Les équations diophantiennes[1] *(1) chez Bézout*[2] *(2)*

Jean TERRERAN (avec la collaboration de Thierry DASSÉ et Mickaël VÉDRINE)
Lycée Catherine et Raymond Janot de Sens

Une équation diophantienne est une équation linéaire à coefficients entiers, à deux inconnues entières, par exemple : $17x - 11y = 542$.
Leur résolution a figuré pendant longtemps au programme de terminale C et aujourd'hui elle est inscrite au programme d'arithmétique de la spécialité en terminale S.
La méthode étudiée en cours était utilisée par Lagrange et Gauss.
Le texte de Bézout, plus ancien, est extrait du tome 2 du « Cours de Mathématiques, à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine », disponible à la Bibliothèque Municipale de Sens. Il met en œuvre, comme souvent chez cet auteur, un procédé original qui, bien que technique, semble plus intuitif, et donc plus « lisible ».
Il était donc tentant d'en proposer l'étude aux élèves.

Acte 1 : Dans la classe de Terminale S spécialité de Thierry Dassé en 2005

C'est une classe de vingt et un élèves, de niveau correct.
Nous leur présentons brièvement Etienne Bézout et l'objectif de la séance : « Etudier une équation diophantienne à partir d'un document du XVIII^e siècle écrit par ce mathématicien. »
Les élèves ont déjà résolu ce type d'équation en cours.
Ils se mettent rapidement au travail en suivant les indications fournies et en posant des questions aux deux professeurs (voir en annexe 2 le document fourni aux élèves).

Déroulement de la séance (1h)

Passé l'effet de surprise créé par la découverte de l'orthographe du français du XVIII^e siècle, les élèves effectuent les calculs avec aisance et reconnaissent l'algorithme d'Euclide.
Quant à la méthode étudiée auparavant en cours, question 2° c, elle est bien maîtrisée ; les élèves procèdent ainsi :
Les nombres 17 et 11 étant premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que :

$$17u + 11v = 1.$$

En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres 17 et 11, il est assez rapide de trouver des valeurs de u et v.

[1] Diophante est un mathématicien d'Alexandrie qui vécut probablement entre 150 et 350 de notre ère.
[2] Etienne Bézout est un mathématicien français né en 1730 à Nemours, où le lycée porte son nom, mort en 1783 aux Basses-Loges (près de Fontainebleau).
Il a enseigné dans une école militaire et à écrit un Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine (en cinq tomes).
Le théorème de Bézout sur les nombres premiers entre eux, utilisé dans cette activité, est maintenant attribué au mathématicien, philosophe, traducteur de Diophante, Bachet de Méziriac (1581-1638), Bézout l'ayant appliqué aux polynômes.

$$
\begin{aligned}
& 17 = 1\times 11 + 6, \\
\text{donc} \quad & 6 = 1\times 17 - 1\times 11. \\
& 11 = 1\times 6 + 5, \\
\text{donc} \quad & 5 = 1\times 11 - 11\times 6 \\
& \quad = 1\times 11 - 1\times (1\times 17 - 1\times 11) \\
& \quad = -1\times 17 + 2\times 11. \\
& 6 = 1\times 5 + 1, \\
\text{donc} \quad & 1 = 1\times 6 - 1\times 5 \\
& \quad = 1\times (1\times 17 - 1\times 11) - 1\times (-1\times 17 + 2\times 11 \\
\text{Finalement} \quad & 1 = 2\times 17 - 3\times 11.
\end{aligned}
$$

En général la méthode permettant d'obtenir u et v est programmée sur les calculatrices des élèves (voir l'organigramme en annexe 1).

Ayant obtenu $1 = 2\times 17 - 3\times 11$, on obtient une première solution de l'équation en multipliant par 542 : $17\times 1084 - 11\times 1626 = 542$.
Si (x, y) est une autre solution, on a aussi : $17\times x - 11\times y = 542$
Et, en soustrayant membre à membre, il vient : $17\times (x - 1084) = 11\times (1626 - y)$

17 divise donc $11\times(1626 - y)$.
Or il est premier avec 11, donc il divise $1626 - y$.
On obtient $y = 17k + 1626$, et après substitution $x = 11k + 1084$, avec k entier.

Mais beaucoup peinent à montrer que l'on obtient bien les mêmes solutions, l'aide du professeur est souvent requise.

Commentaires :

Les élèves semblent bien comprendre la démarche de Bézout. Mais leurs doutes concernant l'équivalence des deux méthodes n'ont pu être entièrement levés par le raisonnement, certains ont eu besoin d'effectuer des calculs détaillés pour s'en convaincre.

Résultats du devoir sur feuille :

Un élève a fait une erreur en « oubliant » la première équation : il obtient donc une infinité de solutions.
Plusieurs élèves ont été maladroits (par exemple : « ils tirent la valeur de l'inconnue qui a le plus grand coefficient », ils font donc un tour pour rien.)

