Règle des mélanges et proportionnalité en 5^e

David MAGNIEN, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône
Email : dmagnien@yahoo.com

1. Présentation

Quand le groupe DESCO a décidé de faire une brochure reprenant les travaux de Pierre Collaudin, j'étais un peu embêté pour choisir parmi les nombreux thèmes qu'il a creusés. J'enseignais alors en collège, et Pierre s'est plutôt concentré sur des travaux de haut vol, applicables surtout en lycée. J'ai alors repensé à l'exposé qu'il avait donné lors du colloque Histoire des Sciences en 2003 : « Alliages, Proportions et Règle des Mélanges ». Par exemple, dans quelle proportion dois-je mélanger un vin A à 80 cts le litre et un vin B à 65 cts le litre pour obtenir un vin à 70 cts le litre ? Je me suis dit que, quitte à forcer un peu, on pourrait faire rentrer dans mon programme de 5^e le peu de proportionnalité que le mot « proportion » faisait miroiter. Très confiant, j'ai annoncé aux membres du groupe que, si, si, ça devait bien marcher, et que je pourrais sans doute produire une activité sur ce thème qui soit abordable en 5^e, et que d'ailleurs je voyais à peu près comment faire.

Bon.

Autant l'annoncer tout de suite, ça marche. Mais j'ai quand même eu besoin d'un bon chausse-pied pour tenir mon pari.

2. Conception et préparation des activités

Mon principal souci avant de donner l'activité était sa lisibilité. Transformer en principe mathématique une recette de comptable pour introduire une notion importante me paraissait délicat. J'ai donc voulu placer cette activité, non pas en introduction à la proportionnalité comme j'en avais l'intention au départ, mais comme une application du concept pour résoudre des problèmes. Dans ce contexte, il me fallait transformer l'énoncé : je devais abandonner l'aspect découverte et analyse d'un document historique, pour m'orienter vers un énoncé plus conventionnel, une mise en forme plus proche des activités et exercices du chapitre. Ceci afin de les amener naturellement à découvrir « par eux-mêmes » les relations de proportionnalité cachées derrière le schéma en croix.

J'ai donc passé beaucoup de temps sur la mise en forme des questions. Ma classe de 5^e étant d'un naturel contestataire, je voulais susciter le moins possible de remises en cause, du genre « mais ça sert à rien ! c'est bien plus facile avec la calculatrice ! », ou « j'y comprends rien, ça m'énerve ! », qui constituent hélas l'ordinaire de leurs réflexions lorsque je leur parle d'histoire des maths. En particulier, la légitimité du schéma en croix, figure centrale de l'article de Pierre, a mis du temps à venir. J'ai envisagé une justification *a posteriori*, en construisant toute l'activité comme une explication guidée du document historique. Ainsi les questions ont pour but de décortiquer le document, livré sans mode d'emploi, ce qui donne un premier objectif à l'activité, et évite un certain nombre de « mais ça sert à rien ».

Mais pas tous. Il restera sans doute quelques irréductibles adeptes du calcul électronique qui seront convaincus que tout ce qui date d'avant le téléphone portable est forcément rétrograde et a trouvé une solution plus simple et automatisée. C'est pourquoi j'ai prévu quelques exercices en fin d’activité, avec totale liberté dans le choix de la méthode. Il est vrai que le schéma en croix présenté à la fin de la partie 2 est complexe au premier abord et peut rebuter ; on aimerait avoir une autre solution. Qui plus est, le problème des mélanges est de ceux qui semblent faciles à résoudre par un peu de calcul mental et de logique, mais qui exigent en fait qu’on prenne crayon et papier (ou calculatrice) et qu’on se gratte la tête un moment. Je compte sur cette apparente facilité pour attirer mes irréductibles et les perdre dans les méandres fumeux de calculs approximatifs, pour les voir revenir vers ma méthode penauds et reconnaissants. Quant aux « j’y comprends rien », je compte sur la progression lente et accompagnée de la difficulté des problèmes pour donner confiance aux élèves, et leur montrer, à la fin, qu’ils ont réussi à résoudre un problème *a priori* délicat et posé à partir d’un document difficile à déchiffrer. Comme quoi on ne soulignera jamais assez, dans les IUFM, le rôle de la manipulation psychologique dans notre enseignement.

J’ai soumis une ébauche de cette activité aux membres du groupe pour avoir leur avis. En fait, deux ébauches. La première tentait de rester fidèle à l’esprit historique du problème, et se voulait une explication pas à pas de la règle des mélanges. Si son intérêt était indéniable du point de vue historique, elle ne faisait que peu appel à la proportionnalité. J’ai donc retenu la seconde, plus centrée sur la proportionnalité. Elle présentait cependant une difficulté : après avoir résolu un exercice simple, je demandais aux élèves, en question ouverte, comment expliquer l’utilisation de la proportionnalité dans ce problème ; ce qui ne manquerait pas de susciter des débats et des explications. Mais c’est là qu’est l’intérêt. On est ici confronté à un problème où maths et bon sens doivent s’allier pour donner la solution ; avoir l’opinion intuitive des élèves sur le problème, et argumenter pour leur montrer qu’il faut un peu de formalisme, est primordial, surtout dans le cadre d’une activité historique.

