

Juan de Ortega : de l'obscurité à la lumière

Trois études de textes en classe de seconde.

Frédéric METIN, Lycée « Le Castel », Dijon.

Lors du colloque premier cycle « Convergences » qui s'était tenu à l'IREM de Lyon en 2002, Pierre Collaudin avait présenté une étude sur les méthodes d'alliages et de mélanges utilisées dans de vieux livres d'arithmétique (d'après un texte manuscrit communiqué par Henry Plane). Patrick Guyot et moi avons proposé une présentation de problèmes anciens également issus d'ouvrages d'arithmétique commerciale. Notre domaine principal de recherche, jusque là centré sur la géométrie pratique et les fortifications, prenait alors une nouvelle dimension et s'étendait désormais aux mathématiques pratiques en général.

Avec le recul, je réalise que notre groupe de travail a souvent fonctionné sur ce principe de contagion positive, par lequel un intérêt personnel pour un certain domaine se transmet aux autres membres sans phagocytage pour autant ; Pierre, qui était curieux de tout et avait travaillé de nombreux sujets, a ainsi dessiné pas mal de pistes de recherche, dont l'arithmétique pratique, qui n'ont pas forcément toujours abouti à des travaux communs, mais au moins à des recherches parallèles donnant lieu à de nombreux échanges et enrichissements mutuels. En ce qui me concerne, l'envie d'étendre mon travail de recherche (en DEA de Philosophie en 2003, puis en thèse depuis) à la totalité des mathématiques pratiques de la Renaissance est due en partie à cet environnement positif et au désir de prolonger l'étude des thèmes dont Pierre avait contribué à nous faire saisir la finesse.

C'est donc à l'occasion de recherches bibliographiques sur les mathématiques pratiques que j'ai découvert le texte de Juan de Ortega, d'abord par des citations dans d'autres livres, puis dans l'ouvrage lui-même, dont j'ai pu consulter un exemplaire à la médiathèque d'Orléans¹, puis à celle de Montpellier² où le microfilmage a même été possible. J'avais d'abord étudié le livre pour ce qu'il révèle de l'aspect moral des pratiques commerciales, (les valeurs maximales de taux d'intérêt, le pourcentage de bénéfices admissible, etc.), mais j'ai découvert ensuite des contenus mathématiques aussi intéressants, lors de l'exploitation de certaines parties du texte en classe à l'occasion du travail sur la présente brochure. Je remercie d'ailleurs Roselyne Cases (de l'IREM de Toulouse) qui a donné un intérêt supplémentaire à ce travail en me signalant qu'un exemplaire de la version espagnole de l'ouvrage existe à Barcelone (car j'avais oublié de m'intéresser à la version espagnole...). Or, la bibliothèque universitaire de Valence³ met à disposition en ligne le texte espagnol de l'édition faite en 1563 par Juan Perez de Moya, autre arithméticien catalan⁴, et l'étude

¹ *Oeuvre tressubtille & profitable de lartz science de aristmetique [arithmétique] & geometrie translaté nouvellement despaignol en francoys...*, Lyon, Estienne Balland, 1515. Cote : Rés. C2498.

² *Oeuure tressubtille et profitable de lart et science de aristmetique : et geometrie translate nouuellement despaignol [de Jehan de lortie] en francoys [par Glaude Platin] ...* Lyon, E. Balland pour Symon Vincent, 1515. Cote : 77004 RES, Fonds ancien.

³ <http://biblioteca.uv.es/>

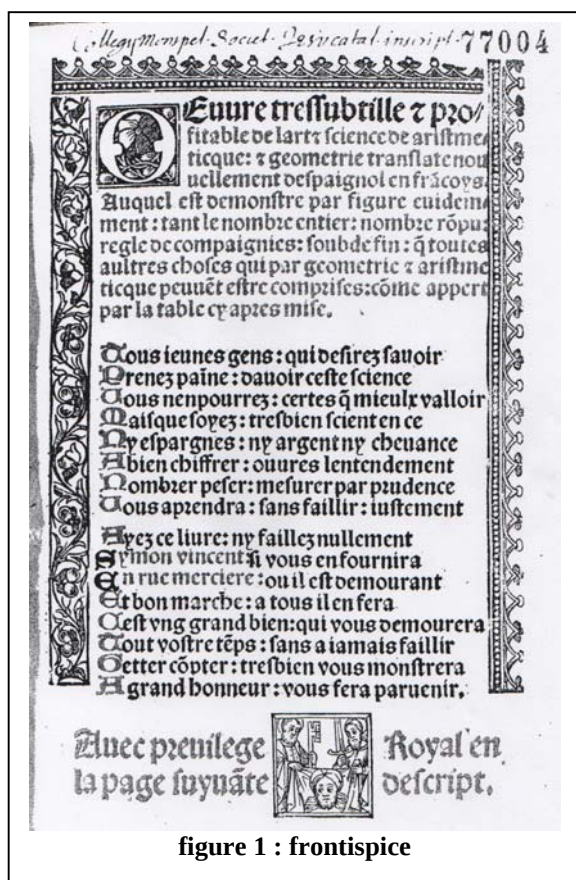
⁴ La page de titre est manuscrite et fait référence à un autre livre : *Tratado de arithmetica, compuesto por el Bachiller Ioan Perez de Moya, impresso en Granados, año 1563, en 8. dias de Abril.*, mais le travail de Perez de Moya ne

comparée des deux textes permettra sans doute de comprendre une partie des obscurités de la version française ! Voyez plus bas l'explication du problème de la lance par exemple.

