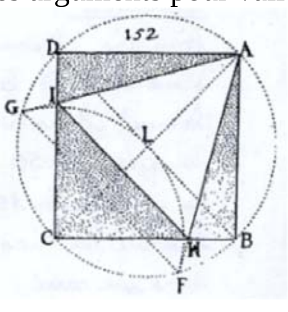
Inscrire un triangle équilatéral dans un carré
Une activité de collège ? de lycée ? de spécialiste ?

***Marie-Noëlle Racine**, professeure lycée le castel, Dijon*

Inscrire un triangle dans un carré. Facile ! Inscrire un triangle équilatéral dans un carré. C'est déjà moins facile ! Si vous tentez quelques figures sur papier, vous pouvez trouver quelques solutions en plaçant un sommet du triangle au milieu d'un côté du carré (voir figure 5), ou, comme Marolois, en plaçant un sommet du triangle sur un sommet du carré (voir figure 152 ci-dessous). Ces solutions sont des cas particuliers faisant apparaître des propriétés de symétrie axiale. Mais, peut-on obtenir un triangle équilatéral inscrit dans un carré en plaçant un sommet du triangle sur un point quelconque d'un côté du carré ? Et, les solutions trouvées (on en a déjà deux) sont-elles toutes isométriques ?
Il m'a semblé intéressant de poser la première question à mes élèves de 1L option maths.
En 2005, au programme de l'option, figurent moult notions de géométrie plane, constructions, résolutions de petits problèmes et énoncés des justifications des étapes successives. Ayant déjà terminé la partie cours et exercices, je décide de préparer un sujet que je donnerai en devoir surveillé lors des épreuves longues.
L'énoncé proposé aux élèves et reproduit en annexe 1 comporte une brève partie de présentation de l'ouvrage dont est tirée la proposition, ainsi que l'exposé des motifs et, donné in extenso, le texte de la proposition elle-même, de la description de la figure et, en annexe au devoir, une reproduction du livre (texte et figure associée, cf annexe 1 de cet article).
La description permettra aux élèves de reproduire la figure, question a, ce que 71% des élèves ont parfaitement réussi, malgré certains mots un peu désuets employés par Marolois (les deux autres élèves, sur sept au total, n'ayant absolument pas abordé cet exercice de géométrie).
La démonstration demandée en b devait permettre de justifier la validité de la construction (mes collègues consultés ont d'ailleurs trouvé cette validation difficile et ont proposé des solutions en annexe 2). Seules trois élèves (sur les cinq qui ont commencé l'exercice) ont abordé cette démonstration, avec plus ou moins de bonheur. Elles n'ont pas persévéré, c'était le dernier exercice de leur premier devoir de trois heures (comme au bac), pourtant certaines élèves sont sorties en avance, pensant qu'elles avaient suffisamment bien travaillé pour le reste du devoir ! Aucune n'a su donner tous les arguments pour valider la construction.



Les droites (GF), (IH), (DB), ayant l'air parallèles, ont fait envisager d'utiliser le théorème de Thalès ; ou bien le cercle tracé a fait penser à des angles inscrits ; ou bien encore, avec toujours les droites (IH), (GF), mais cette fois perpendiculaires à (AC) et avec des longueurs égales, il y a, sans la citer, l'idée de (AC) axe de symétrie de la figure.

Une élève se placera aussi dans un cas particulier avec la médiane des côtés du carré -droite joignant les milieux- (au lieu de la diagonale AC) comme axe de symétrie de son triangle équilatéral solution dans la question c (voir figure 5). Mais aucun des arguments avancés n'était étayé et aucun élève n'a pu conclure.

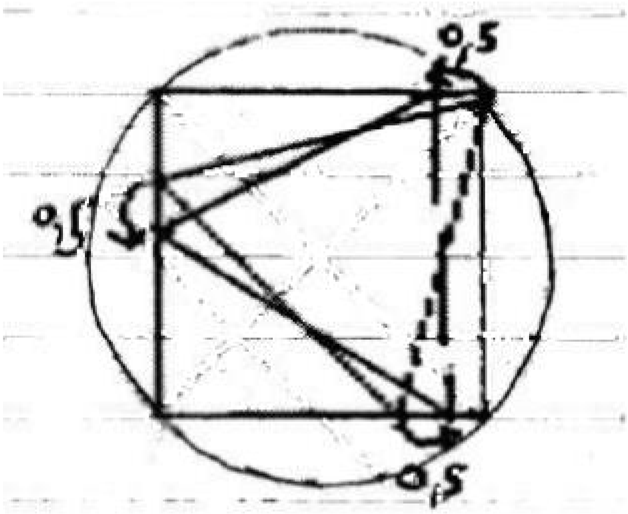
Pourquoi ont-elles eu du mal à démontrer que les triangles AGF et AIH sont équilatéraux ?