Je me suis d’ailleurs perdu moi-même en devançant les questions de mes élèves. Finalement, à quoi sert la proportionnalité là-dedans ? Elle est certes indéniable, mais quelles sont les quantités proportionnelles ? Je dois une fois de plus rendre grâce au groupe, qui m’a donné l’explication qui figure dans la partie précédente, et qui n’est pas des plus simples pour des élèves de 5^{e}. J’ai donc renoncé à faire apparaître la proportionnalité inverse dans l’activité, et j’ai usé d’un subterfuge pour pouvoir utiliser la proportionnalité simple (la proportion de B est proportionnelle à l’écart de A par rapport au prix souhaité).

Je pose tout d’abord un problème très simple aux élèves, avec un vin à 80 cts et un autre à 60 cts, où il faut trouver la proportion pour du vin à 70 cts. La solution doit tomber assez vite, car elle se base sur le bon sens plus que sur les maths. Le second problème a l’air similaire, mais s’ils essaient de le résoudre de la même façon ils échoueront. Je compte sur l’absence d’indications pour les égarer ; ils essaieront sans doute de tâtonner, et certains bons élèves dégageront peut-être la méthode. Je leur distribuerai la deuxième page de l’activité ensuite, pour ne pas qu’ils regardent le diagramme en croix et qu’ils puissent chercher et s’approprier le problème. Cette seconde feuille comporte plus de questions, qui sont là à la fois pour guider et pour rassurer les élèves : à ce stade, la tentation d’abandonner face à cet exercice peu conventionnel sera grande. Les questions les remettent en terrain connu : le contrat didactique « le prof pose des questions / je réponds » reprend ses droits.

J’ai souhaité susciter la curiosité des élèves en ne leur donnant pas de lexique pour la résolution des exercices de la dernière partie, tirés des textes historiques sans traduction. Je sais par expérience qu’ils sont prompts à poser des questions sur les aspects historiques : ça comble leur soif d’anecdotes et ça permet de ne pas faire de maths pendant ce temps.

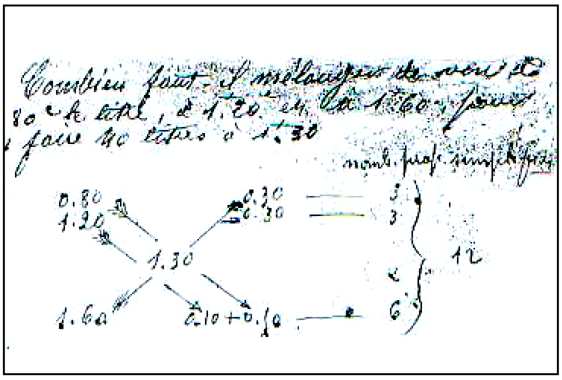
On pouvait aborder ce problème sous d’autres angles. Une approche barycentrique, par exemple : le prix du mélange est un barycentre des prix des différents vins, et il faut retrouver les coefficients (définis à une constante multiplicative près). Il serait intéressant d’étudier la part que le problème des mélanges a jouée dans l’élaboration de la théorie des barycentres : même si cette théorie est essentiellement d’origine mécaniste, la résolution barycentrique est assez naturelle pour qu’on se pose la question. On peut d’ailleurs remarquer que la règle des mélanges utilise la proportionnalité (ou la proportionnalité inverse) depuis 1202, alors que le concept n’a été formalisé que beaucoup plus récemment. On pourra aussi penser à la règle des leviers d'Archimède : si on a un poids A lourd et un poids B plus léger, il faudra accrocher A proche et B loin du point d'appui pour obtenir l'équilibre. C'est d'ailleurs ainsi que Pierre Collaudin présentait la règle des mélanges dans son article.

Merci encore au groupe DESCO Histoire des maths pour m'avoir aidé à débroussailler cette activité, en en particulier à Philippe Regnard qui m'a fourni les reproductions du manuel de Blondel. Commentaires, addenda et compléments bienvenus sur mon email.

3. Activité proposée :

Voici le premier document proposé aux élèves :

<u>Proportionnalité et mélanges</u>



Ce problème trouvé sur la page de garde d'un ouvrage d'algèbre élémentaire de 1849 est une application type de la règle des alliages et des mélanges :

« Combien faut-il mélanger de vin à 80 c le litre, à 1,20 et à 1,60 pour faire 40 litres à 1,30 ? »

Ce type de problème pratique a été étudié depuis très longtemps : on en trouve la trace dans un livre datant de 1202, écrit par Léonard de Pise (qu'on appelait aussi Fibonacci), un érudit italien. La méthode est la même : on utilise la proportionnalité, mais aussi le bon sens…

<u>Partie 1 :</u> un problème plus simple : (tiré de Jacquet et Laclef, "cours d'arithmétique théorique et pratique", Nathan, 1904)

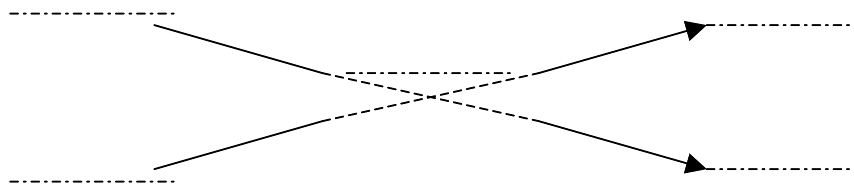
" On a du vin à Ofr. 75 le litre et du vin à 0 fr. 60 le litre. Dans quelles proportions faut-il les mélanger pour avoir un vin qui reviennent à 0 fr. 70 le litre ? »

1) Appelons « vin A » le vin à 0,60F le litre et « vin B » le vin à 0,75F le litre.
   a) J'ai un litre de vin A. Si je le vendais 0,70F, combien aurai-je en trop ?
   b) J'ai un litre de vin B. Si je le vendais 0,70F, combien me manquerait-il ?
2) Combien de litres de vin A et de vin B faut-il vendre pour que ces écarts se compensent ?
3) Combien de fois plus de vin B faut-il que de vin A ?
4) On peut résumer ces calculs par le diagramme en croix suivant :

Prix au litre *Prix souhaité* *Différence avec le prix souhaité*

Vin A

Vin B



Retrouve-t-on sur ce diagramme les proportions calculées aux questions 2) et 3) ?