Commentaires :

Les copies sont de bonne qualité, l'expression est soignée. Certains élèves se prennent au jeu et réutilisent des expressions de Bézout ; ainsi l'expression « en prenant pour *s* tel nombre entier qu'on voudra » a été préférée à « quel que soit le nombre entier *s* ».
Mais nous étions curieux de découvrir les réponses à la dernière question.
C'est peut-être la première fois que les élèves peuvent s'exprimer sur des méthodes, ils l'ont fait très sérieusement en développant souvent une argumentation intéressante pour expliquer leurs choix (voir le détail en annexe 5).
Les réponses peuvent se répartir en trois catégories :
1. Les élèves qui préfèrent la méthode vue en cours parce qu'elle est plus courte, l'autre nécessitant trop de changements de variables (Voir en annexe 4 comment Bézout donne un moyen de raccourcir sa méthode).
2. Les élèves qui préfèrent la méthode de Bézout, car on y voit mieux la démarche.

3. Les élèves qui font confiance à l'Institution : ils pensent que si l'on utilise une autre méthode que celle de Bézout dans les programmes officiels, c'est sûrement parce qu'elle est meilleure!
Cette dernière réponse m'a surpris, elle n'a pas surpris mon collègue : il s'attendait à ce que certains s'en tiennent à la première méthode étudiée.

L'idée est donc venue de proposer l'année suivante l'étude de ce texte à la classe de spécialité, mais cette fois, avant que le professeur n'ait traité ce sujet.

Acte 2 : Dans la classe de TS spécialité de Mickaël Védrine en 2006.

C'est une classe d'une trentaine d'élèves, de niveau moyen.
Nous leur présentons brièvement Etienne Bézout et l'objectif de la séance : « Etudier une équation diophantienne à partir d'un document du XVIII^{e} siècle ce mathématicien. »
Les élèves n'ont pas encore abordé ce problème en cours.
Nous leur proposons alors l'activité suivante, élaborée en commun :

Attention, il est essentiel de ne pas lire le texte dans son intégralité au début de l'activité, mais de suivre scrupuleusement les étapes indiquées.

Voir le texte en annexe 3 (les lignes sont numérotées).

1° a. Lire les lignes 1 à 11.
b. Imaginer une méthode pour résoudre ce problème. (On ne demande pas de le résoudre effectivement.)

Déroulement :

La plupart des élèves transforment l'équation donnée en exprimant *y* en fonction de *x*. Certains ne vont pas plus loin, tandis que d'autres tracent la droite correspondante et cherchent les points de cette droite qui ont des coordonnées entières, mais l'exercice est peu précis, avec ces coefficients.
Un élève pense à utiliser les congruences : il constate que le problème revient à trouver *x* entier pour que le nombre $\frac{6x-3}{11}$ soit entier, mais il en déduit malheureusement que $x = 0{,}5$, donc que le problème est impossible. Il sera quand même satisfait de constater que la première étape de son raisonnement coïncide avec celle de Bézout. On le retrouvera dans son commentaire.

Commentaires :

C'est toujours une activité difficile, beaucoup d'élèves ont du mal à prendre des initiatives si le terrain n'est pas balisé. Ils se découragent très vite.
Il faut donc continuer :

2° a. Lire les lignes 12 à 20.
b. Une équation diophantienne est une équation linéaire à coefficients entiers, dont on cherche les solutions entières. Ainsi une équation diophantienne à deux inconnues est de la forme ax + by = c, avec a, b, c entiers. Dans ce problème, on se limite aux solutions naturelles.
Donner cinq couples solutions de l'équation diophantienne $t - 5s = 3$.

3° a. Lire les lignes 20 à 28 jusqu'au symbole &.
b. Vérifier que l'équation de la ligne 25 est équivalente à celle de la ligne 23.
c. Ecrire l'équation de la ligne 27 sous la forme d'une équation diophantienne.

d. Est-il aisé de trouver tous les couples solutions de cette équation ? Si oui, les donner.

4° a. Lire les lignes 28 à 40.
b. Vérifier tous les calculs de ce paragraphe.
c. Expliciter les équations diophantiennes successives obtenues par Bézout.
d. Est-il aisé de trouver tous les couples solutions de la dernière équation, comme l'affirme Bézout ?

5° a. Choisir deux valeurs pour *s* et en déduire les valeurs de *x* et *y* correspondantes. Ces valeurs répondent-elles au problème posé ?
b. Exprimer successivement les inconnues *t*, *u*, *x*, *y* en fonction de *s*.
c. Vérifier les réponses à la question précédente en lisant les lignes 41 à 51.

6° a. Lire la fin du texte.
b. Donner les trois couples de solutions qui suivent ceux donnés par Bézout.

Déroulement : (en 1h30)

Les élèves travaillent seuls ou avec leur voisin. Ils ne rencontrent pas de difficultés pour mener à bien la résolution du problème.

Commentaires :

Comme d'habitude, les élèves s'intéressent d'abord aux singularités de l'orthographe, puis ils se lancent dans la résolution proprement dite, avec un réel intérêt, dès qu'ils commencent à comprendre où Bézout les emmène. La réécriture des différentes équations diophantiennes intermédiaires facilite la compréhension de la démarche.
Cependant; les élèves ne voient pas de lien avec les congruences, et personne ne remarque que l'on retrouve, dans l'expression des solutions les coefficients 17 et 11 du départ.
On peut noter une réelle satisfaction, chez certains, d'avoir résolu le problème.

