** secondes ?

Chaque maçon pourra poser $\frac{t}{25}$ briques si on admet les fractions de briques !

Sinon il faut arrondir à l'entier inférieur, et si on note comme c'est l'usage désormais $\lfloor x \rfloor$ l'entier immédiatement inférieur ou égal à x, alors pendant ***t*** secondes :

Chaque maçon pourra poser $\left\lfloor \frac{t}{25} \right\rfloor$ briques, et chaque apprenti pourra poser $\left\lfloor \frac{t}{40} \right\rfloor$ briques ; si bien qu'à eux tous ils pourront poser pendant t secondes un nombre entier de briques égal à $B(t) = 3\left\lfloor \frac{t}{25} \right\rfloor + 4\left\lfloor \frac{t}{40} \right\rfloor$

La fonction B est croissante, et comme B (9099) = 1997 et B (9100) = 2000, cela signifie qu'il leur faudra au minimum 9100 secondes pour poser 2000 briques.

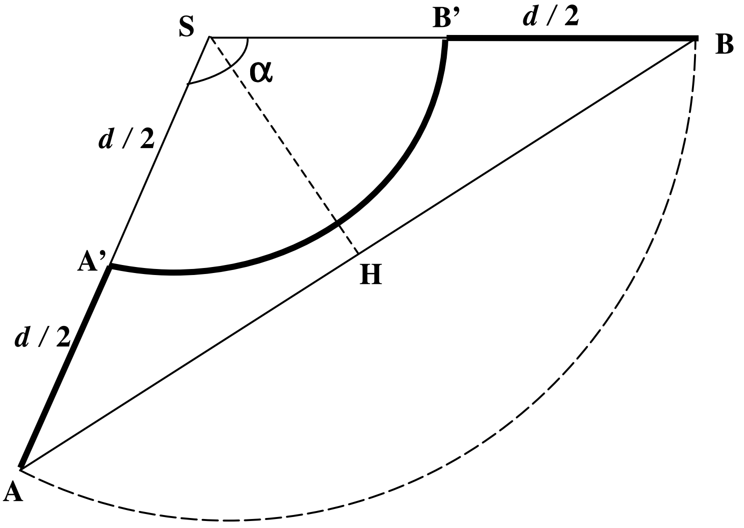
9100 secondes, cela fait **2 heures, 31 minutes et 40 secondes**.

5 – PAS FOLLE, LA GUÊPE

82% des groupes abordent cet exercice, et parmi ceux qui ont échoué, une très large majorité a proposé le parcours A-S-B, soit une distance d'exactement 30 cm. L'énoncé précisait pourtant que la distance parcourue par la guêpe devait être inférieure à 30 cm…

Il fallait effectivement se ramener au patron du cône : très peu de groupes y ont pensé ! 10% de bonnes réponses ce n'est pas beaucoup.

Solution :
Réalisons un patron du cône de révolution de sommet S.
H est le projeté orthogonal de S sur [AB].



Notons d la distance SA et α une mesure (en radians) de l'angle géométrique ASB.
Le parcours de la mouche (en pointillé) vaut 40 cm, donc $d \times \alpha = 40$.

Le parcours du frelon (en gras) vaut 35 cm, donc $2\times\left(\frac{d}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)\times\alpha = 35$.

La résolution du système $\begin{cases} d\times\alpha = 40 \\ d+\dfrac{d\times\alpha}{2} = 35 \end{cases}$ donne $\begin{cases} d = 15cm \\ \alpha = \dfrac{8}{3}rad \end{cases}$.

La distance la plus courte étant la ligne droite, la guêpe parcourra le segment [AB].
ASB étant isocèle en S et ASH rectangle en H, on a

$$AB = 2d\sin(\alpha/2) = 30\times\sin\left(\frac{4}{3}\right) \approx 29{,}16cm$$

qui est en effet plus petit que 30 cm.

6 – TIERCÉ GAGNANT

Ce problème a particulièrement inspiré les participants, puisque 217 équipes sur 242 l'abordent, soit environ 9 équipes sur 10. La réussite est nettement moins bonne : 22 équipes seulement trouvent la bonne solution.
Il est vrai que l'énoncé omettait de préciser que chaque coureur effectue son parcours à une vitesse supposée constante ... ce qu'il fallait supposer. La faute de raisonnement la plus fréquemment rencontrée a consisté à affirmer que lorsque le premier coureur arrive, le troisième est situé à 15 mètres, puisque $10+5=15$. Ce serait vrai uniquement dans le cas où les vitesses des coureurs seraient identiques !

Solution :

Notons v_1, v_2 et v_3 les vitesses respectives des trois coureurs (en mètre par seconde), t_1, t_2, t_3 leurs "temps" respectifs (en seconde) sur l'ensemble de la course.

Les données du problème conduisent aux conditions : $\begin{cases} v_1 t_1 = v_2 t_2 = v_3 t_3 = 500 \\ v_2 t_1 = 495 \\ v_3 t_2 = 490 \\ t_3 = t_1 + 3 \end{cases}$.