- je l'ai déjà dit, c'était le dernier exercice d'un devoir long et les élèves ne sont pas habituées à « chercher » aussi longtemps : c'est le premier devoir de trois heures en maths, ce ne sont pas des spécialistes bien qu'elles aient choisi l'option. Travailler, et réussir à peu près, de manière intense pendant 2 heures, cela leur a paru suffisant pour obtenir une note « correcte » au devoir surveillé.
- étant en section littéraire, elles n'imaginaient pas devoir justifier comme cela lors d'un devoir. Elles acceptent de le faire en cours mais sont réticentes en ce qui concerne les devoirs surveillés.
- les élèves sont habituées à chercher oralement, à discuter entre elles, mais cette activité est différente d'une recherche écrite. Dans les devoirs maison, elles ont pu penser les choses au fur et à mesure, se poser des questions, m'en poser tout au long d'une semaine avant de me rendre le devoir.
- la construction leur a été dictée, elles n'ont pas eu à l'inventer et ont eu du mal à identifier les hypothèses des propriétés qu'elles « voyaient ».

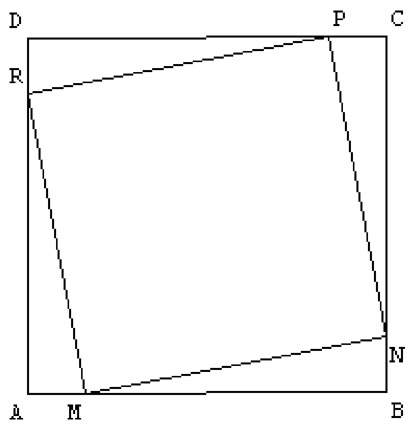
Alors, que faire ? Dois-je les forcer à rédiger une démonstration comme elles en ont fait jusqu'à présent ? Celle-ci était-elle hors de leur portée et devais-je les guider ? Je choisis cette deuxième solution et on fait une recherche orale en classe puis une synthèse. Je préfère qu'elles concentrent leur énergie sur la troisième question, facultative lors du contrôle, pourtant abordée par les élèves les plus dynamiques en cours.

Pour cette question c, il y a des essais comme :

Figure 1, reproduction de la copie d'élève



Inspiré de (figure2)



L'élève qui a proposé la figure 1 ci-dessus a tout de suite su me dire, quand j'ai rendu le devoir, que sa méthode ne convenait pas ici. Preuve qu'elle avait réfléchi, mais sans approfondir, en rentrant chez elle, sur son dessin fait « à la va-vite » pendant l'épreuve longue. On exhibe d'ailleurs rapidement un contre-exemple (voir figure 3 ci-dessous)

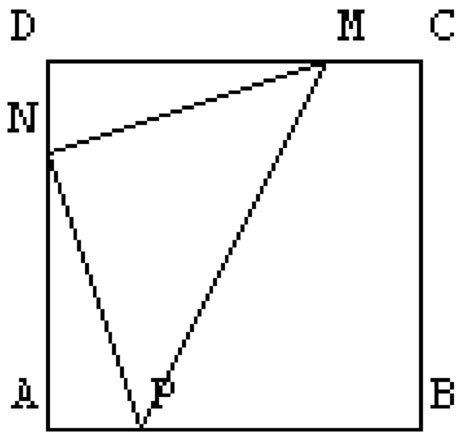


Figure 3

Une autre élève a réussi au « pifomètre », mais sa figure (voir la reproduction ci-dessous) est tout de même intéressante car cela donne à penser qu'il est possible de tracer un triangle équilatéral inscrit dans le carré en se fixant un sommet M quelconque sur [AB] :