Devoir à faire sur feuille :

7° (D'après un problème d'annales)
Un astronome a observé, au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.
On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.
Soient *u* et *v* le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (u ; v) est solution de l'équation (E1) : $35x – 27y = 2$.
Résoudre ce problème par la méthode de Bézout.

8° (Autre question posée par Bézout, c'est la « Question seconde », page 120 du l'ouvrage)
Faire 741 livres en 41 pièces de trois espèces ; savoir, de 24 livre, de 19 livres & de 10 livres.
On notera x, y & z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces.

a. Que vaut $x + y + z$? Que vaut $24x + 19 y + 10z$?
b. En déduire que *y* et *z* sont solutions de l'équation $5 y + 14 z = 243$.
c. Résoudre cette équation par la méthode de Bézout.
d. En déduire toutes les solutions du problème.

Résultats :

7° Très peu d'élèves justifient ou tentent de justifier correctement l'équation (E1).
On cherche les entiers u et v tels que J1 = J0 + 6 + 81 u et J1 = J0 + 105 v.
D'où l'équation 105 v = 6 + 81 u qui conduit, après simplifications, à l'équation (E1).
La plupart, en revanche, obtiennent la bonne date : J0 + 735.
On obtient successivement :
$u = (35v - 2)/27$, $w = (8v - 2)/27$, $x = (3w + 2)/8$, $y = (2x - 2)/3$ et $z = y/2$, soit $y = 2z$.
D'où, en « remontant » : $v = 27z + 7$ et $u = 35z + 9$.
Il reste à faire $z = 0$ pour trouver la bonne date.

8° La première partie est bien traitée :
On obtient successivement :
$y = (243 - 14z)/5$, $u = (3 - 4z)/5$, $t = (3 - u)/4$, soit $u = 3 - 4t$.
D'où, en « remontant » : $y = 57 - 14t$ et $z = -3 + 5t$.
Mais les méthodes pour trouver les quatre solutions, sont très variées :
Certains cherchent les conditions sur t : y compris entre 0 et 41 impose t compris entre 2 et 4.
D'autres donnent des valeurs successives à t jusqu'à obtenir 4, qui donne une valeur de y négative.
Ils s'arrêtent alors sans plus d'explication.
Ainsi, pour $t = 1$, quelques élèves obtiennent $y = 43$, sans remarquer que $y > 41$. ce n'est qu'en trouvant $x = -4$ qu'ils finissent par rejeter cette solution.
Beaucoup trouvent néanmoins les trois solutions : (5 ;29 ;7), (14 ;15 ;12) et (23 ;1 ;17).

Commentaires :

Comme dans l'autre classe, le travail a été fait sérieusement, mais la rigueur des raisonnements est insuffisante, tant dans la détermination des solutions, comme indiqué précédemment, qu'en cours de résolution : rares sont ceux qui ont rappelé la condition, pourtant essentielle, et répétée à chaque étape par Bézout : « Il faut donc que ce nombre soit entier. »

Deux semaines plus tard, la méthode « officielle » de résolution est présentée aux élèves.
Certains demandent s'ils pourront utiliser la méthode de Bézout le jour du Bac (Ils pensent même que cette activité et l'article qui suivra ont pour but d'imposer cette méthode le jour de l'examen !).
Compte tenu de la précision insuffisante des raisonnements, constatée à l'occasion du devoir à la maison, et craignant des réactions de rejets de certains correcteurs, le professeur le déconseille prudemment.
La semaine suivante, le professeur demande à chacun d'indiquer sa méthode préférée. Là encore, les élèves répondent avec beaucoup de sérieux (Voir annexe 6) et les arguments sont semblables à ceux de l'autre classe.

Bilan :

Il est incontestable que la méthode de Bézout a intéressé beaucoup d'élèves, la concentration lors des activités proposées en témoigne. Certains ont même mieux adhéré à la démarche proposée par Bézout, allant jusqu'à la recommander aux commençants.
L'une des raisons de la préférence pour la méthode « moderne » est sa rapidité, pourtant, l'algorithme d'Euclide comporte autant d'étapes que l'analyse du problème faite par Bézout.
Il faut s'interroger, en revanche, sur les doutes de certains élèves quant à la validité des raisonnements de Bézout. Dans la méthode actuelle, des théorèmes sont cités, ils sont souvent un gage de rigueur pour les élèves. Dans sa méthode, Bézout procède par analyse ou condition nécessaire mais sa « remontée » n'est pas identifiée clairement (à juste titre ?) par les élèves comme une réciproque. Il serait peut-être plus clair de remplacer dans l'équation, les inconnues par les valeurs des solutions exprimées en fonction du paramètre plutôt que de se contenter, comme le fait Bézout, d'affirmer qu'on « peut satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes,

qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables, depuis 3 jusqu'à l'infini. »
Ce type de raisonnement, par analyse et synthèse n'est pas reconnu par les élèves il est seulement utilisé en géométrie. Les élèves font le plus souvent des raisonnements par équivalence et ils confondent fréquemment « il faut » et « il suffit ».
C'est peut-être pourquoi beaucoup d'entre eux sont davantage rassurés par la méthode du cours dans laquelle ils identifient clairement deux étapes :
1. la détermination d'une solution particulière grâce à l'algorithme d'Euclide qu'ils ont découvert en classe de troisième et dont ils ont gardé un bon souvenir.
2. L'expression de la solution générale grâce à un …. théorème (qui plus est de Gauss, que l'on ne peut pas accuser de fantaisie.)
On pourrait quand même modifier quelque peu cette dernière de la manière suivante, sans savoir si cela ira dans le sens souhaité par quelques uns. :
1° Rechercher une solution particulière grâce à l'algorithme d'Euclide.
2° Rechercher la solution générale de l'équation sans second membre (qui s'exprimerait d'ailleurs plus simplement).
3° En déduire la solution générale de l'équation proposée.

Les élèves pourraient ainsi reconnaître une méthode déjà rencontrée lors de la résolution d'équations différentielles avec second membre.
Ce serait l'occasion d'observer que certains problèmes, touchant des domaines très différents, peuvent se résoudre par la même méthode, sans nécessairement aller jusqu'à parler d'espaces vectoriels.
Pour conclure, on peut reprendre l'expression d'un élève « Comme d'habitude, il n'y a rien d'absolu » et penser que la méthode de Bézout peut être une bonne introduction (ou une bonne remédiation) à la résolution des équations diophantiennes.

Acte 3 : Dans la classe de 2^nde^ de Jean Terreran en 2005

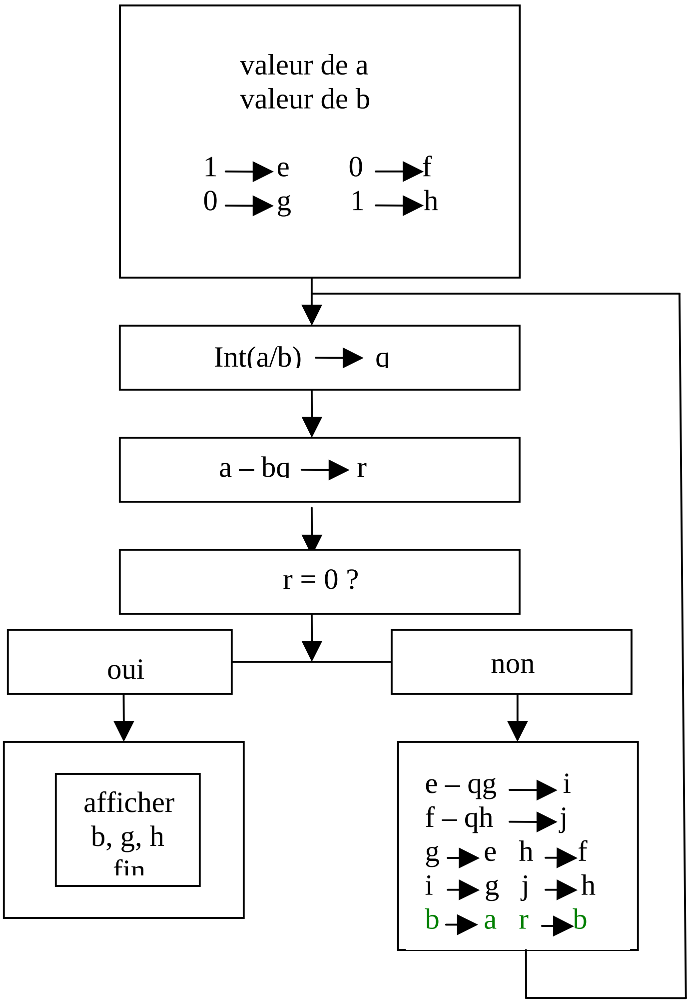
C'est une classe spécialité Arts Plastiques de trente deux d'élèves, de niveau moyen. Ils ont déjà travaillé sur des textes ou des méthodes historiques (La perspective leur a notamment été présentée conjointement par les professeurs d'Arts Plastiques et de Mathématiques).
Cette tentative s'est soldée par un échec : seuls trois élèves (d'un très bon niveau) ont étudier un document voisin de celui présenté en annexe 1. Les autres ont buté dès la première étape : Pourquoi (et comment) extraire la partie entière $x – 49$ de $17x – 542/11$ et pourquoi faut-il que $6x + 3/11$ soit entier ? On observe à cette occasion que la division euclidienne n'est pas encore entièrement maîtrisée.
Après cet échec, l'interprétation graphique du problème n'a pas permis de remotiver des élèves vite découragés.
Peut-être que la réécriture des équations diophantiennes obtenues à chaque étape du raisonnement éclairerait celui-ci ? A moins que ce ne soit décidément trop difficile à ce niveau ?

Annexe 1 : Algorithme et organigramme

Nous appellerons a et b les deux nombres initiaux (ici 17 et 11).

(e,f) sont les coordonnées de a et (g,h) celles de b qui expriment a et b en fonction de a et b :
a = a e + b f et b = a g + b h.
Au début, a = a.1 + b.0 et b = a.0 + b.1.
q est le quotient de la division de a par b, et r est le reste.
r = a – bq = a(e – qg) + b(f – qh), ces coordonnées sont notées i et j dans l'organigramme.