On en tire : $t_1 + 3 = t_3 = \dfrac{500}{v_3} = \dfrac{500}{490} t_2 = \dfrac{500}{490} \times \dfrac{500}{v_2} = \dfrac{500^2}{490 \times 495} t_1$.

Si on regroupe les t_1 dans $\frac{500^2}{490 \times 495} t_1 = t_1 + 3$ on obtient :

$\left(\dfrac{500^2 - 490 \times 495}{490 \times 495} \right) t_1 = 3$, ce qui fournit $t_1 = \dfrac{3 \times 490 \times 495}{500^2 - 490 \times 495} = \dfrac{14553}{149} \approx 97{,}67$.

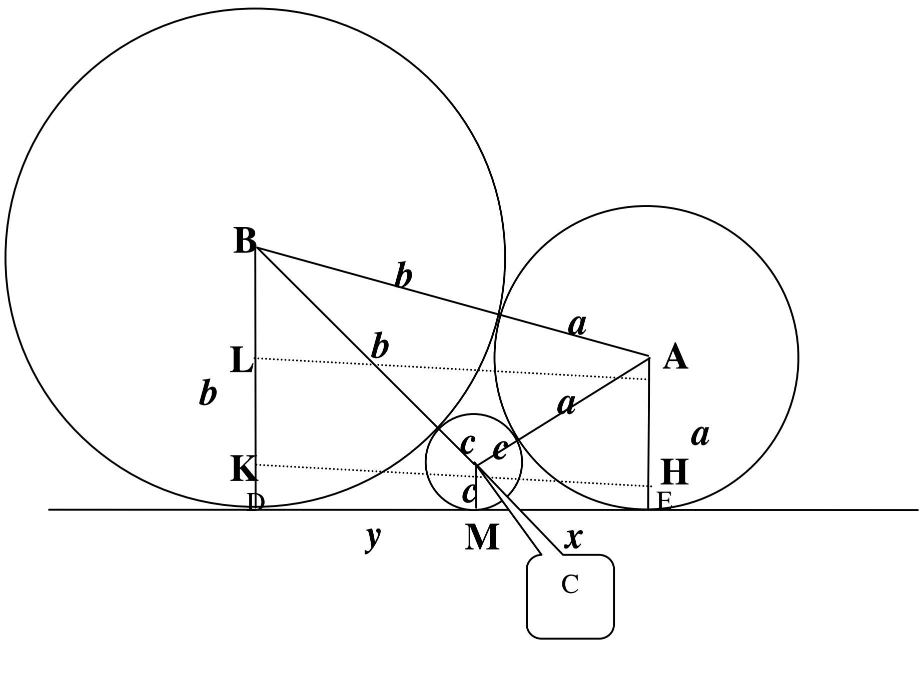
On en déduit la vitesse du vainqueur : $v_1 = \dfrac{500}{t_1} = \dfrac{74500}{14553} \approx 5{,}119$.

Conclusion : la vitesse du vainqueur est environ $5{,}119$ m.s $^{-1}$
(soit encore **18,429 km.h $^{-1}$**).

7 – LES TROIS CERCLES

Deux tiers des équipes tentent de calculer le petit rayon, seules 11% des équipes donnent la valeur exacte.
Quelques équipes ont cru que le triangle ABC était rectangle, d'autres ont voulu à tout prix utiliser le théorème de Thalès, d'autres partent sur l'idée fausse que le rapport entre les rayons *c* et *a* est le même qu'entre les rayons *a* et *b*, et beaucoup n'exploitent pas les équations parfois incomplètes.
Bref, les écueils étaient nombreux…

Solution :



Nommons a, b, c les mesures des trois rayons, A, B, C les trois centres de cercles et posons $x = \text{ME}$ $\quad y = \text{MD}$.
Pythagore dans CHA donne $(a - c)^2 + x^2 = (a + c)^2$ (1)
Pythagore dans CKB donne $(b - c)^2 + y^2 = (b + c)^2$ (2)
Pythagore dans ALB donne $(x + y)^2 + (b - a)^2 = (b + a)^2$ (3)

De (1) on tire $x^2 = 4ac$ donc $x = 2\sqrt{ac}$
De (2) on tire $y^2 = 4bc$ donc $y = 2\sqrt{bc}$
Enfin, de (3) on tire $(x + y)^2 = 4\,ab$ donc $(x + y) = 2\sqrt{ab}$ qui s'écrit, en utilisant les expressions ci-dessus : $2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} = 2\sqrt{ab}$

D'où la belle expression de c en fonction de a et b : $\sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Ce qui donne ici avec $a = 4$ et $b = 9$: $\sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{36}}{2+3} = 1{,}2$ d'où $\mathbf{c = 1{,}44}$ **m**.

8 – CODE DE VINCI

92% des équipes cherchent le code, et pratiquement tous ceux qui l'ont abordé ont proposé la bonne solution : pour certains, la chance y est pour beaucoup, pour d'autres, cette solution a été accompagnée d'un raisonnement logique et souvent consistant.
A noter quelques tentatives de programmation sur calculatrice (en Basic) ou sur tableur, dont l'une est maîtrisée et complète.