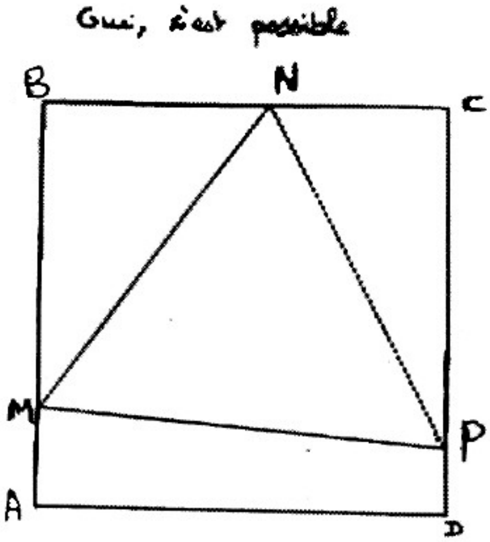


Figure 4, reproduction de figure d'élève

Je donne le problème à chercher pour la fois suivante. Mais les résultats des recherches ne sont guère satisfaisants. Les élèves n'ont fait qu'un seul essai et s'en sont contentées : les sommets du triangle ne sont pas quelconques sur les côtés du carré, l'un est au milieu d'un côté et les deux autres sont tels qu'un côté du triangle est parallèle à un côté du carré.
Quoiqu'il en soit, elles ont cherché, trouvé et sont contentes d'elles.

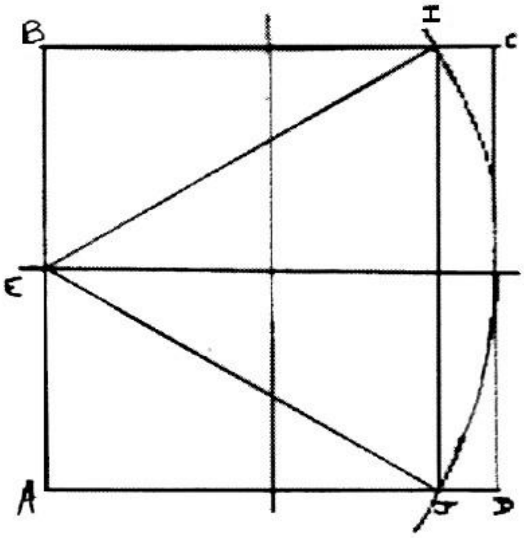


Figure 5 : exemple de figure d'élève

Aurait-il fallu que je donne encore d'autres consignes pour éviter ce cas ? Je n'ai pas voulu le faire et l'exercice s'est arrêté là.
A posteriori, je pense qu'on pourrait organiser une séquence de recherche en utilisant les logiciels de géométrie, pour que les élèves tâtonnent en déplaçant des points sur les côtés, ou qu'ils cherchent un triangle semblable à un triangle qui n'aurait que deux sommets sur deux côtés consécutifs du carré, ou sur deux côtés opposés du carré, triangle qui répondrait complètement à la question posée.

Quelle que soit la position de M sur [AB], il est possible de construire N et P sur deux des autres côtés du carré, tels que le triangle MNP soit équilatéral. La construction sur papier étant ensuite à rechercher. Le logiciel permet de prouver qu'une solution existe, mais ne donne pas le moyen de la « construire ». C'est un travail qui sera mené une prochaine année avec des élèves (voir en annexe 3 des pistes de travail). Par ailleurs, grâce à plusieurs solutions trouvées, on constaterait rapidement que les triangles équilatéraux inscrits dans un carré ne sont pas tous isométriques.

Conclusion :
reproduire une figure, même avec un texte contenant un vocabulaire désuet pour nos élèves du XXI^{e} siècle, est tout à fait un exercice à la portée de nos jeunes. Réfléchir à une construction, est un exercice encore apprécié, mais démontrer et rédiger reste un art peu prisé, que nos élèves pensent réservé à une élite scientifique. Il a fallu, pour ces littéraires, que j'insiste, tout au long des deux années que j'ai passées avec elles (1ère et Terminale en 2005 & 2006), sur la rédaction. Toutefois, je me suis chaque fois contentée, pour laisser aux élèves le plaisir de la recherche et de la découverte, de ne demander la rédaction que pour quelques questions, et non pas systématiquement. Notamment, je me suis souvent contentée de demander de laisser les traits de construction qui me permettaient de comprendre la démarche des élèves sans les obliger à rédiger une démonstration rigoureuse.
Utiliser ce texte du XVII^{e} siècle a permis de poser un problème aux élèves et de leur faire chercher une solution. Utiliser ce texte a aussi permis de donner une solution simple, dans un cas particulier, ce qui aide les élèves qui ne voient pas quel est le problème ou qui se découragent vite. Néanmoins, le plaisir de faire des mathématiques, c'est le plaisir de trouver, ou au moins celui d'essayer des pistes de recherche. C'est ce qu'ont vécu mes élèves, pour deux d'entre elles lors du devoir surveillé et, pour les autres, lors du corrigé (quand il s'est agi de trouver des contre exemples aux solutions avancées, notamment), ou à la maison. Même s'il a été frustrant pour moi d'arrêter la recherche après le deuxième cas particulier donné par les élèves, une autre solution que celle de Marolois a été trouvée par les élèves et l'activité leur a bien plu.