1. Première activité : présentation du texte et calculs élémentaires.

La richesse et l'étrangeté du livre de Juan de Ortega m'ont amené à en proposer des extraits en classe de seconde, en début d'année, face à des élèves frais et dispos et encore assez enthousiastes (classe de Seconde option Cinéma/Audiovisuel du lycée « Le Castel »), même si le choc initial a été fort (vous pensez bien : commencer par la lecture d'un texte espagnol du 16^e siècle, c'est bizarre.)

a) Le texte et son auteur



La page de titre de l'ouvrage est présentée sans préparation lors d'une des premières séances de module (figure 1 ci-contre) ; nous nous servons de la version microfilmée à Montpellier (c'est plus amusant lorsque les élèves découvrent la typographie originale). La première difficulté est bien entendu de parvenir à lire les lettres et à reconstituer les mots ; c'est un grand classique : les *s* sont écrits comme des *f*, les *v* et les *u* ont la même signification, ce qui perturbe énormément les élèves au début de la lecture. En outre le texte comporte de nombreuses abréviations typographiques. Après plusieurs tentatives, les élèves arrivent à lire à haute voix, en donnant presque du premier coup le bon sens aux mots.

Cependant, il reste le problème des mots inconnus (qu'est-ce que peuvent être les *rôpus* ou la règle de *compagnies* ? Que signifie *getter*, *côpter* ? Et le verbe *apparoir* ?⁵), et croyez-moi, les jeunes d'aujourd'hui préfèrent les activités bien balisées et ritualisées aux plongées dans l'étrangeté⁶. La difficulté première est donc liée à la désagréable impression d'être mené loin des chemins habituels...

Les questionnements sur l'expression amènent directement à une interrogation sur l'époque de rédaction du texte et sur son auteur, et bien que j'aie peu de renseignements à fournir à ce sujet, la lecture du privilège royal et de la préface sont très utiles : le privilège est accordé au nom de *Francoys par la grace de dieu Roy de france*, à *Symon Vincent, libraire demourant a lyon*, et daté du *onzieme jour de Janvier l'an de Grace Mil cinq cens & quatorze, et de notre regne le premier*. Cette datation doit être relativisée, puisque qu'il s'agit en fait de janvier 1515 (nouveau calendrier imposé en France en 1564 par Charles IX), ce qui permet aux élèves de situer ce François comme le numéro 1 (celui qu'ils associent à Léonard de Vinci), grâce à la formule magique faisant référence à la bataille de Marignan.

concerne qu'un supplément d'une trentaine de pages sur la conversion des monnaies : c'est à voir.

⁵ Respectivement : *rompus* [fractions], *compagnies*, *lancer des jetons*, *compter* et ce verbe qui n'existe plus...

⁶ Chose entendue en seconde : « Moi, j'aime beaucoup les maths, mais par contre je déteste la géométrie » : les *maths*, ce sont les résolutions (mécaniques) d'équation.

Après lecture du *prologue du translateur*, Claude Platin, et de celui de l'auteur, nommé par Platin *frère Jehan de lortie de l'ordre de saint dominicque, acteur de ce livre*, nous étudions le premier chapitre, consacré aux règles de numération (écriture des nombres entiers dans le système positionnel) puis aux quatre opérations élémentaires. Le paragraphe final⁷ de ce chapitre fait référence à certaines méthodes alternatives de multiplication, que l'auteur se contente d'illustrer sans texte. Parmi les trois illustrations données, la première montre la multiplication de 43060 par 4085 *par jalousie* (cf. figure 2 ci-dessous). Le grand avantage de cette technique est qu'elle évite les retenues en cours de calcul⁸ puisque chaque cellule est divisée en deux parties correspondant à deux ordres de grandeur (ou puissances de dix) successifs et que la disposition diagonale permet de ne pas se poser de question sur l'appariement des nombres. Des retenues sont quand même nécessaires pour les sommes diagonales finales, mais ce qui perturbe le plus les élèves est la disposition des chiffres du résultat, probablement due davantage à la fantaisie du graveur qu'à des considérations scientifiques. Je propose un diaporama reprenant et détaillant les étapes de cet exemple, ainsi que le suivant (figure 3) qui montre une multiplication ordinaire, pas si ordinaire que ça !

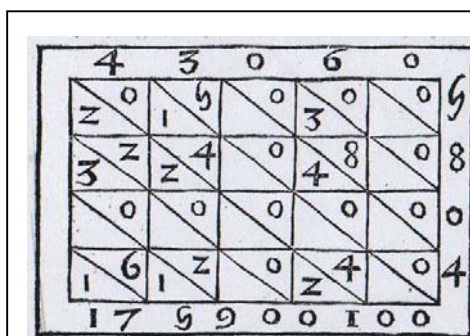


figure 2 : multiplication *par jalousie*.