Le diagramme en croix donne donc la réponse sans avoir besoin de faire des calculs compliqués. On l'appelle ***<u>règle des mélanges</u>***. Peut-elle nous aider à résoudre le problème de départ ?

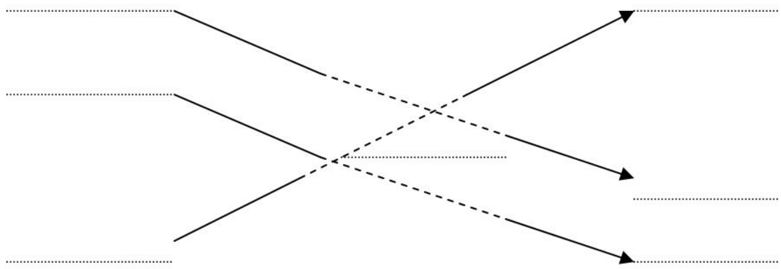
Une fois que les élèves ont fini l'exercice et que la correction est faite, on distribue le deuxième document :

<u>Partie 2 :</u> retour au problème des trois vins :

Appelons « Vin A » le vin à 80c, « Vin B » le vin à 1,20F et « Vin C » le vin à 1,60F.

1) a) J'ai un litre de vin à 80c. Si je le vends 1,30F, combien ai-je en trop ?
   b) J'ai un litre de vin à 1,20F. Si je le vends 1,30F, combien ai-je en trop ?
   c) J'ai un litre de vin à 1,60F. Si je le vends 1,30F, combien me manque-t-il ?

2) Utilisons le diagramme ci-dessous :



La dernière colonne donne-t-elle les bons résultats ? Vérifier avec un exemple.

3) On veut obtenir 40 litres de mélange avec ces proportions. Combien de litres de chaque vin doit-on verser ?

Enfin, après avoir corrigé la partie 2 et expliqué la règle des mélanges et le schéma en croix, on passe à la dernière partie, où les élèves sont laissés en autonomie face aux exercices suivants :

Partie 3 : d'autres exemples historiques:

Ce procédé de calcul a l'avantage de pouvoir se faire sans avoir de grandes connaissances mathématiques, et a donc bien servi le commerce à de nombreuses époques. On le trouve expliqué en particulier dans les livres de Nicolas Barreme, publiés au XVIIe siècle, et qui ont tant de succès auprès des professionnels que leurs ventes ont assuré la fortune de son auteur et de sa famille. Voici quelques exemples tirés de ces livres et d'autres ouvrages semblables de la même époque. Pouvez-vous les résoudre à l'aide de la règle des mélanges ?

COURS DE MATHEMATIQUE, Qui contient L'ARITMETIQUE SPECULATIVE ET L'ARITMETIQUE PRATIQUE. A L'USAGE DE MONSEIGNEUR LE DAUPHIN. PAR MONSIEUR BLONDEL, De l'Academie Royale des Sciences, Conſeiller Lecteur & Profeſſeur du Roy en Mathematique, Profeſſeur & Directeur de l'Academie Royale d'Architecture, &c. TOME SECOND. Seconde Edition, augmentée & corrigée. A PARIS, chez L'AUTEUR. Et ſe Vend A AMSTERDAM, Chez PIERRE MORTIER, Libraire ſur le Vygendam. M. DC. XCIX.

CHAPITRE VII.

Regles d'Alliage.

CHAP. VII. Regle d'Alliage.

LEs Regles d'Alliage ſervent à conoître quelle doit être la quantité de chacune des choſes de differentes valeurs que l'on veut meſler ou allier enſemble, de telle ſorte que leur maſſe devienne d'un prix ou d'une valeur determinée. Ce qui ſe fait en multipliant les prix ou valeurs qui excedent la propoſée, par les differences reciproques des prix ou valeurs qui defaillent de la même, & multipliant les prix ou valeurs qui ſont moindres que la propoſée, par les differences reciproques des prix ou valeurs qui excedent la même. Comme dans ces exemples.

Exercice 1 :

Un marchand a de trois ſortes de vins qui valent l'un 8 ſ. la pinte, l'autre 4 ſ. & l'autre 3 ſ. Il voudroit ſçavoir ce qu'il en doit prendre de chacun pour les mêler & en faire un tonneau qu'il pût debiter à 6 ſ. la pinte.

