JEU - 57

Trouver dans la suite harmonique $1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{5}\ \ldots$
6 termes en progression arithmétique.

PROBLÈME - 57

Démontrer que si une fraction p/q vérifie :
$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots - \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007}$ alors p est un multiple de 3011.

Indication : Faire intervenir la somme :
$$T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} + \ldots + \frac{1}{3010}$$

Solutions :

JEU - 56

Trouver des entiers positifs impairs distincts a_1 ; a_2 ; a_3 - - - a_n tels que :
$$2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Solution :

Supposons le problème résolu.
Si on note A le PPMC des a_i A est impair comme tous les a_i.
Après multiplication par A, on obtient : $2A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$.
Les A_i sont des diviseurs distincts de A.
L'idée est donc de chercher un entier impair A ayant suffisamment de diviseurs pour qu'on puisse espérer en trouver une partie dont la somme soit égale à 2A. Il faut chercher parmi les nombres dits abondants, c'est à dire dont la somme des diviseurs dépasse le double du nombre.

Divers essais m'ont conduit à $A = 3^4 \times 5^2 \times 7 = 14175$.
Les $5 \times 3 \times 2 = 30$ diviseurs de A forment l'ensemble D qui s'obtient rappelons-le en développant $(1 + 3 + 9 + 27 + 81)(1 + 5 + 125)(1 + 7)$:
$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 25, 27, 35, 45, 63, 75, 81, 105, 135, 175, 189, 225, 315, 405, 525, 567, 675, 945, 1575, 2025, 2835, 4725, 14175\}$;

On trouve après quelques essais :

$2 \times 14175 = 14175 + 4725 + 2835 + 2025 + 1575 + 945 + 675 + 567 + 525 + 225 + 75 + 3$.

D'où, en divisant par 14175 :

$$2 = \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{63}+\frac{1}{189}+\frac{1}{4725}.$$

Il y a probablement des solutions plus petites.

PROBLÈME - 56

Quel est le plus petit entier naturel strictement positif n tel que :

$2\,n = a^2$ $\qquad$ $3\,n = b^3$ $\qquad$ $5\,n = c^5$
où a, b, c sont des entiers naturels ?

Solution :

D'après les hypothèses (H) :
a est pair, donc n aussi.
b est multiple de 3, donc b^3 est multiple de 27, donc n est multiple de 9.
c est multiple de 5, donc c^5 est multiple de 5^5, donc n est multiple de 5^4.

Ainsi on commence à avoir une petite idée de n : il est de la forme
$n = 2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma\, A$ avec $\alpha \geq 1$; $\beta \geq 2$; $\gamma \geq 4$.

On peut supposer A premier avec 2, 3 et 5.
$2\,n = a^2$ implique $2\,n = 2^{\alpha+1}\, 3^\beta\, 5^\gamma\, A = a^2$ Donc α est impair ; β et γ sont pairs.
(N'oublions pas qu'on cherche le plus petit n tel que…)
De même :
$3\,n = b^3$ implique $3\,n = 2^\alpha\, 3^{\beta+1}\, 5^\gamma\, A = b^3$ Donc α et γ sont multiples de 3 et $\beta + 1$ est multiple de 3.

$5n = c^5$ implique $5n = 2^{\alpha}\, 3^{\beta}\, 5^{\gamma+1}\, A = c^5$. Donc α et β sont multiples de 5 et $\gamma + 1$ est multiple de 5.
Il est facile de constater, même mentalement, que les plus petits nombres α ; β ; γ qui vérifient les conditions ci-dessus sont $\alpha = 15$; $\beta = 20$ et $\gamma = 24$.

Finalement $n = 2^{15}\, 3^{20}\, 5^{24}\, A$.