Solution :
Notons le code $abcd$ avec $a \neq 0$.
D'après l'énoncé, nous avons : $57{,}8 < \dfrac{1000a + 100b + 10c + d}{a + b + c + d} < 57{,}9$ (1)
Ce qui entraîne $1000a + 100b + 10c + d < 57{,}9\,(a + b + c + d)$ soit :
$$942{,}1\,a + 42{,}1\,b < 47{,}9\,c + 56{,}9\,d \qquad (2)$$

- Montrons d'abord que $a = 1$.
En effet, si l'on suppose que a est supérieur ou égal à 2, (2) entraînerait :
$1884{,}2 \leq 942{,}1 \times 2 + 42{,}1\,b < 47{,}9\,c + 56{,}9\,d \leq (47{,}9 \times 9 + 56{,}9 \times 9) = 943{,}2$
qui est manifestement impossible.
Par conséquent, $\boxed{a = 1}$ et (2) devient : $942{,}1 + 42{,}1\,b < 47{,}9\,c + 56{,}9\,d$ (3)
- Montrons ensuite que $b = 0$.
Si l'on suppose b supérieur ou égal à 1, alors :
(3) entraînerait : $984{,}2 \leq 942{,}1 + 42{,}1\,b \leq (47{,}9 \times 9 + 56{,}9 \times 9) = 943{,}2$
qui est manifestement impossible.
Par conséquent, $\boxed{b = 0}$

- Montrons enfin que $c = 9$.

(3) avec $b = 0$ donne $942{,}1 < 47{,}9\, c + 56{,}9\, d$ (4)

Si l'on suppose c inférieur ou égal à 8, alors :

(4) entraînerait $942{,}1 < 47{,}9\, c + 56{,}9\, d \leq 47{,}9 \times 8 + 56{,}9\, d$ donc $558{,}9 < 56{,}9d$

qui est impossible puisque d dépasserait 9.

Par conséquent, $\boxed{c = 9}$

- Pour le dernier chiffre : (4) avec $c = 9$ donne $511 < 56{,}9\, d$ donc $8{,}98 < d$

donc $\boxed{d = 9}$.

En conclusion le code de Leonardo est **1099** (unique possibilité).

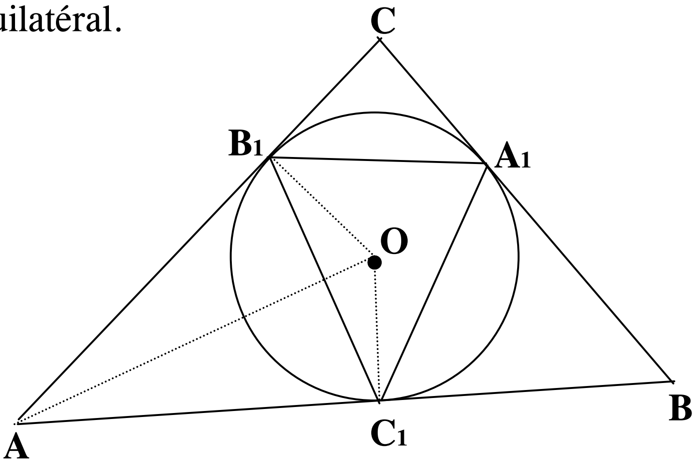
Complément :

C'est plus difficile à démontrer, mais avec $a = 0$, il existe une seule possibilité : c'est le code 0925.

9 – TRIANGLES EN CASCADE

Cet exercice a connu une réussite médiocre, mais peut-être parce que c'était le dernier. 50% des équipes se sont risqués dans cette cascade, et la plupart d'entre eux s'y sont noyés : 5 équipent au total exposent une solution correcte. Les outils requis pour ce problème ne dépassaient pourtant pas ceux étudiés au collège, le principal étant le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre associé.

Parmi les incorrections rencontrées, beaucoup d'élèves se contentent de mesurer le triangle particulier de l'énoncé, d'autres affirment –à tort– que le triangle $A_3B_3C_3$ est équilatéral.



Étudions d'abord la figure formée par un triangle ABC, son cercle inscrit, de centre O, et les trois points de contact A_1, B_1, C_1 avec les côtés.

D'après le théorème de l'angle inscrit : $angle(C_1A_1B_1) = \frac{1}{2} angle(C_1OB_1)$.

La bissectrice (AO) est un axe de symétrie du quadrilatère AC_1OB_1, donc $\frac{1}{2} angle(C_1OB_1) = angle(C_1OA)$.

Le triangle AC_1O est rectangle en C_1 (propriété du cercle inscrit), donc $angle(C_1OA) = 90° - angle(BAO)$.

O est sur la bissectrice issue de A, donc : $angle(BAO) = \frac{1}{2} angle(CAB)$.

Il résulte des quatre égalités précédentes que $angle(C_1A_1B_1) = 90° - \frac{1}{2} angle(CAB)$.