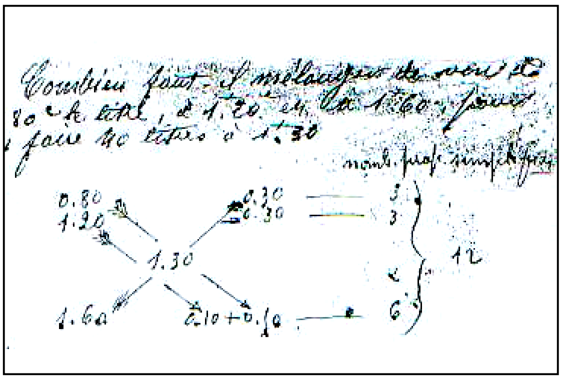
Exercice 2 :

Un marchand veut acheter 355 aunes d'étoffe pour le prix de 4260 livres. On lui en montre de cinq ſortes qui lui plaiſent, ſçavoir à 17 livres, à 15 livres, à 11 livres, à 9 livres, à 6 livres l'aune. Il voudroit ſeulement ſçavoir combien il en peut prendre de chacune pour avoir la quantité de 355 aunes & pour l'argent qu'il y veut employer. Pour cet effet il faut premierement ſçavoir quel eſt le prix de l'aune poſé que les 355 valent 4260 livres. Ce que l'on fait en diviſant 4260 par 355 : Car le quotient 12 eſt le prix de l'aune que l'on demande. La queſtion eſt donc de ſçavoir combien il doit prendre d'aunes de chaque eſpece pour faire la quantité de 355 qui reviennent à 12 livres l'une

Exercice 3 : *Exemple d'alligation*

Un orfèvre a de l'argent à quatre sortes d'aloi, à savoir à 17 livres, à 19, à 24 & à 37 liv. le marc, un Seigneur le vient trouver, qui veut faire faire 240 marcs de vaisselle d'argent, & entend que le marc de la vaisselle ne lui revienne qu'à 21 livres d'aloi; on demande combien ledit Orfèvre doit prendre de chaque sorte de son argent, afin de composer les 240 marcs, & que le marc ne revienne qu'à 21 livres.

4. Courte discussion théorique



Voici le document qu'a utilisé Pierre Collaudin comme point de départ de son exposé. Il s'agit vraisemblablement de notes prises par un étudiant sur la page de garde d'un ouvrage d'algèbre élémentaire de 1849. L'énoncé demande : *« Combien faut-il mélanger de vin à 80 c le litre, à 1,20 et à 1,60 pour faire 40 litres à 1,30 ? »*

On verra qu'il s'agit d'un diagramme de proportionnalité inverse, construit dans le même état d'esprit que nos classiques raisonnements de « règle de trois ». Souvenons-nous : 25 L de vin coûtent 40 F (restons au IIe millénaire), donc combien coûtent 10 L de vin ? On peut évidemment dégainer un tableau de proportionnalité, mais le plus souvent, et en particulier dans la littérature scolaire du début du siècle (Barème, par exemple), on trouve la présentation suivante :

25 L $\longrightarrow$ 40 F
10 L $\longrightarrow$ …….

Il ne reste plus qu'à trouver le coefficient de proportionnalité, ou à utiliser les produits en croix. Dans ce cas précis, la solution est unique.

Revenons à notre problème de mélanges dans le cas de deux vins seulement (mélange binaire), un vin A à à 60 cts le litre et un vin B à 75 cts le litre, pour fixer les idées ; on vise un mélange à 70 cts le litre. Le principe du mélange est de prendre à l'un pour donner à l'autre : plus mon vin A est loin du prix souhaité, plus je dois ajouter de mon vin B. Ainsi, les écarts par rapport au prix souhaité sont *inversement* proportionnels aux proportions à respecter : si on *augmente* le prix au litre d'un vin, on devra diminuer sa proportion dans le mélange, et donc *augmenter* celle de l'autre vin. Le diagramme en croix permet donc de placer en vis-à-vis des quantités qui évoluent dans le même sens, le prix du vin A et la proportion de vin B, tout comme dans le diagramme de proportionnalité simple vu un peu plus haut.

Il s'agit donc seulement d'une commodité de présentation. On pourrait penser, en regardant le diagramme pour deux vins proposé dans l'activité (document 1) que les flèches symbolisent deux droites affines dont l'intersection donne le prix du mélange. C'est presque une façon de résoudre le problème, mais trompeuse. Notons $x \in [0\,;\,1]$ la proportion de vin B dans le mélange, y_B la contribution du vin B au prix d'un litre de mélange, et y_A celle du vin A. Il vient alors :

$$\begin{cases} y_A = 0,6(1-x) \\ y_B = 0,75x \end{cases}$$

Chercher l'intersection de ces droites n'a guère de sens : on voudrait que la contribution des deux vins soit la même ? Cela ne répond pas à la question, et d'ailleurs la résolution du système donnerait $x = 4$, ce qui est absurde. Non, l'équation qu'appelle notre problème est :

$y_A + y_B = 0,70$

qui est une équation à une inconnue dont la solution est $x = 2/3$. En effet, en raisonnant autrement, l'écart entre le prix du vin B et le prix visé est moitié moindre que celui du vin A, donc la proportion de vin B doit être double de celle de A pour compenser : $x = 2(1 – x)$, d'où $x = 2/3$.