$A = 1$ si on veut minimiser n, et on vérifie (bien que ce ne soit pas indispensable) que

$n = 2^{15}\, 3^{20}\, 5^{24}$ implique

$$2n = 2^{16}\, 3^{20}\, 5^{24} = (2^8\, 3^{10}\, 5^{12})^2$$
$$3n = 2^{15}\, 3^{21}\, 5^{24} = (2^5\, 3^7\, 5^8)^3$$
$$5n = 2^{15}\, 3^{20}\, 5^{25} = (2^3\, 3^4\, 5^5)^5$$

Le plus petit entier naturel strictement positif n vérifiant les hypothèses est donc bien :

$$\boldsymbol{n} = 2^{15}\, 3^{20}\, 5^{24} = 3^{20}\, 5^{9}\, 10^{15} = \mathbf{6810125783203125000000000000000}$$

Remarque :
Les autres n vérifiant (H) s'obtiennent en multipliant 6810125783203125000000000000000 par une puissance k^{30} arbitraire.
Le prochain est donc $2^{30}n = 7312316880125952000000000000000000000000$.

Monsieur D. DUBUISSON, lycée H. Fontaine à Dijon, a envoyé une solution au problème N° 56.

Solution de Michel Plathey

$2.n$ est un carré : donc n est pair.
$3.n$ est un cube : donc n est un multiple de 9.
$5.n$ est une puissance cinquième : donc n est un multiple de 5^4.

2 ; 9 et 625 étant premiers entre eux, une décomposition en facteurs premiers de n sera de la forme $n = 2^k.3^l.5^m.n'$ avec $k \in N^*$; $l \in N^*$; $m \in N^*$; $n' \in N^*$. avec n' premier avec 2 ; 3 et 5

Comme on cherche le plus petit des entiers n satisfaisant aux conditions de l'énoncé, on peut poser $n' = 1$ et donc $n = 2^k.3^l.5^m$ avec $k \in N^*$; $l \in N^*$; $m \in N^*$.

Donc :
$2.n = 2^{k+1}.3^{l}.5^{m}$ est un carré. Donc $k+1 = 2.k'$; $l = 2.l'$; $m = 2.m'$ (1)
avec $k' \in N^*$; $l' \in N^*$; $m' \in N^*$;

$3.n = 2^{k}.3^{l+1}.5^{m}$ est un cube. Donc $k = 3.k''$; $l+1 = 3.l''$; $m = 3.m''$ (2)
avec $k'' \in N^*$; $l'' \in N^*$; $m'' \in N^*$;

$5.n = 2^{k}.3^{l}.5^{m+1}$ est une puissance cinquième. Donc
$k = 5.k'''$; $l = 5.l'''$; $m+1 = 5.m'''$ (3)
avec $k''' \in N^*$; $l''' \in N^*$; $m''' \in N^*$.

(2) et (3) entraînent que *k* est un multiple de 15. Donc, d'après (1), on a :
$k = 15.\alpha = 2.k' - 1$ où α est un entier strictement positif. Donc $\alpha = 1$ et $k' = 8$ est le plus petit couple d'entiers strictement positifs solution de cette équation de Bezout. Donc $k = 15$.

(1) et (3) entraînent que *l* est un multiple de 10. Donc, d'après (2), on a :
$l = 10.\beta = 3l'' - 1$ où β est un entier strictement positif. Donc $\beta = 2$ et $l'' = 7$ est le plus petit couple d'entiers strictement positifs solution de cette équation de Bezout. Donc $l = 20$.

(1) et (2) entraînent que *m* est un multiple de 6. Donc, d'après (3), on a :
$m = 6.\gamma = 5.m''' - 1$ où γ est un entier strictement positif. Donc $\gamma = 4$ et $m''' = 5$ est le plus petit couple d'entiers strictement positifs solution de cette équation de Bezout. Donc $m = 24$.

Donc $n = 2^{15}.3^{20}.5^{24}$ est le plus petit entier naturel répondant à la question.

On a bien $2.n = a^2$ avec $a = 2^{8}.3^{10}.5^{12}$;
On a bien $3.n = b^3$ avec $b = 2^{5}.3^{7}.5^{8}$;
On a bien $5.n = c^5$ avec $c = 2^{3}.3^{4}.5^{5}$.