(la flèche ⟶ permet d'affecter une valeur).
A la fin, r = 0 et le reste précédent est le Plus Grand Diviseur Commun de a et b, il est affecté à b.
g et h sont alors les coefficients u et v cherchés (ici : 1 = 2×17 – 3×11).



Annexe 2 : Le document-élèves.

TS spé (05-06) | **T.D. Une équation diophantienne résolue par Bézout** | **Ven. 20.01.06**

Objectifs :

Etudier une équation à deux inconnues à partir d'un document du XVIII^{e} siècle d'Etienne Bézout.

Activité

Etienne Bézout est un mathématicien français né en 1730 à Nemours, où le lycée porte son nom, mort en 1783 aux Basses-Loges (près de Fontainebleau).
Il a enseigné dans une école militaire et à écrit un Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine (en cinq tomes).

1° Lire le texte page 2 et compléter les pointillés en effectuant les calculs nécessaires, au fur et à mesure.

2° a. Pourquoi était-on sûr, à l'avance, de trouver des solutions au problème ?

b. Les divisions euclidiennes successives utilisées par Bézout sont :

* 17 = 11x1 + 6
* 11 = 6x1 + 5
* … = …………

Quel méthode Bézout utilise-t-il ? ……………………………………………………..

c. Résoudre l'équation $17x – 11y = 542$ par la méthode étudiée en cours.

Trouve-t-on les mêmes solutions ?

à résoudre sur feuille pour vendredi 27 janvier :

3° Le but du problème est de :

Faire 741 livres en 41 pièces de trois espèces ; savoir, de 24 livres, de 19 livres & de 10 livres.

Pour cela :

Soient x, y & z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces.

a. Que vaut x + y + z ?
Que vaut 24x + 19y + 10z ?

b. En déduire que y et z sont solutions de l'équation 5y + 14z = 243.

c. Résoudre cette équation par la méthode de Bézout.

d. En déduire toutes les solutions du problème.

4° De la méthode de Bézout et de la méthode vue en cours, y en a-t-il une que vous préférez ? Pourquoi ?

COURS
DE MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Eleves & des Aſpirants du Corps Royal de l'Artillerie, & Cenſeur Royal.

M. DCC. LXXV.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

tome 2. page 118

Queſtion premiere. *On demande en combien de manieres on peut payer 542 livres, en donnant des pieces de 17 liv. & recevant en échange des pieces de 11 livres.*

Repréſentons par x le nombre de pieces de 17 liv. & par y celui des pieces de 11 liv. en donnant x pieces de 17 liv. on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pieces de 11 liv. on recevra $11y$; par conſéquent, on aura payé .... ; & puiſqu'on veut payer 542 liv. on aura ....

Tirons la valeur de y, c'eſt-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coëfficient, & nous aurons $y =$ ....

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui ſatisfera ſûrement à l'équation ; mais comme la question exige que x & y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x-542}{11}$ ſe réduit, en faiſant la diviſion autant qu'il eſt poſſible, à $y = x - 49 + \frac{6x-3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x-3}{11}$ ſoit un nombre entier : ſoit u ce nombre entier ; on aura $\frac{6x-3}{11} = u$, & par conſéquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u+3}{6}$, ou, en faiſant la diviſion, $x =$ .... ; il faut donc que $\frac{5u+3}{6}$ faſſe un nombre entier : ſoit t ce nombre entier ; on aura ..... $= t$, & par conſéquent $5u + 3 =$ ···, & $u =$ .... ; il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ faſſe un nombre entier : ſoit s ce nombre entier, on aura ···· $= s$, & par conſéquent $t =$ ...... : l'opération eſt terminée ici, parce qu'il eſt évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la queſtion, puiſqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y : puiſqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$; en met-

H iv

tant pour t ſa valeur $5s + 3$, on aura $u =$ .... $=$ .... ; & puiſqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour u ſa valeur, on aura $x =$ .... $=$ .... enfin, puiſqu'on a trouvé $y = \frac{17x-542}{11}$, en ſubſtituant pour x ſa valeur, on aura $y =$ .... $=$ .... ; ainſi les valeurs correſpondantes de x & de y ſont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la premiere, on eſt libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra ; mais la ſeconde ne permet pas de prendre s plus petit que ... ; en effet y devant être poſitif, il faut que $17s$ ſoit plus grand que ..., ou que s ſoit plus grand que ..., c'eſt-à-dire, plus grand que ...

On peut donc ſatisfaire à cette queſtion d'une infinité de manieres différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers poſitifs imaginables depuis 3 juſqu'à l'infini ; ainſi poſant ſucceſſivement $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, &c. on aura les valeurs correſpondantes de x & de y comme il ſuit :

$$\begin{array}{ll} x = 39 \ldots, & y = 11 \\ = 50 & = 28 \\ = 61 & = 45 \\ = 72 & = 62 \\ = 83, \text{\&c.} & = 79 \end{array}$$

Dont chacune eſt telle qu'en donnant le nombre de pieces de 17 liv. déſigné par x, & recevant le nombre correſpondant de pieces de 11 liv. déſigné par y, on paiera 542 livres.