ANNEXE 1 : 2 pages manuscrites d'énoncé

Exercice 4 :

Dans une " Géométrie " pratique parue en 1616, le mathématicien Samuel Marolois explique, dans la proposition 50, s'appuyant sur la construction 152, comment inscrire un triangle équilatéral dans un carré.

« proposition, 50.

Dans un quaré inscrire un triangle equilateral.

Construction. 152.

Soit le quaré A B C D. dans lequel on veult inscrire un triangle equilateral et equiangle. Soyent tirees les Diagonales AC. et BD. s'entrecoupans en L. du centre L. a la distance LA. soit descript le cercle A B C D. soit aussi icelle distance mise de C. sur la circonference en G. et en F. [...] et desdits points G. et F. du point A soyent tirees les lignes A, F. et A, G. qui couperont le quare aux points H. et I. et diceux tiree la ligne H, I. sera trouve le triangle requis. Qu'il soit ainsi il apart par ce que le coste G, F. estant parallele au coste H I. que le triangle A G F. est proportionelle au triangle A H I. [...] »

1° Marolois a décrit une construction dans un cas particulier où un sommet du triangle équilatéral est un sommet du carré, et où la figure présente un axe de symétrie.

a) Reproduire cette figure

b) Démontrer, en langage moderne, avec les théorèmes que vous connaissez, que les triangles A G F, puis A I H sont bien des triangles équilatéraux

question facultative

c) Est-il possible de construire un triangle équilatéral MNP, inscrit dans le carré ABCD sans qu'un sommet du triangle soit sur un sommet du carré ? Si oui, donner un exemple et décrire la construction.

NOM-Prénom :

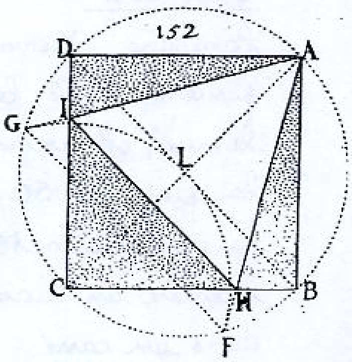
Propoſition, 50.

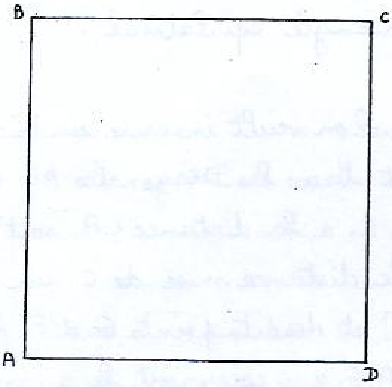
Dans un quaré inſcrire un triangle equilateral.

Conſtruction.

152.

Soit le quaré A B C D. dans lequel on veult inſcrire un triangle equilateral & equiangle. Soyent tirees les Diagonales A C. & B D: s'entrecoupans en L. du centre L. a la diſtance L A. ſoit deſcript le cercle A B C D. ſoit auſſi icelle diſtance miſe de C. ſur la circonference en G. & en F. [...] & deſdits points G. & F. du point A ſoyent tirees les lignes A, F. & A, G. qui couperont le quare aux points H. & I. & diceux tiree la ligne H, I. ſera trouve le triangle requis. Qu'il ſoit ainſi il apart par ce que le coſte G, F. eſtant paralelle au coſte H I. que le triangle A G F. eſt proportionelle au triangle A H I. [...]





Remarque : les carrés ABCD construits sur l'énoncé permettent aux élèves de faire des essais sans avoir à construire ces susdits carrés, ce qui leur permet de se concentrer sur le problème à résoudre.

ANNEXE 2 : Commentaires et solutions :

Question 1a : *reproduire cette figure*

Certes, la figure est donnée page suivante, mais il n'est pas inutile de demander aux élèves de la reproduire car le langage de Marolois n'est pas leur langage habituel et d'autre part, ils se familiarisent mieux avec les hypothèses.