Appliquons cette dernière égalité à chacun des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, et $A_3B_3C_3$. Il vient :

$$angle\,(C_3A_3B_3) = 90° - \frac{1}{2} angle\,(C_2A_2B_2) = 90° - \frac{1}{2}\left(90° - \frac{1}{2} angle(C_1A_1B_1)\right)$$

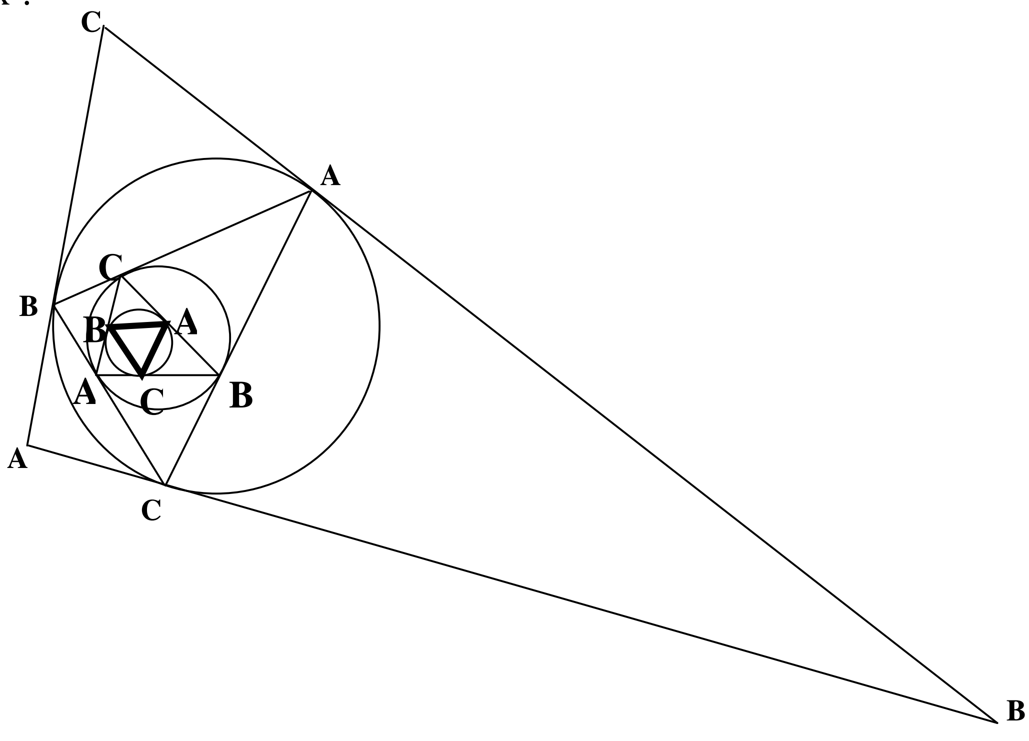
$$angle\,(C_3A_3B_3) = 45° + \frac{1}{4} angle\,(C_1A_1B_1)$$

$$= 45° + \frac{1}{4}\left(90° - \frac{1}{2} angle\,(CAB)\right) = 67{,}5° - \frac{1}{8} angle\,(CAB)$$

Soit $angle\,(C_3A_3B_3) = 67{,}5° - \frac{1}{8} angle\,(CAB)$.

Conclusion : l'angle $(C_3A_3B_3)$ a une mesure inférieure à 67,5°,
et il en est de même des deux autres.

Remarque : si l'on continuait le procédé de construction, les petits triangles se rapprocheraient d'un triangle équilatéral (trois angles de 60°). Voilà un défi pour les courageux !



Exercice 1. On tourne (6^{e} et 5^{e})

- **Lettre posée par Antoine :**

Il était sans doute utile de compter le nombre de cases extérieures lorsque le nombre de lignes et de colonnes est moins important pour bien comprendre le mode de calcul qui n'est pas, comme beaucoup d'équipes l'ont proposé, 366×4 (qui compte deux fois les cases « des coins »).

Le tour extérieur comporte : $365 \times 4 = $ **1 460** cases.
Toutes les six cases, RALLYE est écrit entièrement.
Comme $1\,460 = (243 \times 6) + \mathbf{2}$, Antoine pose donc la deuxième lettre du mot RALLYE qui est un **A**.

- **Lettre posée par Bertrand :**

o Il doit poser la 2 008^{e} lettre.
Comme $2\,008 = (334 \times 6) + \mathbf{4}$, Antoine pose donc la quatrième lettre du mot RALLYE qui est un **L**.

o Au bout du premier tour complet, on a posé 1 460 lettres. En continuant sur la deuxième ligne et jusqu'à l'avant dernière colonne, on peut encore en poser :

$$366 - 2 = 364.$$

Par suite, la deuxième lettre de la 365^{e} colonne est la :

$$1\,460 + 364 = 1\,824^{e} \text{ posée.}$$

Il faut donc encore en poser : $2\,008 - 1\,824 = 184$ dans la 365^{e} colonne.