Est-il néanmoins possible de ramener le problème à une intersection de droites ? J'en doute : quelle autre inconnue choisir ? Le problème appelle une solution qui est une proportion (les données sont des prix au litre), donc la mise en équation ci-dessus s'impose. Qui plus est, lorsqu'on passe à un mélange ternaire ou quaternaire, on obtiendrait trois ou quatre droites qui devraient être concourantes…

Intéressons-nous justement au problème de départ avec trois vins, qu'on nommera respectivement A, B et C. L'énoncé demande des quantités en litres, mais la recherche des proportions permet de répondre.
Comment l'étudiant a-t-il procédé ? Il a utilisé le même principe que précédemment : plus l'écart du prix d'un vin avec le prix visé est grand, plus il faudra augmenter les proportions des autres vins. L'étudiant a donc classé les vins par ordre croissant de prix de haut en bas, en les disposant de part et d'autre du prix visé : A et B, dont le prix au litre est inférieur à 1,30 F, sont au-dessus ; C est lui en dessous : A et B devront contrebalancer son influence.
Ce n'est pas par hasard que j'utilise le vocabulaire des leviers chers à Archimède : en fin exégète du grand homme, Pierre Collaudin a voulu présenter son article sous cet angle. La proportionnalité inverse entre un poids et sa distance au point d'équilibre est la base de la théorie des leviers d'Archimède, et on la retrouve exactement ici. Le diagramme en croix peut se voir comme le schéma d'un problème de leviers, où les proportions des vins jouent le rôle des poids, et le prix visé est le point d'appui, de part et d'autre duquel les vins sont placés en fonction de leur prix au litre ; les écarts de prix s'interprètent alors comme des distances au point d'appui.
Mais si A et B contrebalancent C, doivent-ils le faire en égale proportion ? C'est l'option la plus simple, qui a été choisie par l'étudiant : l'extrémité de la flèche issue de C se subdivise en deux, l'une pour A et l'autre pour B, chacun devant alors contrebalancer les 30 centimes d'écart à sa façon. En bas du diagramme, les écarts de A et B sont ajoutés et contrebalancés ensemble par C. La somme « des » écarts du haut du diagramme (l'écart de C est compté deux fois, car A *et* B doivent le compenser) est donc de 60 centimes, et celle du bas également : coup de chance, on peut donc résoudre le problème de tête. L'étudiant a choisi d'affecter les proportions 3, 3 et 6, sans doute en prenant le chiffre des dixièmes pour ne pas se fatiguer. Il aurait évidemment pu prendre 1, 1 et 2, puisque tout ceci est un calcul de barycentre (on retrouve les leviers). On obtient les quantités en litres par proportionnalité.
Peut-on choisir des proportions différentes pour A et B ? Essayons avec un coefficient 4 pour A et 2 pour B : un rapide calcul donne :

$$\frac{0,8\times 4+1,2\times 2+1,6\times 6}{12}=1,1$$

qui ne convient pas. On ne peut pas donc répartir n'importe comment les 60 centimes d'écart de C entre A et B.
Si on appelle *x* la proportion de vin A et *y* celle de vin B, le problème s'écrit ainsi :

$\begin{cases} 0,8\,x \;+\; 1,2\,y \;+\; 1,6\,(1\;-\;x\;-\;y) \;=\; 1,3 \\ x,\; y \;\in\; [0\;;1] \end{cases}$, ce qui donne après simplification : $\begin{cases} y=-2x+\dfrac{3}{4} \\ x\in\left[0,\dfrac{3}{8}\right] \end{cases}$

qui est l'équation d'un segment de points solutions. Ce segment est en fait l'intersection de la droite d'équation $y=-2x+\dfrac{3}{4}$ et du carré unité.

Le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$ est situé sur ce segment : il correspond au choix de l'étudiant (coefficient 3 sur un total de 12, ou 1 sur 4). Celui de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6}\right)$, qui correspond à notre essai, n'y est pas.

On peut aussi se demander si la méthode qui consiste à donner le même poids à deux vins situés du même côté du prix visé est toujours valable. Il faut pour cela que le segment coupe la première bissectrice du repère à l'intérieur du carré unité; sa longueur et son équation peuvent donc faire qu'aucune solution ne soit possible.

Appelons respectivement a, b et c les prix au litre des vins A, B et C, et m le prix au litre du mélange. On supposera $a < b < c$, ce qui correspond à la méthode de l'étudiant qui classe les vins par ordre de prix croissant. Etudions d'abord l'existence d'une solution quelconque, c'est-à-dire avec (x,y) dans le carré unité. Dans ce cas général, le problème peut s'écrire :

$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,(1 - x - y) = m \\ (x, y) \in [0\,;1]^2 \end{cases}$, et donne : $\begin{cases} y = \dfrac{c-a}{b-c}x + \dfrac{m-c}{b-c} \\ x \in [0;1] \cap \left[\dfrac{b-m}{c-a};\dfrac{c-m}{c-a}\right] \end{cases}$

Premier constat : le coefficient directeur est négatif. L'intersection entre la droite et le carré unité est réalisée si $[0;1] \cap \left[\dfrac{b-m}{c-a};\dfrac{c-m}{c-a}\right]$ est non vide. Avec l'hypothèse raisonnable $a < m < c$ on trouve $\dfrac{c-m}{c-a} \in [0;1]$ et on a bien une solution. Notons que cette solution existe que le prix du mélange soit inférieur ou supérieur au prix du vin B : qu'on ait deux vins plus chers ou moins chers que le mélange importe peu.