- 2/2 -

Annexe 3 :

COURS DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Eleves & des Aſpirants du Corps Royal de l'Artillerie, & Cenſeur Royal.

M. DCC. LXXV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

tome 2. page 118

Queſtion premiere. *On demande en combien de manieres on peut payer 542 livres, en donnant des pieces de 17 liv. & recevant en échange des pieces de 11 livres.*

Repréſentons par x le nombre de pieces de 17 liv. & par y celui des pieces de 11 liv. en donnant x pieces de 17 liv. on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pieces de 11 liv. on recevra $11y$; par conſéquent, on aura payé $17x - 11y$; & puiſqu'on veut payer 542 liv. on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de y, c'eſt-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coëfficient, & nous aurons $y = \frac{17x-542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui ſatisfera ſûrement à l'équation ; mais comme la queſtion exige que x & y ſoient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x-542}{11}$ ſe réduit, en faiſant la diviſion autant qu'il eſt poſſible, à $y = x - 49 + \frac{6x-3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x-3}{11}$ ſoit un nombre entier : ſoit u ce nombre entier ; on aura $\frac{6x-3}{11} = u$, & par conſéquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u+3}{6}$, ou, en faiſant la diviſion, $x = u + \frac{5u+3}{6}$; il faut donc que $\frac{5u+3}{6}$ faſſe un nombre entier : ſoit t ce nombre entier ; on aura $\frac{5u+3}{6} = t$, & par conſéquent $5u + 3 = 6t$, & $u = \frac{6t-3}{5} = t + \frac{t-3}{5}$; il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ faſſe un nombre entier : ſoit s ce nombre entier, on aura $\frac{t-3}{5} = s$, & par conſéquent $t = 5s + 3$: l'opération eſt terminée ici, parce qu'il eſt évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la queſtion, puiſqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y : puiſqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$; en mettant

H iv

pour t ſa valeur $5s + 3$, on aura $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s + 3$; & puiſqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour u ſa valeur, on aura $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s + 6$: enfin, puiſqu'on a trouvé $y = \frac{17x-542}{11}$, en ſubſtituant pour x ſa valeur, on aura $y = \frac{187s+102-542}{11} = 17s - 40$; ainſi les valeurs correſpondantes de x & de y ſont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la premiere, on eſt libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra ; mais la ſeconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3 ; en effet y devant être poſitif, il faut que $17s$ ſoit plus grand que 40, ou que s ſoit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'eſt-à-dire, plus grand que 2.

On peut donc ſatisfaire à cette queſtion d'une infinité de manieres différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers poſitifs imaginables depuis 3 juſqu'à l'infini ; ainſi poſant ſucceſſivement $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, &c. on aura les valeurs correſpondantes de x & de y comme il ſuit :

$x = 39$ . . . ,	$y = 11$
$= 50$	$= 28$
$= 61$	$= 45$
$= 72$	$= 62$
$= 83$, &c.	$= 79$

Dont chacune eſt telle qu'en donnant le nombre de pieces de 17 liv. déſigné par x, & recevant le nombre correſpondant de pieces de 11 liv. déſigné par y, on paiera 542 livres.

Annexe 4 : Où « comment Bézout raccourcit sa méthode »

pages 123 – 124 du cours de Bézout.

Dans le cours des diviſions que l'on fait pour réduire la valeur de l'indéterminée à un nombre entier, rien n'oblige à prendre

le quotient plutôt au-deſſous de ſa véritable valeur, qu'au-deſſus. Il eſt même quelquefois plus expéditif de le prendre de cette derniere maniere.

Par exemple, ſi j'avois l'équation $19y = 52x + 139$, au lieu d'en conclure $y = 2x + 7 + \frac{14x+6}{19}$ en prenant $2x$ pour valeur du quotient de $52x$ diviſé par 19, en nombres entiers, je conclurois $y = 3x + 7 \frac{-5x+6}{19}$ en prenant plutôt $3x$ pour quotient, parce que ce quotient eſt plus approchant, & que l'excédant $5x$ dont je tiens compte en lui donnant le ſigne $-$, a un coëfficient plus petit, ce qui ne peut manquer d'abréger le calcul. Je fais enſuite $\frac{-5x+6}{19} = u$; & j'en conclus $x = \frac{6-19u}{5}$, & par la même raiſon, $x = 1 - 4u + \frac{1+u}{5}$. Faiſant $\frac{1+u}{5} = t$, j'ai enfin $u = 5t - 1$; ce qui acheve la ſolution plus promptement que ſi j'avois pris chaque quotient au-deſſous de ſa véritable valeur. Si on remonte, comme ci-deſſus, aux valeurs de x & de y, on trouvera $x = 5 - 19t$, & $y = 21 - 52t$, qui en donnant à t pour valeurs, tous les nombres négatifs depuis zéro, donneront toutes les ſolutions poſitives de l'équation.