La 2 008^{e} lettre est donc la **186^{e} lettre** de la **365^{e} colonne.**

Exercice 2. Dagobert et son T-shirt à l'envers (6^{e} et 5^{e})

Attention ! Sur Dagobert, le T-shirt est doublement retourné : « la tête en bas » et « l'extérieur à l'intérieur ». L'expérience peut être facilement réalisée avec un papier et un miroir.

Voici donc ce que lit Dagobert dans le miroir :

Beaucoup d'équipes n'ont fait qu'une seule symétrie axiale avec ou non la symétrie centrale « tête en bas », oubliant ainsi soit le miroir, soit le « dedans-dehors ».

Exercice 3. Des diagonales bien embrochées (6^{e} et 5^{e})

Le gros cube comportant $125 = 5 \times 5 \times 5$ petits « Apéricubes », chaque brochette transperce 5 étages à raison d'un cube par étage en suivant une diagonale du cube. Il fallait remarquer que le petit cube central est transpercé par les quatre brochettes (quatre diagonales).

Bilan : Les quatre brochettes traversent : $4 \times 5 = 20$ petits cubes, mais l'un d'eux est transpercé quatre fois, donc seuls : $20 - 4 + 1 = 17$ restent accrochés aux 4 brochettes solidarisées par le cube central !

Il restera : $125 - 17 = $ **108 Apéricubes** non transpercés.

Exercice 4. Les gourmands ! (6^e et 5^e)

Autour de la table, ils sont un de plus (Julien) que d'invités (par Julien). Chaque invité doit donc apporter **un** chocolat de plus que le nombre d'invités. Comme Julien a reçu 650 chocolats, on doit donc avoir : (nombre d'invités) $\times$ (nombre d'invités + **un**) = 650. Seul le produit $25 \times 26 = 650$ convient.

Julien a donc **25** amis dans sa classe.

Exercice 5. Le jour "D" (Tous)

D'après ce que voit le professeur NESDJOWOI, on sait déjà que :

- sur le dé de gauche, il y a 2, 6 **ou** 9, 7 et **8.**
- sur le dé de droite, il y a 3, 4 et **5.**

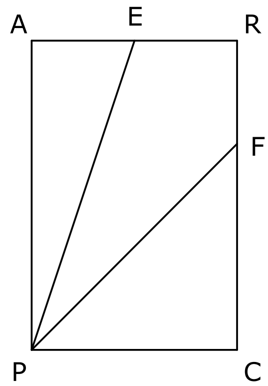
0 placé sur un seul cube ne permettrait pas, avec les **six** faces du deuxième cube, de présenter les **huit** caractères nécessaires pour écrire les **neuf** nombres : 01,02, ... ,09 (le 6 pouvant être renversé pour faire 9). Il y a donc 0 sur les deux cubes.

Pour pouvoir écrire 11 et 22, il faut que 1 et 2 soient sur les deux cubes.

Bilan : Sur le dé de gauche: 0, 1, 2, 6 ou 9, 7 et 8.

Sur le dé de droite : 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

Exercice 6. Le laboureur et ses enfants (Tous)



- AR = PC = 70 m donc **AE** = 70 m **:** 2 = **35 m.**

Le double de l'aire de PAE vaut : 2 × 1 680 m² = 3 360 m² et permet de calculer : PA = 3 360 m² **:** 35 m = **96 m.**

Par suite, l'aire du terrain **PARC** mesure :

96 m × 70 m = 6 720 m².

Donc l'aire des parcelles de **chacun**, si le partage était équitable, mesurerait : 6 720 m² **:** 3 = **2 240 m².**

Comme Alfred n'a que 1 680 m², **le partage n'est donc pas équitable**.

Le calcul de CF = $\dfrac{2}{3}$ × 96 m = 64 m permet d'obtenir l'aire de **PCF :**

(64 m × 70 m) **:** 2 = 2 240 m², ce qui confirme que Cléopâtre a juste sa part. Il faut donc modifier les parcelles attribuées à Alfred et René pour qu'elles mesurent 2 240 m².

Pour Alfred, afin que (PA × AE) **:** 2 = 2 240 m², il faut que:

$$\text{AE} = \frac{4\,480 \text{ m}^2}{96 \text{ m}} = \frac{2 \times 70}{3} \text{ m} \approx 46{,}667 \text{ m}$$

Ce qui place le point E aux $\dfrac{2}{3}$ de [AR] à partir de A.