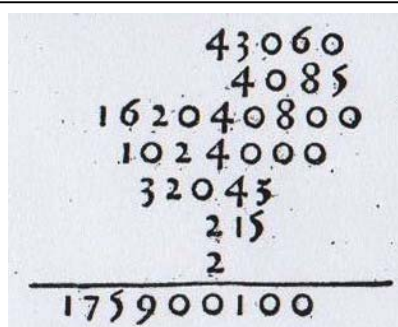


figure 3 : multiplication « ordinaire ».

La difficulté de compréhension réside ici dans le sens des multiplications partielles, effectuées de gauche à droite, et non le contraire, associé à une technique de décalage vertical des ordres de grandeur permettant de sommer finalement en colonnes, sans avoir à poser de retenue au cours des opérations partielles : ainsi, les chiffres sont placés dans la colonne appropriée mais pas nécessairement sur une même ligne, sans doute pour combler les vides au fur et à mesure.

Par exemple, on peut lire dans les deux premières lignes des calculs intermédiaires (cf. figure 4 ci-contre, les retenues ayant été ajoutées) les résultats des produits de 4 (premier chiffre de 4085) par 4, 3, 0, 6 et 0 successivement, c'est-à-dire : 16 (chiffres juxtaposés), 12 (chiffre des dizaines situé sur la seconde ligne en dessous du chiffre 6 des unités du premier résultat), 00 (dans mon explication de la figure 4, complète, mais pas dans la gravure originale de la figure 3), 24 (avec le même décalage) et 00. La suite correspond au produit de 0 par les cinq chiffres successifs du multiplicande, puis de 8, puis de 5, la règle étant de remplir au fur et à mesure les colonnes en se décalant à chaque fois d'une position, ce qui n'est pas sans rappeler notre propre technique.

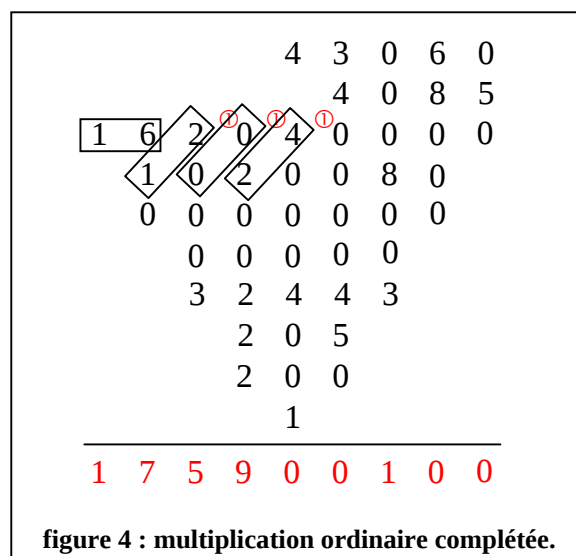


figure 4 : multiplication ordinaire complétée.

⁷ Au folio XV, verso.

⁸ [...] et aussi te fault noter que que par les deulx premieres exemples mis cy apres ne fault riens retenir mais poser tout au long [...]

Dès qu'ils ont compris la méthode, les élèves la trouvent « géniale » et s'appliquent à expliquer les chiffres donnés dans les lignes suivantes. Cependant, mon tableau ne correspond pas à la gravure originale du texte d'Ortega et il reste à comprendre la disparition des 0 superflus. Eh bien c'est tout simplement qu'ils sont superflus ! D'abord ceux qui naissent du produit par 0 : quand vous les faites disparaître et que vous « remontez » les chiffres dans leurs colonnes respectives afin de ne pas laisser de place vide, vous reconstituez la première ligne intermédiaire du texte original ; puis vous supprimez le premier des deux 00 obtenus lorsqu'on multiplie l'un des chiffres significatifs du multiplicateur par le dernier 0 du multiplicande (ce qui est à effectuer trois fois), et la remontée comble-vidé redonne la seconde ligne intermédiaire, et ainsi de suite. Il reste deux petits bémols :

1°) La gravure originale (figure 3) a été faite apparemment sans souci de l'alignement et un décalage horizontal rend les correspondances difficiles,

2°) Le texte espagnol, tel qu'on peut le consulter en ligne⁹ n'offre pas exactement la même illustration et la comparaison réserve quelques surprises : à vous de les découvrir ! (cf. figure 5.)

La primera.

	4	3	0	6	0	
5	2	1	5	3	0	0
8	3	2	4	0	4	8
0	0	0	0	0	0	0
4	1	6	1	2	0	4
	1	7	5	9	0	

La segunda.

	43060				
	4085				
2	1	5	3	0	0
3	4	4	4	8	0
0	0	0	0	0	0
1	7	2	2	4	0
1	7	9	0	0	100

La tercera.