Si on ajoute la condition $x = y$, on obtient $x = \dfrac{m-c}{a+b-2c} \in [0;1]$. $m - c < 0$ donc $a + b - 2c$ aussi, et on doit donc avoir $a + b - 2c \leq m - c \leq 0$, soit $a + b - c \leq m \leq c$. Ceci est toujours vrai, et ce grâce à notre hypothèse raisonnable $a < m < c$: en effet, $b - c < 0$, donc
$a + b - c < a < m < c$. On peut donc toujours choisir une solution où les vins A et B sont en proportion égale.

Concluons sur le cas d'un mélange de quatre produits, évoqué dans les dernières activités historiques distribuées aux élèves. On obtient une équation de plan qui, jointe à la condition sur les coefficients, nous donne (ou non) un polygone fini de solutions. Dans ce cas, on peut avoir trois vins d'un côté et un de l'autre, ou deux vins de part et d'autre, du prix visé, et le choix d'égaliser les proportions de deux ou trois vins s'interprètera par l'intersection du polygone avec le plan $x = y$ ou avec la droite $x = y = z$, selon le cas et les choix des inconnues. On peut à nouveau aborder le problème sous l'angle de la théorie des leviers, avec cette fois-ci quatre poids sur l'axe, répartis de part et d'autre du point d'appui.

5. Analyse et bilan :

En relisant les paragraphes sur la conception de l'activité, je constate que ma plus grande peur au moment où je les rédigeais était que mes élèves fassent capoter la séance par trop de questions, trop de contestation, trop de digressions. Bref, j'avais peur de ne pas pouvoir maîtriser l'espace verbal au cours du déroulement de l'activité.

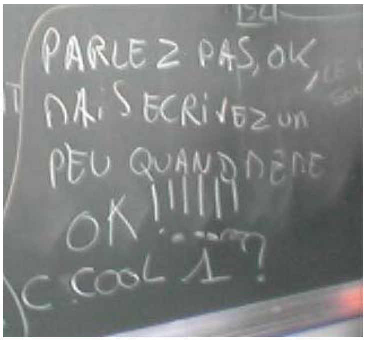
Je me trompais totalement.

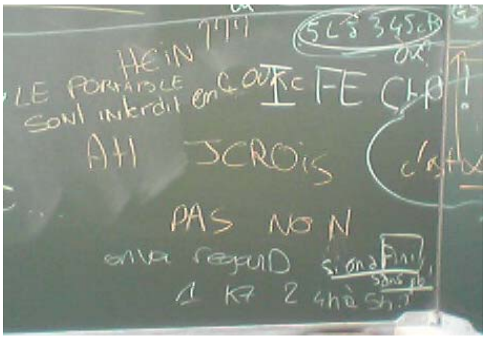
En cette dernière semaine de l'année, juste avant le brevet, j'aurais dû me rendre compte que mes élèves étaient bien trop sages quand ils sont entrés. Sans me méfier, je les salue et les répartis en groupes. Au début de l'année, j'ai formé ces groupes en fonction des niveaux et des personnalités, en mélangeant des éléments moteurs et des élèves plus faibles, par affinités, pour obtenir des ensembles hétérogènes mais dynamiques et motivés, qui sont restés fixes au cours de l'année. Je mets les élèves en groupes dès qu'il s'agit de réfléchir à des problèmes ouverts ou de dégager des propriétés à partir d'exercices. Je leur distribue donc l'activité ; je demande ensuite à un volontaire de bien vouloir me lire le texte de départ et le premier énoncé. Un seul accepte, alors que d'habitude ils sont très volontaires. Malheureusement, il ne brille pas par son élocution, et je dois lancer un nouvel appel à volontaires.

C'est là que le silence qui règne dans la classe me frappe. Surtout quand quelques filles commencent à pouffer dans mon dos, silencieusement.

Zut, ils ont décidé une grève de la parole. Et ça devait tomber ce jour là.

Tant pis. Je les lâche sur l'exercice 1. Quelques élèves commencent à rechercher, certainement parce que le problème leur plaît. Les autres n'écrivent rien et semblent attendre une réaction de ma part. Je vais au tableau et, rentrant dans leur jeu, j'y écris, en gros et en silence : « Ne dites rien, OK, mais écrivez un peu quand même ! ». Immédiatement les deux déléguées se lèvent et écrivent leur réponse au tableau : « Ah non, pas moyen ! », écrit la première ; et la seconde : « C'est cool, hein ? ». J'insiste, toujours par écrit : « L'ex 1 est facile. Essayez ! ». Le fait que je rentre dans leur jeu leur plaît, et ils se mettent au travail.