Question 1b : un exemple de solution à proposer :

Les deux cercles de la figure sont de même rayon r, de centres respectifs L et C, la droite (LC), c'est-à-dire aussi (AC) est axe de symétrie de la figure et F est le symétrique de G, de même, en ajoutant que (AC) est aussi axe de symétrie du carré ABCD, H et I sont symétriques par rapport à (AC).

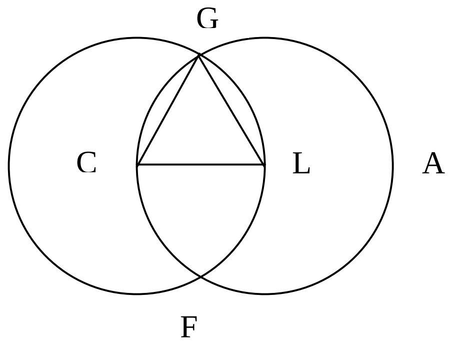


Figure 6, (figure-clé, extraite de la figure 152)

AFG est tel que AF=AG. De plus, FCL et GCL étant équilatéraux (c'est toujours la figure classique –voir ci-dessus- avec deux cercles de centres respectifs L et C, de mêmes rayons, sécants en F et G), l'angle au centre FLG mesure 120° et l'angle inscrit FAG mesure 60°. Le triangle AFG est équilatéral, de même que le triangle AHI (isocèle de sommet A et ayant un angle de 60°)

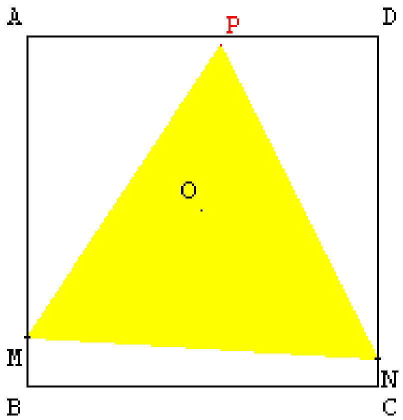
AHI est donc un triangle solution du problème puisqu'il est équilatéral, inscrit dans le carré ABCD.

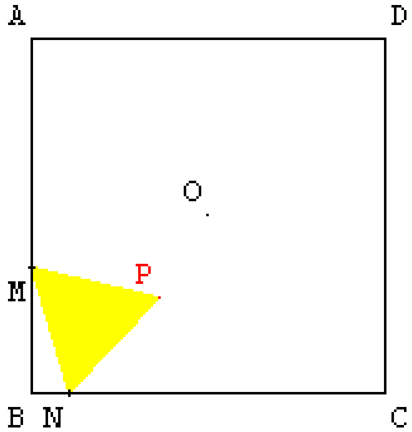
ANNEXE 3 : Diverses solutions obtenues avec GEOPLAN ou CABRI :

Sur GEOPLAN : la figure qui suit a été conçue avec l'aide de Sylvie Lanaud, professeure au collège Bachelard à Dijon.

Historique de la figure	*commentaire*
O point libre	*On construit un carré ABCD de centre O*
A point libre	
B image de A par la rotation de centre O et d'angle 90 (degrés)	
C image de B par la rotation de centre O et d'angle 90 (degrés)	
D image de C par la rotation de centre O et d'angle 90 (degrés)	
M point libre sur la droite (AB)	*Ces points M et N pourront se déplacer sur les côtés [AB] et [BC] (et même sur les droites (AB) et (BC), en dehors du carré)*
N point libre sur la droite (BC)	
P est l'image de N par la rotation de centre M et d'angle 60 (degrés)	*On a les 3 sommets d'un triangle équilatéral MNP pour lequel M et N sont sur les côtés du carré ABCD*
T1 est le polygone MNP	*Cette « création » permet de visualiser les côtés du triangle, puis de le colorier ensuite*
Par la suite, on peut rajouter :	
long affichage de la longueur MN	*Cela permettra de vérifier si tous les triangles équilatéraux inscrits dans le carré ont la même taille*
Pour compléter la recherche, on sera amené à construire :	
N' point libre sur la droite (DC)	
P' image de N' par la rotation de centre M et d'angle 60 (degrés)	
T2 polygone MN'P'	*Le triangle MN'P' est équilatéral et a deux sommets sur des côtés du carré ABCD*

Figures de départ pour des recherches (figures 7 & 8) :





Pour résoudre le problème, on peut faire remarquer aux élèves qu'il suffit de se cantonner à un point M situé sur [EB] (où E est le milieu du côté [AB]).