Annexe 5 : Avis des élèves sur les deux méthodes de résolution :
Quand le cours a été traité avant Bézout :
* : Bézout plus facile à mettre en œuvre.
* : La méthode que je préfère est la méthode vue en classe, car c'est la première acquise par l'esprit et donc la première utilisée lors d'un problème. Cependant la méthode de Bézout est utile si l'on veut faire la démonstration à quelqu'un qui ne sait aucune des deux car elle est plus simple à comprendre, mais plus longue.
* : Je comprends mieux la méthode vue en cours.
* : Des deux méthodes, je préfère celle vue en cours car elle est plus simple et plus rapide. De plus, si c'est celle qu'apprennent les élèves, c'est logiquement la meilleure des deux.
* : Je préfère la méthode du cours car je la trouve plus courte et plus simple à utiliser.
* : Même si la méthode de Bézout est intéressante et a des calculs simples à effectuer, je préfère la méthode du cours car elle est beaucoup plus courte.
* : Je préfère la méthode vue en cours car on n'a pas besoin de changer autant de fois de variable.
* : J'ai tendance à préférer la méthode de Bézout, en effet cette méthode nous permet d'obtenir directement le couple solution. Les erreurs de signes sont moins probables, et cette méthode permet des vérifications à chaque pas. Un bémol cependant, cette méthode ne permet pas de calculer le Plus Grand Commun Diviseur, nous ne savons pas si la solution que nous devons cherche rexiste.
* : Finalement je préfère la méthode vue en cours à celle de Bézout. En effet, bien que ces deux méthodes utilisent des cheminements logiques, le méthode de Bézout m'apparaît beaucoup plus fastidieuse par l'utilisation d'inconnues successives, dont le nombre varie selon la complexité du quotient. L'application de Bézout me semble alors être davantage propre à chaque équation, tandis que la méthode vue en cours est, selon moi, plus générale, notamment par une utilisation d'un nombre constant d'inconnues (qui sont toujours du type x, y, a, b, x0, y0, X, Y).
* : Je préfère la méthode vue en cours parce qu'elle est plus rapide.
* : Je préfère la méthode vue en cours, que j'ai assimilée en premier, à la méthode de Bézout plus tortueuse tant qu'on ne trouve pas de nombre entier, et qui fait intervenir plus d'inconnues, difficiles à replacer dans la formule.
* : Je préfère la méthode vue en cours, que je trouve plus claire. Je trouve en effet que la méthode de Bézout est un peu longue et complexe à cause de la succession d'inconnues, surtout qu'il faut, une fois qu'on a trouvé l'entier, remonter dans l'autre sens pour exprimer en fonction de la dernière inconnue trouvée.
* : Pour ma part, je préfère la méthode de Bézout, certes elle est plus longue, mais je trouve qu'elle est plus simple à comprendre pour quelqu'un qui n'a encore jamais vu les équations diophantiennes.
* : Des deux méthodes, je préfère la méthode de Bézout car je trouve que l'on trouve plus vite les solutions générales qu'avec la méthode vue en cours.
* : Je préfère la méthode vue en cours car celle-ci est plus rapide que celle utilisée par Bézout.
* : Personnellement, je préfère la méthode vue en cours car je l'ai trouvée moins longue que celle de Bézout, mais il n'empêche que j'ai trouvé celle de Bézout intéressante à étudier.
* : Je préfère la méthode vue en cours car elle est plus simple et plus facile à retenir.
* : Personnellement, je préfère la méthode de Bézout, elle est certes plus longue à cause de la démultiplication du problème, mais plus simple à mes yeux.
* : Je préfère la méthode utilisée en cours à celle de Bézout (bien que cette dernière soit intéressante) car je trouve la trouve plus courte.

Annexe 6 : Avis des élèves sur les deux méthodes de résolution :

Quand le cours a été traité après Bézout :