	43060							
	4085							
1	7	2	2	4	0	0	0	0
	3	4	4	4	8	0	0	0
	2	1	5	3	0	0	0	0
1	7	9	0	0	1	0	0	0

figure 5 : multiplications dans le texte espagnol.

figure 5 : multiplications dans le texte espagnol.

En tout cas, cette première activité, si elle a dérouté la plupart des élèves au début, n'en a pas moins été un succès ; cela nous encourage toujours à poursuivre l'expérience, non ? C'est pourquoi je leur ai proposé un second extrait,¹⁰ en Devoir à la Maison, mais avec une préparation en module, car la première activité n'était pas suffisante pour que la plupart des élèves se sentent à l'aise en autonomie face au texte (c'est d'ailleurs une technique que j'utilise de plus en plus fréquemment, afin que mes élèves aient moins la tentation de tout simplement recopier leur devoir sur celui du premier âne venu.)

2. Seconde activité (Devoir à la Maison, préparé en classe) : Règles de testaments

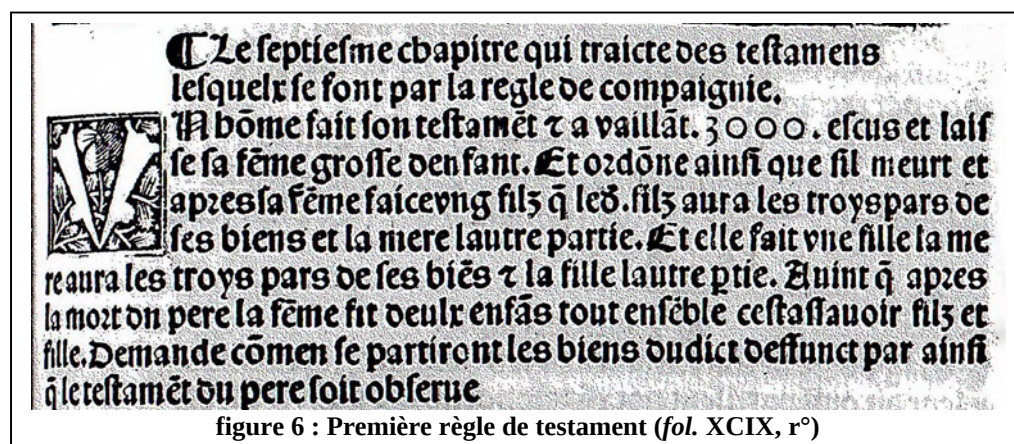


figure 6 : Première règle de testament (fol. XCIX, r°)

⁹ Voir la 3^e note de la première page de cet article ; l'illustration dont il est question se trouve à la 50^e vue, au fol. 24 v°.

¹⁰ Fol. 99, r°.

Une traduction en français « moderne » est nécessaire, c'est l'objet de la première question du devoir, traitée en classe oralement (les mots difficiles sont expliqués au préalable, quelques élèves donnent leur version). Comme les lecteurs ne sont pas forcément habitués à la lecture de ce genre de texte, une transcription suit :

Le septième chapitre qui traite des testaments, lesquels se font par la règle de compagnie. Un homme fait son testament, il possède 3000 écus vaillant et laisse sa femme enceinte¹¹. Il ordonne que s'il meurt et que sa femme enfante un fils, alors le fils aura les trois quarts de ses biens et sa femme un quart. Et [si] elle fait une fille, ce sera le contraire. Il advient qu'après la mort du père, sa femme donne naissance à deux enfants, un garçon et une fille. On demande comment seront répartis les biens du défunt afin que le testament soit observé [respecté].

La réponse fournie par Ortega est étonnante pour les élèves car elle ne contient pas la résolution algébrique familière qu'ils attendaient¹².

Tu feras ainsi : commence avec la fille car la fille a une partie. La mère doit avoir trois parts, donc pose 1 pour la fille et trois pour la mère. Le fils doit avoir trois fois autant que la mère et seront 9. Ores, ajoute ces trois sommes c'est à savoir 1, 3, 9 & font 13 pour partiteur. Ores, tu diras par la règle de trois : si 13 me donnent 3000, que me donneront 9 ? Multiplie et partis ainsi que la règle de trois le requiert & tu trouveras 230 écus & $\frac{10}{13}$, qui est la part de la fille. Et la mère 692 écus et $\frac{4}{13}$, et il revient au fils 2076 écus et $\frac{12}{13}$ d'écus.

Il s'agit de partages proportionnels, que les élèves ont déjà rencontrés dans leur scolarité, mais dont ils ne se souviennent que rarement, du moins n'ont-ils pas l'idée de mettre en rapport cette connaissance contemporaine avec le problème ancien. Au fond, et quelques élèves proposent immédiatement cette interprétation, il s'agit d'exprimer la part de chacun en fonction de la plus petite ; mais on peut également comparer la technique d'Ortega à celle qu'on utiliserait de nos jours : lors de la séance de module, j'ai demandé à chaque groupe d'effectuer la mise en équation du problème, puis de le résoudre « à la moderne » ; inspirés par le texte, certains ont proposé de nommer x la part la plus petite, la moyenne étant alors $3x$ et la plus grande $3 \times 3x$, soit $9x$. Le problème s'écrit donc : $x + 3x + 9x = 3000$, et la résolution ressemble fort à ce qui est fait dans le texte original, car on obtient la plus petite part en divisant 3000 par 13. L'explication de la méthode est l'objet de la deuxième question du devoir (« Résumez la solution et expliquez la méthode »). Mes expressions doivent être ambiguës, car la plupart des élèves refont le coup de la traduction mot-à-mot, sans se pencher sur le fond (partage proportionnel, ou division par la somme des coefficients) ; d'autre part, aucun d'entre eux n'a jugé utile d'expliquer la forme des résultats obtenus (j'avais pourtant présenté la *Disme* de Simon Stevin et précisé ce en quoi il s'agissait d'un texte révolutionnaire). Ce qui sera fait d'une autre façon à la troisième question.

