Jeux et Problèmes

Michel Lafond
mlafond001@yahoo.fr

JEU - 60.

x, y, z sont trois réels distincts tels que : $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=S$

Démontrer que $S = -abc$.

PROBLÈME - 60.

Démontrer que dans $\mathbb{R}^3$, si M et M' sont deux points à coordonnées rationnelles alors la distance de M à M' est différente de $\sqrt{7}$.

Solutions :

JEU - 59

x, y, z sont des entiers tels que $2x + 9y + 4z$ est multiple de 19.
Prouver que $3x + 4y + 6z$ est aussi multiple de 19.

Une solution expéditive :

On a $5 \times [2x + 9y + 4z] + 3 \times [3x + 4y + 6z] = \mathbf{19} \times [x + 3y + 2z]$ (1)
Le membre de droite est multiple de 19.
$2x + 9y + 4z$ est multiple de 19 par hypothèse.
Donc $5 \times [2x + 9y + 4z]$ est multiple de 19.
Par soustraction dans (1), $3 \times [3x + 4y + 6z]$ est aussi multiple de 19.
Et comme 3 est premier avec 19, $[3x + 4y + 6z]$ est aussi multiple de 19.
CQFD.

Remarque :
Bien sûr, les paramètres de (1) ont été trouvés en résolvant l'identité :
$a \times [2x + 9y + 4z] + b \times [3x + 4y + 6z] = \mathbf{19} \times [ux + vy + wz]$
qui équivaut au système $\{2a + 3b = 19u \; ; 9a + 4b = 19v \; ; 4a + 6b = 19w\}$.

Pour cela on commence par résoudre le système

$$\{2a + 3b = 19u \; ; \; 9a + 4b = 19v\}$$

On trouve : $a = -4u + 3v$ et $b = 9u - 2v$.
D'où $4a + 6b = 38u$ qui doit être égal à $19w$. Soit $w = 2u$.
On choisit arbitrairement $u = 1$ et $v = 3$. Cela donne $a = 5$ et $b = 3$.

PROBLÈME - 59

Démontrer très simplement que :

$$\cos^2(1°)+\cos^2(2°)+\cos^2(3°)+\cos^2(4°)+\ldots\ldots+\cos^2(89°)+\cos^2(90°)=44{,}5.$$

Ici, les angles sont mesurés exceptionnellement en degrés.

Solution :

Posons $C = \sum_{i=1}^{i=90} \cos^2(i)$ et $S = \sum_{i=1}^{i=90} \sin^2(i)$

On a bien sûr $C + S = 90$ (1)

Éxaminons $C - S$:

$$C - S = \sum_{i=1}^{i=90} \cos^2(i) - \sin^2(i) = \sum_{i=1}^{i=90} \cos\ (2i) = \sum_{i=0}^{i=90} \cos\ (2i) \ - \ 1$$

On coupe le sigma en deux :

$$C - S = \sum_{i=0}^{i=44} \cos\ (2i) + \sum_{i=46}^{i=90} \cos\ (2i) \ - \ 1 \qquad (2)$$

(L'indice $i = 45$ est absent pour une raison évidente.)

Si on pose $i = 90 - j$ dans le deuxième sigma, celui-ci s'écrit : égalité (2)

$$\sum_{i=46}^{i=90} \cos(2i) = \sum_{j=44}^{j=0} \cos(2(90-j)) = \sum_{j=44}^{j=0} \cos(180-2j) \equiv \sum_{j=0}^{j=44} \cos(180-2j) = -\sum_{j=0}^{j=44} \cos(2j)$$

se simplifie donc en : $C - S = -1$ (3)

Enfin, (1) et (3) entraînent par addition : $\mathbf{C = 44{,}5}$. CQFD.

Voici les solutions proposées par un lecteur, Daniel DUBUISSON

Jeu - 59

Je cherche des entiers relatifs a, α, β et γ tels que , pour une infinité d'entiers x, y et z :

$$3x + 4y + 6z = a\,(2x + 9y + 4z) + 19\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

On en déduit le système : $$\begin{cases} 2a + 19\alpha = 3 \ (1) \\ 9a + 19\beta = 4 \ (2) \\ 4a + 19\gamma = 6 \ (3) \end{cases}$$

La comparaison de (1) et de (3) donne immédiatement $\gamma = 2\alpha$.
La comparaison de (1) et de (2) donne une équation classique en nombres entiers :

$$9\alpha - 2\beta = 1$$

qui donne $\alpha = 2k + 1$ et $\beta = 9k + 4$ avec k entier relatif.
On en déduit ensuite $\gamma = 4k + 2$ et $a = -19k - 8$.

On a donc trouvé l'identité :
$3\,x + 4\,y + 6\,z =$
$(-19k - 8)(2x + 9y + 4z) + 19\,[(2k + 1)\,x + (9k + 4)\,y + (4k + 2)\,z]$
qui prouve la propriété demandée.

Plus légèrement, en choisissant par exemple k = 0 :

$$3x + 4y + 6z = -8\,(2x + 9y + 4z) + 19\,(x + 4y + 2z).$$

Problème - 59

$$\sum_{i=1}^{90} \cos^2(i°) = \sum_{i=0}^{90} \cos^2(i°) - 1$$

$$\sum_{i=0}^{90} \cos^2(i°) + \sum_{i=0}^{90} \sin^2(i°) = 91 = 2\sum_{i=0}^{90} \cos^2(i°)$$ car $\sin(90° - i°) = \cos(i°)$ pour tout i

et finalement $\displaystyle\sum_{i=1}^{90} \cos^2(i°) = \frac{91}{2} - 1 = 44{,}5$.