Ce que peuvent alors faire les élèves :
Choisir un point M sur [EB]. Pour faciliter la recherche initiale, on peut demander aux élèves de choisir M assez près du milieu de [AB], comme sur la figure 8.
En déplaçant le point N sur le côté [BC], et même en dehors du carré, sur la droite (BC), on constate que l'on trouve bien une position de N telle que les sommets du triangle équilatéral MNP soient sur les côtés du carré ABCD.
Voici par exemple une figure finale :

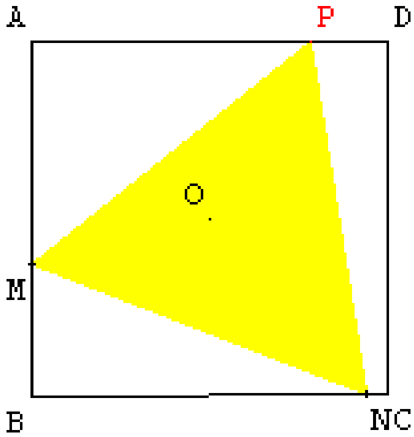


Figure 9

Cependant, si l'on choisit M plus proche de B (comme sur la figure 7), le point N (tel que P appartienne à (AD)) peut être, sur la droite (BC), mais en dehors du carré. Ce qui ne fournit pas une solution au problème posé !
Prenons M sur [EB], proche du point B. On est alors amenés à créer un point N' sur la droite (CD), puis à terminer le triangle équilatéral MN'P' par un point P'. En déplaçant N' sur la droite (CD), on trouve la position de N' qui donne une solution MN'P' au problème posé, à savoir un triangle équilatéral MN'P' inscrit dans le carré ABCD, comme par exemple sur la figure suivante :

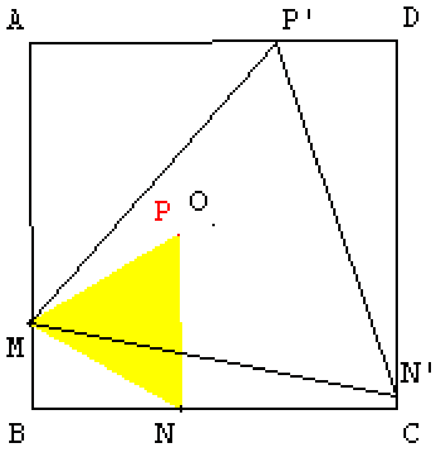


Figure 10

Compléments :
Appelons E le milieu de [AB], trouver une solution pour tous les points M du segment [EB] résoudra le problème pour tout point M sur les côtés du carré ABCD, les autres demi-côtés jouant des rôles similaires.
Plus M est proche du milieu E de [AB], plus on a de « chances » de trouver le triangle MNP avec N sur [BC], plus M est proche de B et plus on a de « chances » de trouver le point N sur [CD]. On

remarque que la position « critique » est telle que le triangle MNP aura son sommet N en C, ce qui revient au cas étudié lors de la première partie de l'exercice avec le texte de Marolois.

Prolongements possibles dans certaines classes comme en S par exemple :
Expérimentalement, avec le logiciel de géométrie, on a trouvé une solution pour chaque position de M sur [AB]. Mais rien n'a été justifié, et on n'a pas trouvé de construction des sommets P et N connaissant M sur le côté [AB].
On peut revenir à la figure sur GEOPLAN pour cette fois, par exemple, demander la « TRACE » du sommet P lorsque N se déplace sur le côté [BC]. On constate alors que tous les sommets P sont alignés ! Quelle est cette droite ? En fait, dans la figure 11, il s'agit de l'image de la droite (BC) par la rotation de centre M et d'angle 60°. Si N' est sur [CD], comme dans la figure 12, ce sera l'image par la rotation de centre M et d'angle 60°, de la droite (CD). Cette constatation peut mener à la construction du sommet P a priori, par intersection de cette droite avec le côté [AD], puis à celle de N, 3ème sommet du triangle équilatéral MNP, avec N antécédent de P par l'une ou l'autre des deux rotations citées plus haut. Il est alors aisé de démontrer que le triangle MNP, est une solution au problème posé, puisque, par construction, P est l'image de N par une rotation de centre M, d'angle 60°.