Troisième question : est-ce vrai ou faux ? De même que pour la question précédente, très peu d'entre les élèves de seconde prennent cette question à un niveau général, malgré la comparaison, évoquée ci-dessus, entre la méthode arithmétique et la méthode algébrique. Il faut dire que la fin de l'extrait proposé est une vérification : *Et pour veoir si tu as bien fait, adjoute les 3 sommes ensembles et feront 3000 escus*. Une illustration est même donnée en gravure (figure 7 ci-après), qui induit peut-être l'idée de s'en tenir à cette simple vérification ? C'est également ici que certains pensent utile de justifier l'utilisation des fractions, puisque la disposition de la somme les mène à ajouter ensemble ces parties fractionnaires pour obtenir finalement 26 treizièmes d'écu, soit 2 écus, ce qui donne un compte « rond », et c'est gagné !

¹¹ Je vous laisse imaginer les réactions d'élèves, à la lecture de « femme grosse » ; il faut leur rappeler que le mot *grossesse* existe toujours... Ce qui est étonnant, c'est le manque de réaction, même des filles, à l'injustice sexiste dont sont victime l'épouse et la fille.

¹² Le formalisme littéral arrivera à la fin du 16^e siècle, en particulier chez Viète.

$$\begin{array}{r}
 3000 \\
 - 230 \\
 - 692 \\
 - 2076 \\
 \hline
 3000
 \end{array}$$

La fille
La mere
Le fils

figure 7 : fin de l'extrait proposé en DM

J'étais sûrement un peu optimiste... Mais quelques bons élèves semblent néanmoins avoir bien accroché à l'activité et se sont hissés (le pluriel masculin est commode mais trompeur, car je dois l'avouer, ce sont essentiellement des filles) à un niveau plus général. La correction repose plutôt sur l'aspect rédactionnel des devoirs, car beaucoup de ces jeunes gens semblent n'en avoir jamais vraiment fait par eux-mêmes et n'ont aucune idée de la manière de les présenter, ou de rédiger avec soin. Cependant, pour insister sur le côté superficiel des réponses données (qui se limitent parfois à de simples calculs sans texte), je présente la méthode de simple fausse position, telle qu'on en trouve dans de nombreux autres ouvrages de la même époque : poser arbitrairement un certain nombre (la *fausse position*, souvent prise égale à 1), lui appliquer les opérations indiquées par le problème, obtenir comme résultat une valeur différente de la donnée initiale, puis trouver la « vraie » solution par une règle de trois appliquée à la fausse position.¹³ Je précise que cette méthode s'applique à des problèmes linéaires (du premier degré sans constante), et que pour les problèmes « affines », il faut utiliser la double fausse position, que nous n'étudierons pas.

Mais les élèves les plus motivés (car il y en a) veulent en savoir plus et demandent des exemples issus du livre d'Ortega. Rien de plus facile, puisque j'ai préparé un diaporama de correction et que j'ai sous la main de nombreux extraits scannés du texte. Mais les élèves vont s'y casser les dents...

3. Troisième activité : méthode de fausse position.

Effectivement, c'est là que l'on s'amuse car le texte devient franchement désagréable, surtout pour le professeur, qui n'y avait pas compris pas grand' chose au premier abord... Et pas question de chercher un éclairage dans le texte en espagnol, aussi obscur que celui-ci¹⁴