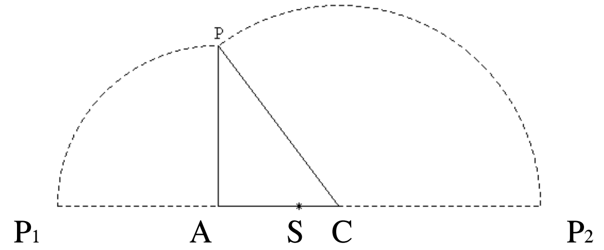
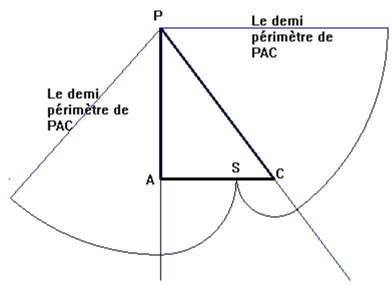
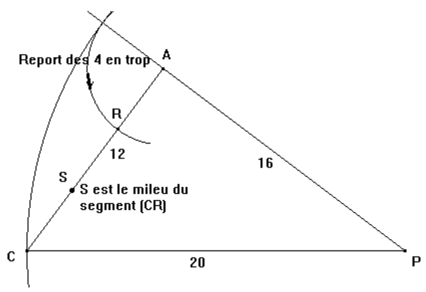
Une solution plus géométrique existait. PERF a manifestement une aire plus grande que celle de PER.
Or les triangles PAE et PER ont même base (AE = ER), même hauteur AP et donc même aire, **<u>le partage n'est donc pas équitable</u>.**
Traçons la diagonale [PR]. Comme FC est égal aux deux tiers de RC, l'aire de PCF est le tiers de l'aire de PARC (les deux tiers de celle de PRC). On placera de la même façon E aux deux tiers de [AR] en partant de A pour que l'aire de PAE soit le tiers de l'aire de PARC. Ainsi, l'aire de PERF sera aussi le tiers de celle de PARC.

<u>Exercice 7. Le jardinier et la couturière (Tous)</u>

Un dessin à l'échelle ou même à main levée est sans aucun doute le bien venu pour constater que : pour que les triangles CPS et APS, ayant le côté [PS] en commun, aient le même périmètre, il suffit que :

$$PC + CS = PA + AS = \text{le demi-périmètre du triangle PAC.}$$

Cette observation étant faite, de nombreuses constructions utilisant un fil sont possibles.

Une construction possible : Avec le fil, on reporte P en P_1 puis P en P_2. Le fil étant tendu entre P_1 et P_2, il suffit alors de le plier en deux en amenant P_1 sur P_2 (ou l'inverse) pour trouver le point S, milieu de $[P_1P_2]$.	
Une autre construction possible : (très voisine de la précédente). Avec le fil, on relève le périmètre de PAC. On plie le fil en deux et on reporte cette longueur à partir de P en contournant A ou en contournant C. L'extrémité nous donne la position de S.	
Une troisième construction possible : (qui n'a besoin que de 20 m de fil) Avec le fil, on relève la longueur PC. On reporte cette longueur à partir de P en contournant A.L'extrémité nous donne un certain point R. On relève, avec le fil, la longueur CR et, en pliant en deux, on a alors CS ou RS.	

Une quatrième construction est possible avec seulement 16 m de fil.

Périmètre commun aux deux triangles PAS et PCS :

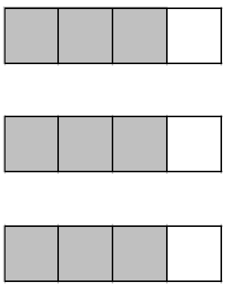
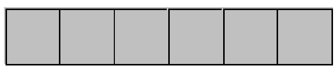
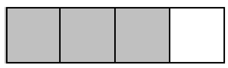
- Le périmètre de PAC étant de : $20 + 16 + 12 = 48$, le demi-périmètre est donc de 24 et par suite $PA + AS = PC + CS = 24$ ce qui donne $AS = 8$ et/ou $CS = 4$.
- Calcul de PS.
  - Dans le triangle PAC, $PC^2 = 20^2 = 400$ et $PA^2 + AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$.
    La réciproque du théorème de Pythagore permet d'affirmer que PAC est rectangle en A.
  - Le triangle PAS étant rectangle en A, l'utilisation du théorème de Pythagore conduit à :
  - $PS = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{320} =$ **17,88854...**
  - Le périmètre de chaque parcelle est de $(24 + \sqrt{320})$ m = **41,88854... m**

Exercice 8. Un gros cube, des petits cubes... (Tous)

Le plus simple ici est sans doute de procéder par essais et corrections successifs.
Un gros cube de 10 petits cubes de 1 cm d'arête en contient $10^3 = 1\,000$.
Un gros cube de 15 petits cubes de 1 cm d'arête en contient $15^3 = 3\,375$.
En affinant, on arrive à : $12^3 = 1\,728$ et $13^3 = 2\,197$.
Avec les 2 008 petits cubes, le plus gros cube réalisable a donc une arête de 12 cm et, bien sûr, rentre dans n'importe quelle chambre « normale » !
Restent : $2\,008 - 1\,728 = 280$ petits cubes à ranger, et en procédant comme ci-dessus, le plus gros cube réalisable a une arête de 6 cm puisque : $6^3 = 216$ et $7^3 = 343$.
Restent : $280 - 216 = 64$ petits cubes à ranger.
Or $64 = 4^3$. On peut donc terminer le rangement avec un troisième cube de 4 cm d'arête.
Les 2 008 petits cubes sont donc rangés en trois plus gros cubes de chacun 12^3, 6^3 et 4^3 petits.
Au passage, on remarquera que : $2\,008 = 12^3 + 6^3 + 4^3$.