* La méthode 1, celle de Bézout, était plutôt intéressante à faire, divertissante, sympa à connaître, mais un peu longue et le risque d'erreur, pour ma part, est plus grand avec cette méthode qu'avec l'autre. L'autre est plus rapide et comme c'est celle que l'on doit connaître, eh bien c'est celle que je maîtrise le mieux, je pense.
* : Je préfère la méthode du cours parce que je l'ai mieux comprise, même si elle paraît être légèrement plus longue. Ainsi, je la préfère car, pour ma part, j'ai moins de chance de faire des erreurs.
* Je préfère la méthode vue en cours car l'ayant déjà vue l'année dernière en classe de terminale, il est plus facile pour moi de me souvenir de celle-la plutôt que d'en apprendre une nouvelle.
* Je préfère la méthode du cours, c'est pourquoi je lègue mon vote à la méthode du cours.
* Comme toujours, rien n'est absolu, la méthode de Bézout a le mérite d'être simple à appliquer, avec un minimum d'habitude, je pense qu'il doit être très aisé de trouver les solutions. Cependant l'autre méthode donne une expression des solutions assez claire, et pour peu qu'on trouve des solutions évidentes, elle est finalement beaucoup plus rapide. Tout dépend donc des cas. Je pense que je préfère la méthode du cours.
* Je préfère la nouvelle méthode car elle est plus courte. L'ancienne est plus longue, mais elle fait appel à moins de justifications.
* Je préfère la méthode actuelle car elle est plus rapide, mais elle demande plus de justifications que l'ancienne est plus longue, mais elle fait appel à moins
* Je préfère la nouvelle méthode de Bézout car l'ancienne est plus longue, il y a plus de calcul, alors qu'avec l'autre, on a juste à faire l'algorithme d'Euclide et à faire des remplacements.
* Ma méthode préférée est la n°2, car elle est plus structurée que la première et donc plus simple à assimiler. De plus, elle permet de réellement trouver toutes les solutions (entières) de l'équation avec le justification qui convient.
* Je trouve que la méthode de résolution des équations diophantiennes est plus simple, l'enchaînement est clair et précis. Elle est certes plus longue, mais elle est plus claire pour moi.
* Préférence : la méthode de Bézout car meilleur manipulation. Méthode du cours moins connue, mais plus simple pour résoudre les problèmes.
* La méthode de Bézout est très bien pour trouver des solutions aux équations diophantiennes, mais je la trouve trop longue et nous ne sommes pas sûrs de trouver des solutions entières. La deuxième méthode, celle d'établir les restes des divisions euclidiennes est très bien aussi, mais celle-ci est très rigoureuse et l'énonciation du théorème de gauss est bien justifié, c'est pour cela que je préfère cette méthode à celle de Bézout.
* La méthode de Bézout est longue, et dans le cas où il n'y a pas de solutions, on ne le voit pas out de suite. La deuxième méthode est longue aussi mais avec une solution évidente, c'est déjà plus court. Un tableau de congruences ce serait encore mieux : ax + by = c *équivaut à* x = c – by/a, c'est-à-dire c – by congru à 0 [a].
* Je préfère la deuxième méthode car elle est moins longue et moins fastidieuse.
* La première méthode me paraît plus intéressante car elle est plus pratique que théorique.
* Je préfère la deuxième méthode avec les solutions particulières qui est plus facile à comprendre, et une fois qu'on l'a apprise, elle est assez facile à refaire si on ne fait pas d'erreur de calcul.
* La deuxième méthode est plus facile à faire et à comprendre et est plus rapide que la première.
* Méthode n°1 : je la trouve assez longue. Impression que l'on ne sait plus où on en est.
  Méthode n°2 : plus simple, moins fastidieuse, donc je préfère la deuxième méthode.
* Je trouve que la première méthode est plus « intéressante » que la seconde et que l'on voit beaucoup plus où l'on veut en venir. Ensuite pour arriver au résultat on utilise toujours le même principe, tout au long du raisonnement. Au contraire, la seconde méthode mobilise plus de connaissances (théorème de Gauss, de Bézout) et sa rédaction est plus rigoureuse (dans le sens où il faut faire la réciproque…).

* Le cours sur la méthode de Bézout permet de découvrir les équations diophantiennes pas à pas et de manière autonome. Néanmoins j'ai une préférence pour la méthode « moderne » qui me paraît plus peut être intéressante, simple et plus complète.
* La méthode de Bézout car c'est une autre façon de procéder, mais je la trouve trop longue pour résoudre les équations diophantiennes. La méthode actuelle me semble moins longue et plus facile. Mais je pense qu'il est intéressant de voir les deux méthodes.
* Méthode de Bézout : c'est une bonne méthode, simple à mettre en œuvre mais trop linéaire, elle mous rend passif et induit des erreurs d'inattention. De plus, le nombre de variables étant trop grand, il est facile de s'embrouiller.
Méthode actuelle : plus rapide, tout aussi efficace et diversifiée, on ne s'ennuie pas avec et on n'est pas submergé par les variables, et c'est plus facile à programmer.
* Je sais utiliser les deux mais la méthode avec Gauss me paraît plus pratique car plus rigoureuse et rapide.
* Les deux méthodes sont assez longues. Mais la méthode vue en cours avec l'algorithme d'Euclide me semble plus simple, car avec la méthode de Bézout cela prend vite une page de calculs, avec l'autre on peut simplifier s'il existe des racines évidentes.
* La méthode de Bézout est efficace mais assez longue à faire et à écrire. La méthode n°2 est préférable car elle est plus simple.
* J'ai préféré la deuxième méthode qui est à mon avis plus rapide, plus complète.
* Je pense que la méthode de Bézout est beaucoup trop longue et il y a des chances de se tromper dans les nombreuses variables que l'on pose. La méthode actuelle est beaucoup plus simple et ne comporte pas de grande difficulté et surtout, elle est beaucoup plus rapide à exécuter et la présentation est plus jolie. Donc je pense que cette méthode est meilleure.
* Certes la méthode de Bézout est simple, plus facile, mais la deuxième méthode, en étant plus longue et un peu plus complexe est selon moi la meilleure car il y a là un vrai raisonnement. On explique ce qu'on fait alors que la méthode de Bézout est une suite de calculs où il est plus difficile d'expliquer ce qu'on fait et pourquoi.
* Pour résoudre ce type d'équations, la méthode moderne me paraît plus simple, et je pense que l'on a moins de risque de faire des erreurs.
* Le théorème de Bézout est pour moi plus simple et plus rapide car il n'y a pas la nécessité de calculer le Plus Grand Commun Diviseur avec l'algorithme d'Euclide et non plus besoin de se resservir de cet algorithme pour trouver le couple de solutions évidentes.