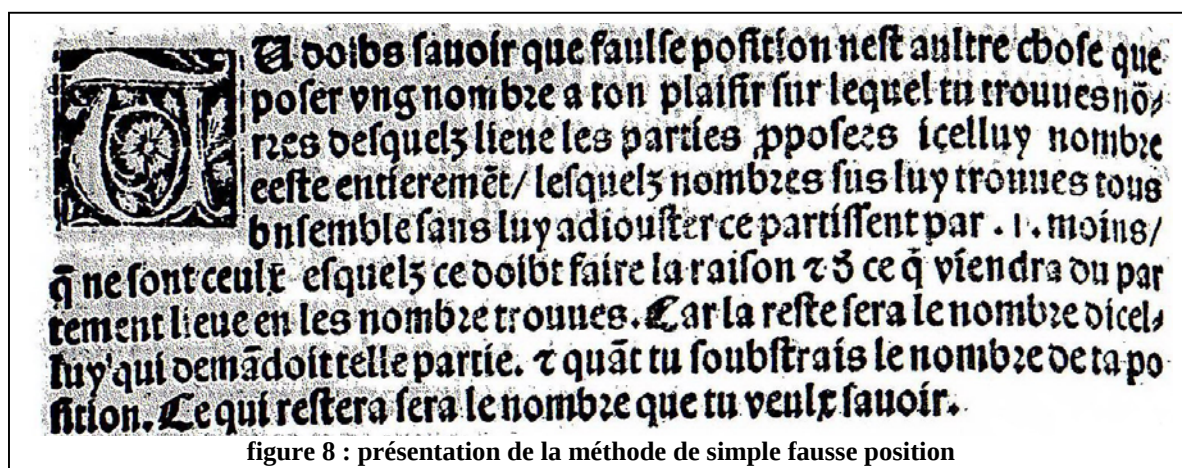


figure 8 : présentation de la méthode de simple fausse position

Le début de l'explication répond à la définition courant de la méthode de fausse position : on part d'une valeur arbitraire pour la solution requise, mais en principe la simple utilisation d'une règle de trois permet de trouver la valeur exacte. Si l'on cherche à traduire la prose d'Ortega en

¹³ Pour plus de précisions, on consultera la récente brochure de l'IREM de Toulouse « De l'arithmétique à l'algèbre, fausses positions et premier degré », Toulouse, 2008.

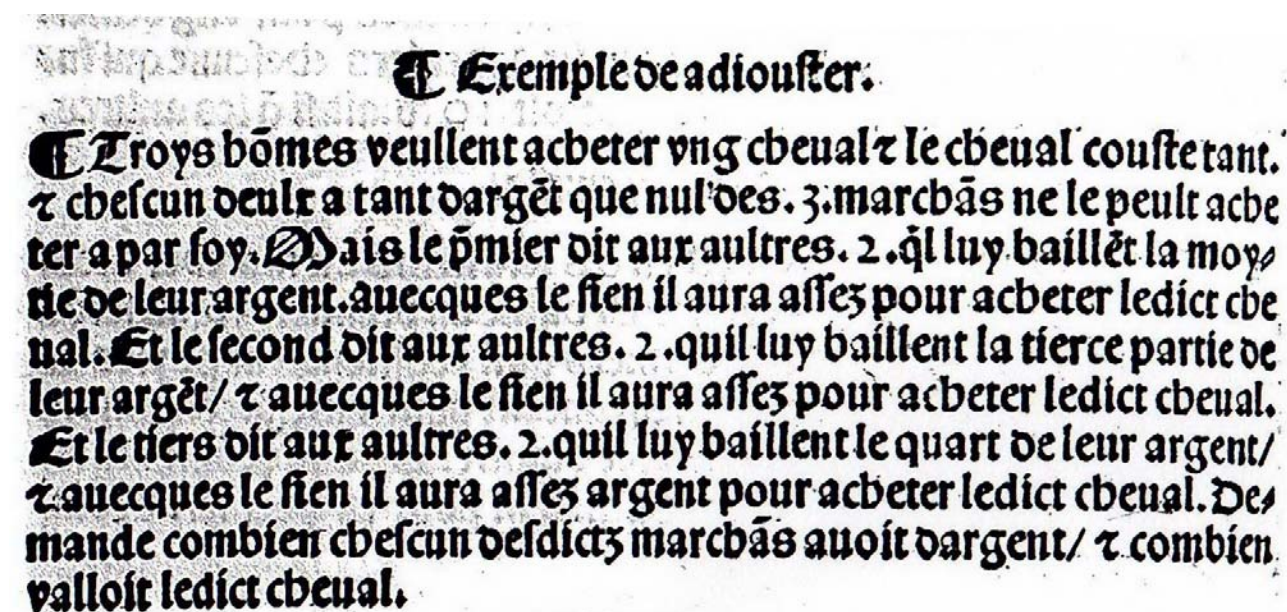
¹⁴ Fol. 160 v°, paginé par erreur 601, vue n° 307.

termes quasi-compréhensibles, il faut d'abord remarquer que la méthode est appliquée à une certaine catégorie de problèmes, à propos de sommes d'argent possédées par plusieurs personnes (une compagnie) et que l'énoncé donne systématiquement la proportion de l'argent des autres qu'il manque à chacun pour acquérir un certain bien ; pour résoudre cette catégorie de problèmes, il s'agit de choisir la position de départ, de trouver des nombres dont on doit soustraire les proportions données, et de diviser la somme des ces nombres par la quantité de personnes moins un. En soustrayant le résultat des nombres de départ, on doit trouver les résultats... Bon courage !

Une difficulté supplémentaire provient d'un problème typographique que je n'avais pas décelé à la première lecture : à la troisième ligne, il est question d'un nombre qui *eeste* complètement. Comme le verbe *ester* existe toujours en français, il était plausible de croire à une autre acception ancienne inusitée aujourd'hui. Mais quel rapport avec la justice ? La réponse m'est venue en plein TD, en regardant l'extrait projeté au tableau : il faut prendre en considération les premiers mots des lignes 2, 3 et 4, dont les premiers caractères ont été intervertis. Ainsi *no[m]/bres* donne-t-il *no[m]/rres*, *reste* devient *eeste* et *ensemble* est remplacé par *bensemble*, marrant, non ?