Exercice 9. PARIS – SÈTE par TROYES. (4e et 3e)

- *Plusieurs équipes répondent en faisant des dessins de rectangles coloriés ou hachurés, ce qui nous semble de saines solutions !*

Les passagers dans les trois cars au départ de PARIS 	Les 2/3 des passagers qui restent à TROYES  Le reste des passagers qui continuent vers SÈTE réunis dans un seul car 

Cela revient à prendre le quart de car comme unité…

- *D'autres, dans l'élan des nombreux calculs effectués en classe, se livrent à des calculs plus ou moins explicites et trouvent le bon résultat.* Voici une solution possible :

Si $\frac{2}{3}$ des passagers partis de PARIS descendent à TROYES, $\frac{1}{3}$ reste pour SÈTE

Très mathématiquement, part de TROYES le 1/3 de 3 fois les 3/4 d'un bus, soit :

$$\frac{3}{4}\text{ bus} \times 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}\text{ bus.}$$

Partant de TROYES, le car pour SÈTE sera donc rempli aux $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

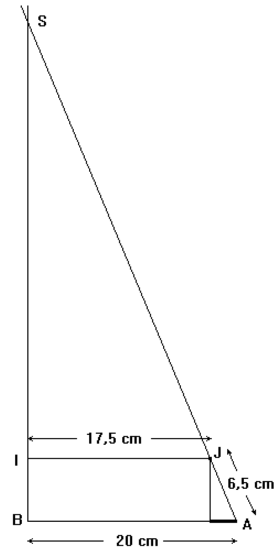
Exercice 10. Le Trapézien. (4e et 3e)

- Le nombre d'étages.
  - *La technique la plus simple :*

Partant du bas, à chaque étage, on « perd » 2,5 cm (20 – 17,5) de rayon.

Le nombre d'étages est : 20 cm **:** 2,5 cm = 8

  - *La tentation d'utiliser le théorème de Thalès (et sa conséquence) a été grande pour beaucoup de groupes qui ont proposé :*



$\frac{SI}{SB} = \frac{SJ}{SA} = \frac{IJ}{BA}$ conduit à :

$$\frac{SA - 6{,}5}{SA} = \frac{17{,}5}{20} \text{ soit } 20\ SA - 130 = 17{,}5\ SA$$

ou encore : 2,5 SA = 130 et par suite à : SA = 52 cm.

Sur [SA], tous les 6,5 cm, on a un étage, il y a donc 52 cm **:** 6,5 cm = 8 (étages).

- Le nombre de parts de gâteau, sachant qu'il y a 8 étages, est donc de :

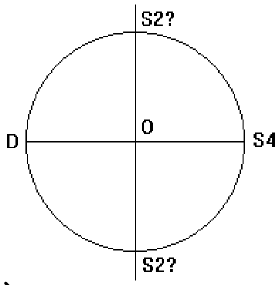
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = \mathbf{255.}$$

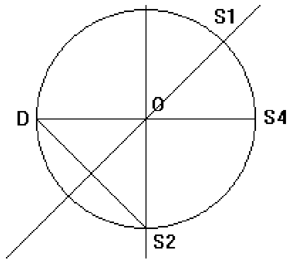
Exercice 11. Lapin sauteur. (4e et 3e)

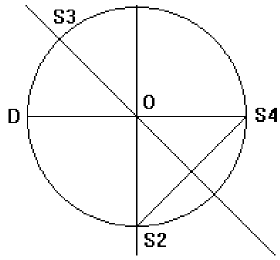
Un dessin à main levée est sans aucun doute le bien venu pour visualiser la situation. Il faut avoir bien lu que les sauts ont tous une même longueur supérieure à 5 m (le rayon du terrain).

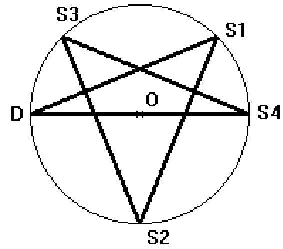
- **Le trajet ; solution géométrique.**

On appelle D le point de départ, S1, S2, S3, et S4 les points d'arrivée après chacun des sauts.



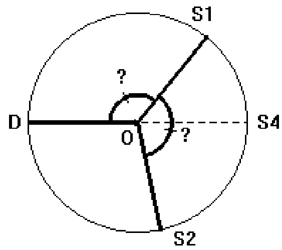






À la fin du deuxième saut, Jeannot Lapin est à égale distance (à vol d'oiseau) de son point de départ D et de son point d'arrivée S_4. Le chemin déjà fait est parfaitement semblable à celui qu'il lui reste à faire. Par conséquent, S_2 est sur la médiatrice de $[DS_4]$ et bien évidemment sur le cercle.
Deux positions sont possibles. On en choisit une ; elle imposera un sens de rotation autour de O.
Pour aller de D à S_2, il passe par S_1 qui est à mi-chemin. Donc S_1 est sur la médiatrice de $[DS_2]$ qui coupe le cercle en 2 points. L'un est trop près de D et de S_2 (à moins de 5 m); on choisit l'autre pour S_1.
Même raisonnement pour la place de S_3 situé sur le cercle à mi-chemin de S_2 et S_4.
Remarque : si Jeannot faisait encore 4 sauts, il reviendrait à son point de départ et aurait parcouru une étoile régulière à 8 branches ; ce qui invite à tracer précisément des angles au centre de 45°. Il suffit alors de choisir les sommets de 3 en 3.