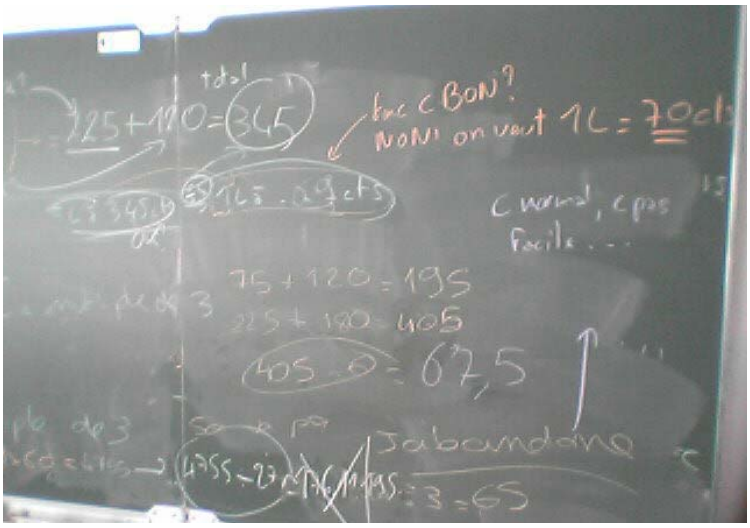




1. Premières réactions

2. Correction de la première partie : j'ai vérifié sur chaque feuille que les élèves ont trouvé la réponse

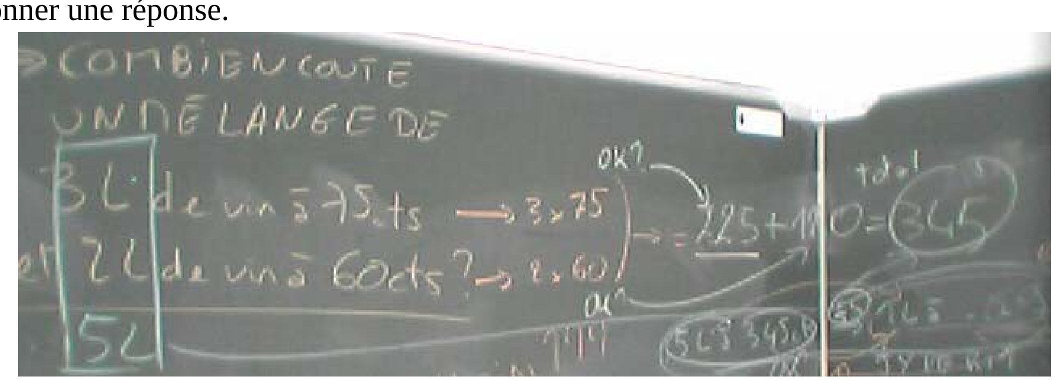
Voilà. On tient un peu plus d’une heure et demie, sans un mot, en communiquant uniquement avec le tableau et les craies. Si un élève a une question, il lève le doigt et vient l’écrire. Si je veux solliciter leur attention, un claquement de mains ou quelques petits coups sur le tableau suffisent à leur faire lever la tête. Les élèves communiquent entre eux par écrit ou à voix très basse ; d’un groupe à l’autre, ils s’appellent en claquant de la langue, puis communiquent avec force signes. Je circule entre les tables pour contrôler l’avancement de leur travail. Quelques-uns en profitent pour me demander des explications, à voix basse, presque honteusement, comme s’ils avaient conscience de tricher au petit jeu que nous menons ; un élève commence à écrire au dos de sa feuille une longue question dans une orthographe approximative : je l’interromps et lui réponds à l’oral. Je vois même un élève, très défaitiste d’ordinaire, se lever et écrire au tableau : « J’abandonne, c’est trop compliqué ».



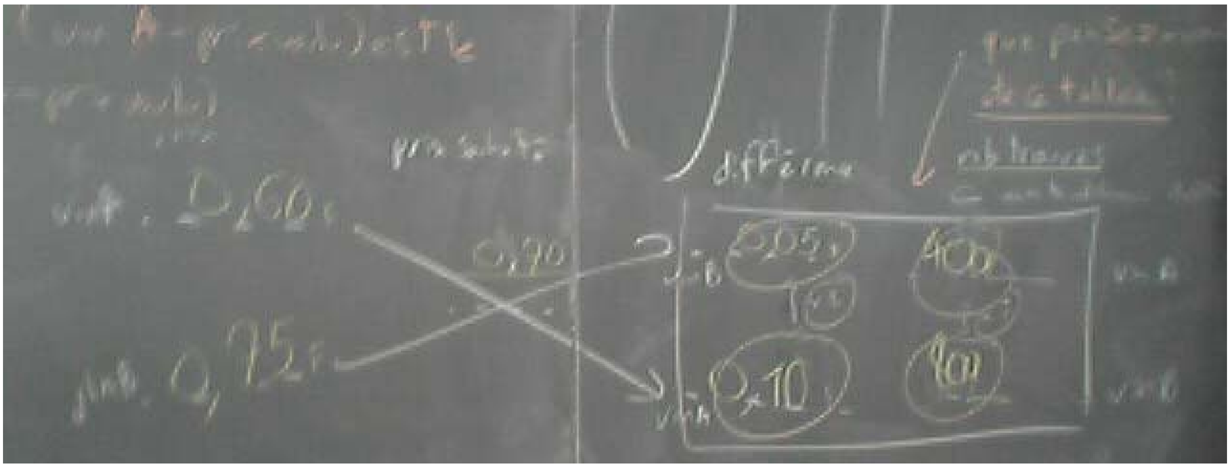
3. Deuxième partie : les élèves testent des mélanges, et me « dictent » (avec les doigts). Ils suivent bien les calculs.

Je tiens tout de suite à me justifier auprès des puristes qui ne manqueront pas de m’épingler pour l’orthographe SMS des interventions au tableau : dans un contexte où la spontanéité écrite prime, il ne m’a pas semblé idiot d’adopter cette syntaxe moderne chère à nos jeunes, que par ailleurs ils maîtrisent très bien, et qui participe du même besoin de communiquer rapidement par écrit.

J’ai décidé de jouer le jeu pour plusieurs raisons. Tout d’abord, c’est super rigolo. Ensuite, ça leur permet de bien penser leurs interventions, de synthétiser leurs questions, et ça les force à prêter attention à ce qui est « dit » : chaque intervention impliquant un passage au Tableau (avec la majuscule qui sied), lieu de tous les dangers, où l’on s’expose devant la classe et tout près, si près, du professeur, tous suivent attentivement leur camarade qui s’est levé pour poser une question ou donner une réponse.