Mais cela ne nous avance guère dans l'intelligence de la méthode. Comme souvent dans la lecture d'ouvrages originaux, pour comprendre ce prologue il va falloir se reporter à l'exemple qui suit, ou aux quelques exemples qui suivent.¹⁵

Exemple 1 : *Trois hommes veulent acheter un cheval & le cheval coûte tant.*



Exemple de adiouter.
E Troys homes veullent acheter vng cheual & le cheual coustet tant.
 & chescun deulx a tant d'argēt que nul' des. 3. marchās ne le peult acheter a par foy. Mais le p̄mier dit aux aultres. 2. q̄l luy baillēt la moyē
 tie de leur argent. avecques le sien il aura assez pour acheter ledict che
 ual. Et le second dit aux aultres. 2. quil luy baillent la tierce partie de
 leur argēt / & avecques le sien il aura assez pour acheter ledict cheual.
 Et le tiers dit aux aultres. 2. quil luy baillent le quart de leur argent /
 & avecques le sien il aura assez argent pour acheter ledict cheual. Des
 mande combien chescun desdictz marchās auoit d'argent / & combien
 valloit ledict cheual.

Vous comprenez mieux ? N'ayez pas honte de répondre par la négative et pensez aux pauvres élèves qui avaient voulu en savoir davantage. Il s'agit d'un problème assez classique dont on retrouve diverses versions à travers l'histoire et jusque dans les colles des journaux pour enfants : une marchandise (ici, le mot est mal choisi puisqu'il s'agit d'un cheval) coûte un certain prix et aucune des trois personnes présentes n'a suffisamment d'argent pour l'acheter. Mais chacune d'entre elles n'a besoin que d'une portion de ce que possèdent les autres (la moitié pour le premier, le tiers pour le second et le quart pour le troisième) pour pouvoir acquérir le bien.

¹⁵ Les encouragements de Jean Terreran et une explication qu'il avait donnée d'une partie du problème ont été essentiels pour moi. Merci, Jean !

« Traduction » de la méthode d'Ortega :

Si l'on appelle a , b et c les sommes que possèdent respectivement les premier, second et troisième marchands et X le prix du cheval, on peut transcrire la méthode de la manière suivante (bizarrement, la fausse position choisie n'est pas une des quantités recherchées, mais elle correspond au montant total d'argent disponible après l'achat.)

On cherche une fausse position A divisible par 2, 3 et 4 : on prend $A = 12k$ (ici $k = 1$, donc $A = 12$)

Calcul pour le 1^{er} marchand : $A + \frac{1}{1} A = 2A = 24k$ (soit 24).

Calcul pour le 2^e marchand : $A + \frac{1}{2} A = 12k + 6k = 18k$ (soit 18).

Calcul pour le 3^e marchand : $A + \frac{1}{3} A = 12k + 4k = 16k$ (soit 16).

La somme des ces trois quantités est $24k + 18k + 16k = 58k$, que l'on divise par le nombre de marchands moins 1 : $58k \div 2 = 29k$.

Le prix du cheval est la différence entre ce résultat et la position A : $29k - 12k = 17k$, ici : 17.

La somme que possède chaque marchand est la différence entre le même résultat et celui de chacun des calculs initiaux : 1^{er} : $29k - 24k = 5k$ (c'est-à-dire 5) ; 2^e : $29k - 18k = 11k$ (c'est-à-dire 11) ; 3^e : $29k - 16k = 13k$ (c'est-à-dire 13) ; on obtient donc 5, 11 et 13, dont la somme est égale à 29.

Cela fonctionne, mais pourquoi ? (Ma question favorite aux élèves, leur hantise.)

Une explication possible :

Outre les notations ci-dessus, on appelle S la somme totale disponible ($S = a + b + c > X$). On a :

$X = a + \frac{1}{2}(b + c) = S - \frac{1}{2}(b + c)$, donc $S - X = \frac{1}{2}(b + c)$; de même, comme $X = b + \frac{1}{3}(a + c)$ et $X = c + \frac{1}{4}(a + b)$, on obtient successivement $S - X = \frac{2}{3}(a + c)$ et $S - X = \frac{3}{4}(a + b)$. On remarque que ces fractions sont de la forme $\frac{n}{n+1}$. Or la propriété fondamentale de ce type de fractions est : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = 1$, autrement dit il suffit d'ajouter sa n^e partie à une telle fraction pour obtenir 1 ; c'est ce qui est utilisé ici dans les calculs pour chacun des marchands et il est aisé de comprendre que la fausse position A de départ est la différence entre le prix de la bête et la somme totale disponible : $S - X = A = \frac{1}{2}(b + c) = \frac{2}{3}(a + c) = \frac{3}{4}(a + b)$

On a alors : 1^{er} marchand : $A + \frac{1}{1} A = \frac{1}{2}(b + c) + \frac{1}{2}(b + c) = (b + c) = S - a$

