JEU - 58

Placer quelques pièces d'un euro à plat sur une table, sans chevauchement, mais de manière que chaque pièce en touche exactement trois autres.

PROBLÈME - 58

Démontrer que si un triangle a un périmètre de 41 cm et une aire de 72 cm^2 alors tous ses côtés mesurent moins de 17 cm.

Solutions :

JEU - 57.

Trouver dans la suite harmonique 1, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ ... 6 termes en progression arithmétique.

Solution :
Le PPMC de (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) est égal à 60.
6/60 ; 5/60 ; 4/60 ; 3/60 ; 2/60 et 1/60 est de toute évidence une suite arithmétique.
Donc en réduisant : $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{60}$ est une suite arithmétique de raison 1/60.

Emmanuel MOREAU envoie des compléments à ce jeu
Pour une suite de n termes, notons P_n la propriété :

$$\begin{cases} \textit{Les n termes sont en progression arithmétique.} \\ \textit{Les n termes sont des inverses d'entiers naturels.} \end{cases}$$

La suite $\left(\frac{1}{n!}; \frac{2}{n!}; ....; \frac{n}{n!}\right)$ possède la propriété P_n, ainsi que la suite :

$$A_n = \left(\frac{1}{N}; \frac{2}{N}; ....; \frac{n}{N}\right) \text{ où } N = ppcm(1; 2; ....; n).$$

La suite $A_6 = \left(\frac{1}{60} ; \frac{1}{30} ; \frac{1}{20} ; \frac{1}{15} ; \frac{1}{12} ; \frac{1}{10} \right)$ est donc l'une des solutions du jeu 57.

On peut se demander si, parmi les suites de n termes ayant la propriété cherchée, la suite A_n est celle dont les termes ont les dénominateurs les plus petits possibles.

La réponse est non, notamment lorsque

$$ppcm(1 ; 2 ; .... ; n) = ppcm(1 ; 2 ; .... ; n ; n+1).$$

C'est le cas lorsque n = 5, n = 9 ou n = 11 par exemple.

Illustration :

La suite ayant la propriété P_5 dont les dénominateurs sont les plus petits possibles est $\left(\frac{1}{30} ; \frac{1}{20} ; \frac{1}{15} ; \frac{1}{12} ; \frac{1}{10} \right)$, alors que $A_5 = \left(\frac{1}{60} ; \frac{1}{30} ; \frac{1}{20} ; \frac{1}{15} ; \frac{1}{12} \right)$.

Remarque : il n'est pas très facile de trouver une suite

$$\begin{cases} \text{Ayant la propriété } P_n \\ \text{Qui n'est pas obtenue en multipliant les termes de } A_n, \\ \text{Qui n'est pas extraite d'une suite } A_m \text{ avec } m > n \end{cases}$$

mais il en existe tout de même. La suite $\left(\frac{1}{315} ; \frac{1}{105} ; \frac{1}{63} ; \frac{1}{45} ; \frac{1}{35} \right)$ est l'une de ces suites ayant la propriété P_5.

PROBLÈME - 57.

Démontrer que si une fraction p/q vérifie :

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - ... - \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007}$$

alors p est un multiple de 3011.

Solution :

Soit $S = p / q$ la somme alternée donnée, et :

$$T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} + ... + \frac{1}{3010}$$

En groupant les termes extrêmes, cette somme s'écrit encore :

$$T = \left(1 + \frac{1}{3010}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3009}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3008}\right) + ... + \left(\frac{1}{1505} + \frac{1}{1506}\right)$$

Dans chaque parenthèse, le numérateur vaut 3011, et comme 3011 est un nombre premier, le PPMC de (1, 2, 3,…3010) est premier avec 3011.

Donc on peut écrire $T = 3011 \times \frac{a}{b}$ avec b premier avec 3011.

On a

$$T - S = \quad 1+\frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{3}+ \ \frac{1}{4} \ + \ \frac{1}{5}+ \ ...+ \ \frac{1}{1003} \ + \left(\frac{1}{2008}+ \ \frac{1}{2009}+...+\frac{1}{3009}+\frac{1}{3010}\right)$$

En groupant les termes extrêmes, cette somme s'écrit encore :

$$T - S = \left(1+\frac{1}{3010}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3009}\right) \ + \ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3008}\right)+ \ ...+ \ \left(\frac{1}{1003} \ + \ \frac{1}{2008}\right)$$

Dans chaque parenthèse, le numérateur vaut 3011, donc comme dans la somme précédente, on peut écrire $T - S = 3011 \times \dfrac{c}{d}$ avec d premier avec 3011.

On en déduit $S = T - (T - S) = 3011 \times\dfrac{a}{b} - 3011 \times\dfrac{c}{d} = 3011 \times \dfrac{ad - bc}{bd} = \dfrac{p}{q}$

ou encore $3011 \times (ad - bc)\ q = p\ bd$.
Mais 3011 divise $p\ bd$ et est premier avec bd.

On en déduit bien **3011 divise *p***.

Remarque :
On démontre plus généralement, de la même manière, que si p est un nombre premier, alors
toute fraction égale à

$$1-\frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{3} \ - \ \frac{1}{4} \ + \ \frac{1}{5}- \ \frac{1}{6} \ + \ \frac{1}{7}-... \ \pm \ \frac{1}{partie \ \ entière \ \ (2p/3)}$$

a un numérateur multiple de p.

Il se trouve que 3011 est premier, et que la partie entière de $2 \times 3011/3$ vaut 2007.