- **Le trajet ; solution par le calcul.**



Jeannot Lapin reste toujours sur le bord de la pelouse. On peut chercher à déterminer la mesure de l'angle dont le sommet est le centre de la pelouse et dont les côtés passent par deux positions successives du lapin.
Jeannot fait plus d'un demi-tour puisqu'il fait 4 bonds et que les sauts sont supérieurs à 5 m, en effet 3 bonds de 5 m suffiraient pour conduire exactement de D en A (demi-hexagone régulier).

Si Jeannot fait un tour et demi, il tourne, en quatre sauts, de :

$$360° + 180° = 540° \text{ autour de O.}$$

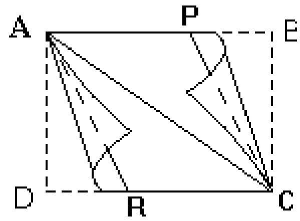
$\widehat{DOS_1} = \widehat{S_1OS_2} = \widehat{S_2OS_3} = \widehat{S_3OS_4} = 540° : 4 = 135°$. On peut alors déterminer les mesures de $\widehat{S_1OS_4} = 1 \text{ plat} - \widehat{DOS_1} = 180° - 135° = 45°$,
de $\widehat{S_4OS_2} = \widehat{S_1OS_2} - \widehat{S_1OS_4} = 135° - 45° = 90°$ etc.
D'où la construction au rapporteur ou, mieux, à la règle et au compas.
Remarque : il ne peut pas faire deux tours et demi car il tournerait de $2 \times 360° + 180° = 900°$ autour de O.
On aurait : $\widehat{DOS_1} = \widehat{S_1OS_2} = \widehat{S_2OS_3} = \widehat{S_3OS_4} = 900° : 4 = \underline{225°}$. Ces angles ayant une mesure supérieure à 180°, cela revient à la solution précédente en tournant dans l'autre sens, et ainsi de suite.

- **Longueur de chaque saut.**
  - Par mesurage sur une figure précise à l'échelle 1/100, on trouve : un saut voisin de 9,2 m.
  - Par le calcul, on a : $\widehat{S_1OS_4} = 1\text{ plat} - \widehat{DOS_1} = 180° - 135° = \underline{\mathbf{45°}}$ puis $\widehat{S_1DS_4} = \dfrac{\widehat{S_1OS_4}}{2} = \dfrac{45°}{2} = 22{,}5°$ (angle au centre, angle inscrit interceptant le même arc).

Le triangle DS_1S_4 dont un côté est diamètre de son cercle circonscrit, est donc rectangle en S_1.
$DS_1 = DS_4 \times \cos \widehat{S_1DS_4} = 10\text{ m} \times \cos 22{,}5° = 9{,}238\ 795\ 325\ldots\text{ m} \approx \mathbf{9{,}24\ m}$ à 1 cm près par excès.
La longueur des sauts mesure donc environ **<u>9,24 m</u>**.

<u>Exercice 12. Courage, plions. (4e et 3e)</u>

Beaucoup d'équipes ont réalisé par essais successifs la feuille attendue et effectué les mesures nécessaires. De la part de 4e et 3e, nous attendions une solution plus mathématique.



- Pour que APCR soit un losange, il faut que, **après pliage**, B et D soient confondus afin que les diagonales de APCR soient perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

On aura donc : $AC = AD + BC = 20$.
En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B, alors formé, on peut calculer la longueur de la feuille :

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = \mathbf{17{,}32050\ldots\ cm}$$

- Pour obtenir la mesure du côté du losange par le calcul.
  - Ou : ABC étant un triangle rectangle en B avec $AC = 20$ et $BC = 10$, on a : $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{10}{20}$ et donc $\widehat{ACB} = 60°$.

    P étant à égale distance des côtés [CA) et [CB) de l'angle $\widehat{ACB}$ est donc situé sur la bissectrice de $\widehat{ACB}$, donc $\widehat{PCA} = \widehat{PCB} = 30°$.

    PBC étant un triangle rectangle en B, on a : $\cos \widehat{PCB} = \dfrac{BC}{PC}$ et donc :

    $$PC = \frac{10\text{ cm}}{\cos 30°} = \mathbf{11{,}54700\ldots\ cm}$$
  - Ou : Utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle PBC rectangle en B :

    $$PC^2 = PB^2 + BC^2 = (\sqrt{300} - PC)^2 + 10^2$$
    qui donne : $PC^2 = 300 - 2 \times \sqrt{300} \times PC + PC^2 + 100$
    et par suite : $PC = 200 \mathbf{:} \sqrt{300} = \mathbf{11{,}54700\ldots\ cm}$