2^e marchand : $A + \frac{1}{2} A = \frac{2}{3}(a + c) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(a + c) = \frac{2}{3}(a + c) + \frac{1}{3}(a + c) = S - b$

3^e marchand : $A + \frac{1}{3} A = \frac{3}{4}(a + b) + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}(a + b) = \frac{3}{4}(a + b) + \frac{1}{4}(a + b) = S - c$

Il en découle que la somme de ces trois quantités est bien le double du montant total de l'argent disponible : $b + c + a + c + a + b = 2 \times (a + b + c) = 2S$, ou $S - a + S - b + S - c = 3S - (a + b + c) = 2S$. Le prix du cheval est $X = S - A$; le bien de chaque marchand est donné par la différence entre S et le résultat de chaque calcul respectivement : $S - (S - a)$, $S - (S - b)$ et $S - (S - c)$.

De quoi réfléchir, n'est-ce pas ? Un autre exemple permettra de consolider l'acquisition.

Exemple 3 : *Quatre hommes veulent acheter un cheval comme dessus.*

Le problème est du même tonneau, avec quatre personnes, comme il est dit dans l'énoncé. Cette fois-ci les proportions sont : moitié, tiers, quart et cinquième.

La traduction de la méthode utilisée est fort semblable à celle de l'exemple 1 : Si l'on

appelle a , b , c et d les sommes que possèdent respectivement les premier, second et troisième marchands et X le prix du cheval, on peut transcrire la méthode de la manière suivante :

La fausse position est $A \in (\text{ppcm}(2 ; 3 ; 4 ; 5))\mathbb{N}$, i.e. $A \in 60\mathbb{N}$: on prend $A = 60k$ ($A = 60$, $k = 1$)

Calcul pour le 1^{er} marchand : $A + \frac{1}{1}A = 2A = 120k$ (soit 120).

Calcul pour le 2^e marchand : $A + \frac{1}{2}A = 60k + 30k = 90k$ (soit 90).

Calcul pour le 3^e marchand : $A + \frac{1}{3}A = 60k + 20k = 80k$ (soit 80).

Calcul pour le 4^e marchand : $A + \frac{1}{4}A = 60k + 15k = 75k$ (soit 75).

La somme des ces quantités est $120k + 90k + 80k + 75k = 365k$, que l'on divise par le nombre de marchands moins 1 : $365k \div 3 = (121 + \frac{2}{3})k$.

Le prix du cheval est la différence entre ce résultat et la position A : $(121 + \frac{2}{3})k - 120k = (61 + \frac{2}{3})k$, soit, avec $k = 1$; $61 + \frac{2}{3}$.

La somme que possède chaque marchand est la différence entre le même résultat et celui de chacun des calculs initiaux (que je laisse au lecteur en exercice.)

Exemples suivants et conclusion

Ils sont cinq hommes qui veulent acheter une pièce de drap... (moitié, tiers, quart, cinquième et sixième ; fausse position : 60.)

Trois marchands veulent acheter une pièce de vellours... (tiers, quart et cinquième, fausse position : 60 aussi, quel succès !)

Et ainsi de suite...

L'explication de ces problèmes est assez difficilement passée, je dois l'avouer. Bien peu d'élèves ont pu la suivre jusqu'au bout, mais il faut convenir que c'était assez difficile. D'ailleurs, sans leur sollicitation, je n'aurais sans doute pas essayé de leur proposer ce texte-là (des Terminales auraient peut-être pu en tirer parti, mais en ce qui concerne les Secondes, le manque de familiarité avec l'algèbre est un obstacle, ainsi que le manque de désir d'aller au bout de la solution). Certains d'entre eux l'ont pris pour un « délire de prof de maths », attendant poliment la fin de l'heure et oubliant immédiatement ces mauvais souvenirs. Je ne tenais pas à insister, car ils en auraient conçu une vision négative des activités de lecture de textes anciens (trop ardues), voire des mathématiques en général. Les plus intéressés ont convenu qu'ils avaient besoin de plus de temps pour tirer parti de l'activité et nous nous sommes quittés bons amis. L'extrait donné en interrogation la semaine suivante (problème de la lance plantée en terre, résolu par fausse position simple) revenait à nos premières amours.

Un des aspects regrettables des activités de lecture de textes anciens en classe est de ne trouver de véritable écho qu'auprès de bons élèves lorsque la compréhension des textes n'est pas immédiate et nécessite un travail d'élaboration. Pierre Collaudin avait exprimé cette idée après avoir travaillé avec ses élèves de Terminale sur des quadratures d'Archimède, sujet difficile mais combien exaltant pour qui cherche à sortir des sentiers battus ! Le défi reste lancé : comment faire en sorte d'impliquer tous les élèves dans des sujets d'étude qui dépassent la simple application de recettes ? Comment susciter chez eux l'intérêt pour des aspects difficiles de la discipline et le désir d'approfondir ? Une carrière entière (même si sa durée a tendance à s'allonger en ce moment) suffira-t-elle pour tenter de relever ce défi ?