Exemples de figures :

1er cas : M est proche du milieu E de [AB], N est sur [BC]. La figure initiale pour la recherche est grisée, la figure solution est le triangle Mnp, la droite, image de (BC) par la rotation de centre M, d'angle 60° est représentée en pointillés, c'est aussi la trace laissée par le point P lorsqu'on déplace N sur (BC).

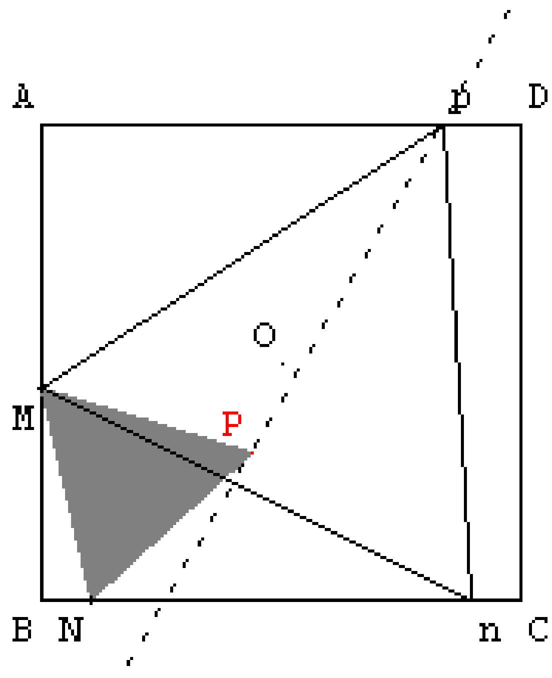


Figure 11

2ème cas : M est proche de B, N est sur [CD]. La position de p est obtenue, comme dans le cas 1, en déplaçant le point N le long du côté [CD]. Sur la figure ci-dessous, la figure initiale pour la recherche est grisée, la figure solution est le triangle Mnp, la droite, image de (CD) par la rotation de centre M, d'angle 60° est représentée en pointillés, c'est aussi la trace laissée par le point P lorsqu'on déplace N sur (CD).