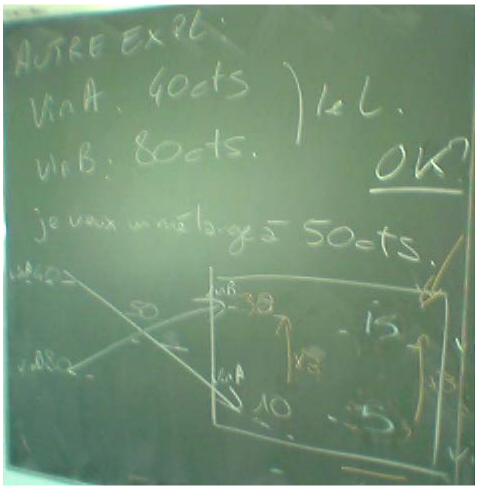


4. Le test ne donne pas le bon prix pour le mélange. Ils commencent à sentir ce qu’il faut faire. En jaune, un test calculé au tableau par mon élève défaitiste.



5. Après résolution par tâtonnements successifs, présentation méthodique sous forme de tableau

Certains n'attendent même pas que leur camarade soit revenu à sa place, ni que j'aie le temps de lui répondre par écrit, et se lèvent pour écrire leur vision du problème juste à côté. J'ai même assisté à des débats furieux par écrit, entre deux, voire trois élèves qui contestaient le raisonnement de l'autre, et demandaient silencieusement aux élèves du premier rang de calculer pour eux des expressions à la calculatrice (voir image 7). Une grande coopération, totalement inattendue, est née de cette contrainte. Enfin, ça m'a permis de pouvoir relever tout ce qui a été « dit » en prenant des clichés du tableau avant de l'effacer. Il me semble, a posteriori, qu'on a là une démarche qui participe de l'essence de la pensée et de l'écriture mathématique : écrire de façon concise, réfléchir par écrit, et donc justifier, débattre, s'intéresser.



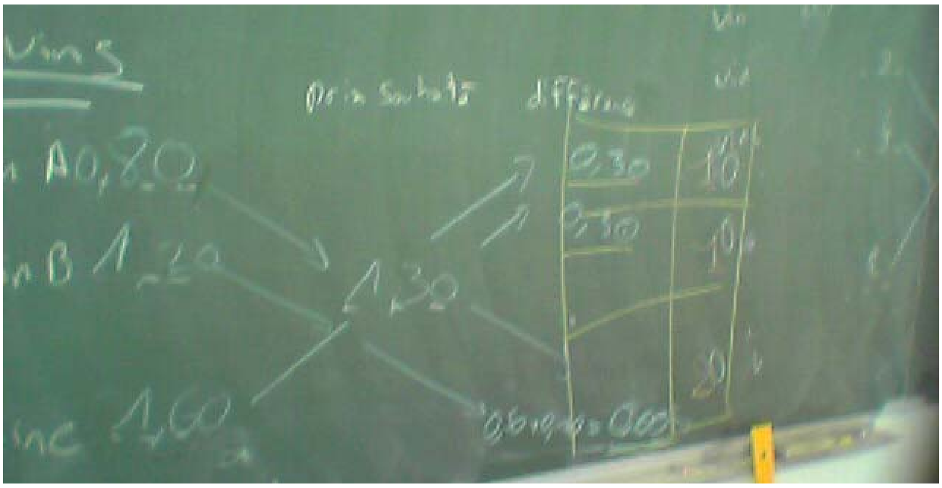
6. Résolution d'un autre problème de mélange binaire, directement avec le tableau : bien compris par les élèves bons et moyens

7. Un débat entre élèves, tout à la craie ; les élèves du premier rang arbitrent à la calculatrice. Les trois élèves sont (de g. à d.) moyen-désinvesti, faible et bon : le jeu permet d'oser.

Pour conclure sur la forme qu'a prise cette séance de deux heures, il me semble que la contrainte du silence n'a que très peu ralenti les élèves. Elle les a surtout motivés. Avant toute chose, il ne faut pas oublier qu'ils ont décidé eux-mêmes de s'imposer le silence ; je crois que si je l'avais demandé rien n'aurait été possible. Ensuite, cette nouvelle façon, très ludique, de faire des maths, leur a plu.

6. Conclusion

La règle des mélanges a été abordée comme je le prévoyais, par tâtonnements. La méthode a été dégagée peu à peu. Quatre bons élèves ont trouvé les calculs systématiques à faire pour trouver les proportions du mélange ; ils trouvaient compliquée la méthode du tableau en croix. Ils sont allés au tableau par deux fois écrire et expliquer leurs calculs. Les autres élèves ont compris, mais préfèrent la méthode de la croix. Quant aux récriminations que je redoutais, le jeu les a occultées. Je n'ai pas eu le temps d'aller au bout de l'activité, avec les exercices historiques ; au bout d'une heure et demie, nous finissions à peine de systématiser le mélange de deux vins. Le mélange de trois vins a été abordé mais pas terminé de manière satisfaisante, malgré la fin du jeu après 1h 35 min : il restait une quinzaine de minutes à peine.



8. Tentative d'adaptation de la méthode à un mélange ternaire : c'est plus difficile pour eux. La lassitude s'installe.