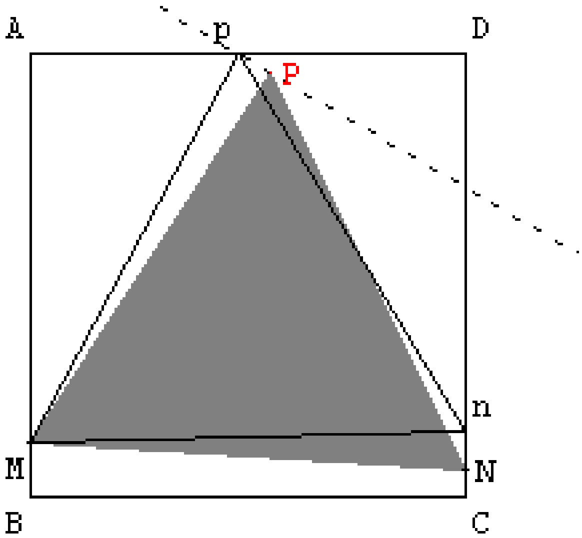
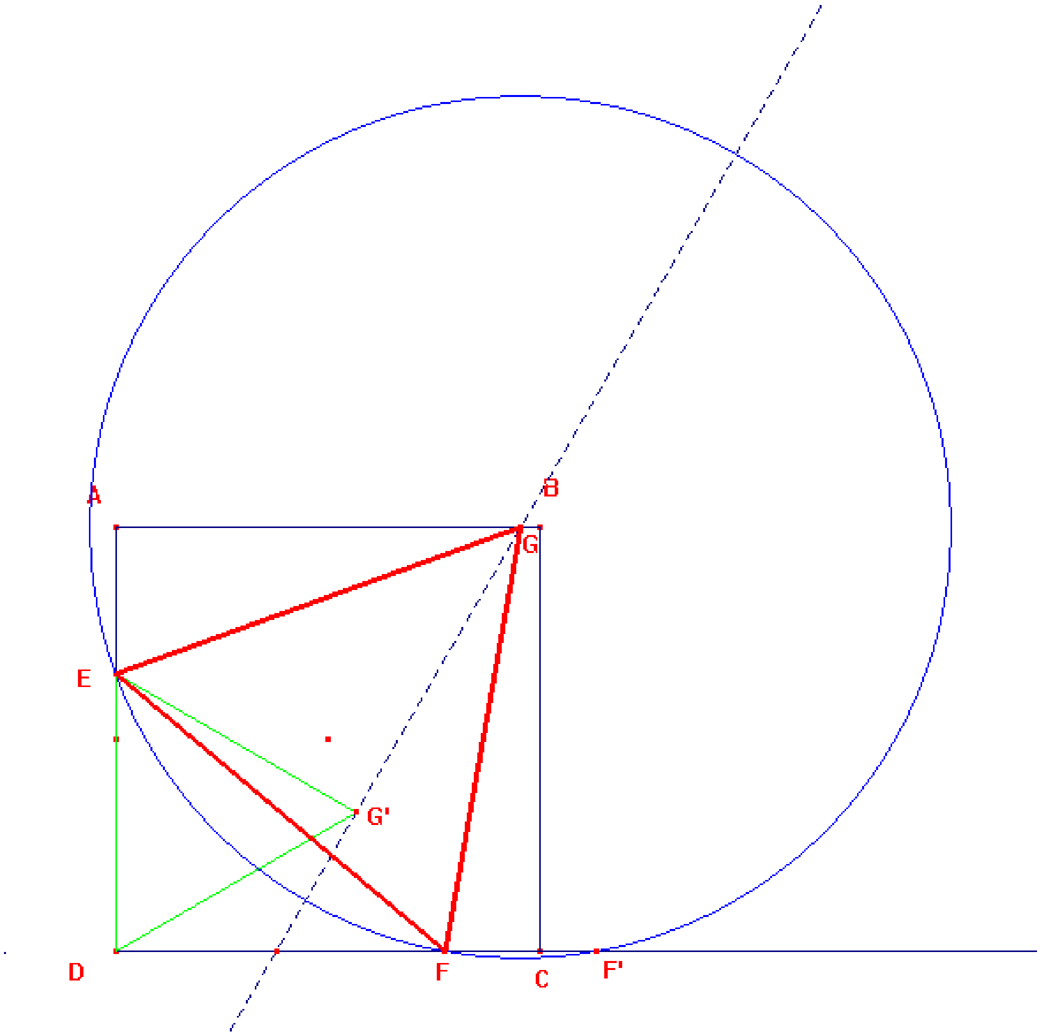


Figure 12

Il existe une infinité de triangles MNP équilatéraux inscrits dans le carré ABCD, ils ne sont pas tous isométriques. Peut-on déterminer la position de M qui donnera le triangle d'aire maximale ou le triangle d'aire minimale ? Ceci est une autre histoire !…

Autre exemple de figure obtenue avec le logiciel CABRI :
Cette figure a été conçue par Victor DIAFERIA, professeur au lycée du Castel, à Dijon, suite à la présentation de cette activité à l'IREM de Dijon en octobre 2006.

```
FIGURE CabriII vers. MS-Windows 1.0

Window center x: 0.370416666666667 y: 3.4925 Window size x:
26.6435416666667 y: 16.430625

1: Pt, 0, CN:0, VN:1
R, W, t, DS:1 1, GT:1, I, nSt
Val: 0 0

2: Axes, 1, CN:1, VN:3
Gr, W, t, DS:1 1, GT:0, I, nSt
Const: 1, Val: 1 0, 0 1

3: Pt, 0, CN:0, VN:1
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Val: -8.83708333333333 2.83104166666667

"C", NP: -217, 21, NS: 11, 18
4: Pt, 0, CN:0, VN:1
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Val: -5.66164961930354 -0.343961888366359
p: 0, System, S: 0 C: 3 Fa: 0

"D", NP: -481, 17, NS: 12, 18
5: PReg, 262145, CN:2, VN:6
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Const: 3 4
p: 0, System, S: 0 C: 3 Fa: 0

"A", NP: -470, -253, NS: 10, 18
6: PReg, 1, CN:1, VN:0
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Const: 5
p: 0, System, S: 0 C: 3 Fa: 0

"B", NP: -212, -257, NS: 12, 18
7: PReg, 2, CN:1, VN:0
R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Const: 5
p: 0, System, S: 0 C: 3 Fa: 0

8: PolReg, 0, CN:4, VN:0
V, W, t, DS:1 1, GT:0, V, nSt
Const: 4 5 6 7
```


A
B
G
E
G'
D
F
C
F'