Connaître Archimède
Deux activités en bac pro tertiaire

Patrick GUYOT, LP Dumaine, Mâcon

Avant de raconter en détail les recherches et la séance consacrées à Archimède, nous allons présenter la genèse de cette double activité, en commençant par décrire les élèves, puis la raison principale du choix du thème, et les objectifs visés. On trouvera en annexe le texte complet de l'Arénaire.

1. Les élèves

Le travail engagé ici a été proposé à des élèves de Première baccalauréat professionnel tertiaire du LP Dumaine de Mâcon. Mais en raison de contraintes à la fois pédagogiques et matérielles, une classe a travaillé sur la première partie, une autre classe sur la deuxième partie.

La recherche concernant le personnage d'Archimède a été confiée à vingt-sept élèves de baccalauréat professionnel secrétariat et comptabilité, alors que les questions issues de la lecture partielle de l'*Arénaire* ont été posées à dix-huit élèves de baccalauréat professionnel commerce.

2. Le choix du thème

Archimède fut certainement le scientifique de prédilection de Pierre Collaudin, qu'il avait lu, approfondi, et sur lequel il a produit plusieurs travaux et articles dans la Feuille de Vigne bourguignonne et ailleurs. Cet investissement important nous a conduits naturellement à envisager de proposer un article consacré à Archimède, ce qui est fait ici.

3. Les objectifs

Les contenus scientifiques rencontrés dans l'œuvre d'Archimède présentent un caractère de difficulté tel qu'il les rend inadaptés à nos élèves ; un tri s'est rapidement fait, par éliminations successives. Une seconde contrainte a ensuite guidé nos choix : les sections de baccalauréat professionnel tertiaire n'ont ni physique ni géométrie à leur programme, ce qui élimine la plupart des travaux de notre auteur. Le sujet de l'*Arénaire* s'est donc vite imposé.

Mais une autre idée est progressivement apparue. Le programme officiel de mathématiques insiste sur plusieurs capacités transversales à privilégier. Voici les consignes plus particulièrement concernées :

- développer les capacités de communication, qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite (prise de notes).

- les travaux individuels de rédaction (mise au propre d'exercices résolus en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte, éventuellement rapport de stage, ...) visent essentiellement à développer les capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite.

- l'exploitation de documents, individuelle ou en équipe, peut contribuer notamment au développement des capacités d'organisation et d'expression écrite (rédaction de rapport) ou orale (mise au point d'un exposé).
(Programme de mathématiques en baccalauréat professionnel, Arrêté du 9-5-1995. JO du 17-5-1995)

À peu près à la période où se déroulait la réflexion décrite ici, j'avais évoqué le nom d'Archimède lors d'une leçon de sciences consacrée à la statique des fluides avec des élèves de terminale BEP Métiers de la Mode et des Industries Connexes, et leur manque (voire leur absence totale) d'information sur le personnage d'Archimède m'a convaincu d'aborder ce thème avec mes élèves de première bac sous un angle adapté aux objectifs cités plus haut.

4. Première activité : recherche documentaire et synthèse d'informations.

a) Le travail demandé

A partir des éléments décrits au paragraphe 3, j'ai donc demandé aux élèves d'effectuer un travail de recherche personnelle avec des consignes précises :

Enquête sur Archimède

Rechercher sur Internet ou sur une encyclopédie des informations sur ce savant.

Parmi les renseignements collectés extraire en dix lignes environ les informations qui vous semblent importantes pour caractériser ce personnage et son œuvre.

Il est facile de constater que la tâche proposée n'est pas des plus simples. Il suffit pour s'en convaincre de demander sur un moteur de recherches comme *Google* une investigation à partir du mot **Archimède**. On obtient une liste de 2 070 000 sites, j'avais suggéré aux élèves une variante éventuelle en tapant **Archimedes**, dénomination anglaise du savant grec, 3 560 000 sites sont proposées ; et si on souhaite avoir une image à partir des mêmes noms, on obtient respectivement 30 800 et 38 700 images. L'adage selon lequel « trop d'informations tue l'information » semble bien d'actualité ici, les résultats obtenus confirmant bien les difficultés prévisibles. Les élèves ont bien entendu tous choisis Internet plutôt qu'une Encyclopédie, et ouvert les trois ou quatre premières adresses proposées sans aller plus loin.

b) Dépouillement des productions des élèves

Les vingt-sept élèves de la première classe ont rendu une copie. Pour les deux tiers d'entre eux, les informations ont été fournies sur un document tapé à l'ordinateur, huit élèves ayant écrit une ou plusieurs feuilles manuscrites. Cela est peut-être dû à l'attirance irrésistible des jeunes vers les « copier-coller » qu'on retrouve dans tous les logiciels qu'ils utilisent. C'est en tout cas ce qui s'est produit avec quelques copies heureusement minoritaires (trois) qui reproduisent dans leur intégralité un document obtenu sur internet, mais on constate aussi que des paragraphes entiers simplement transférés d'un site internet apparaissent sur une dizaine de comptes rendus.

La première remarque concerne la demande des « dix lignes environ ». Elle n'a été respectée que par une dizaine d'élèves, les autres ont plus tard justifié le fait qu'ils ont écrit beaucoup plus de lignes (jusqu'à douze pages pour une élève) soit parce qu'il leur était difficile ou impossible (trop « fatigant » d'après quelques uns) de sélectionner ce qui devait être mis en avant parmi les travaux et découvertes d'Archimède, soit parce qu'ils croyaient bien faire en fournissant beaucoup plus d'informations que ce qui était demandé, la quantité étant gage de qualité pour ces derniers. Il y aura donc une remédiation en classe au sujet du respect des consignes.

Certaines informations se retrouvent dans la majorité des copies, nous les évoquerons en premier, et par ordre de fréquence décroissante. Tout d'abord les dates et lieux de naissance et de mort d'Archimède (23), la Poussée d'Archimède (sans obligatoirement l'énoncer, 20), le pays d'origine (Grèce, 17), le principe du levier (15, non détaillé pour 5 d'entre eux), les conditions de sa mort (tué par un soldat romain à Syracuse, 15), le nom et la profession de son père (Phydias ou Phidias ou Phydius, astronome, 13), la vis sans fin (12), et son statut d'ingénieur (12).

Il est affublé par la quasi-totalité des élèves de superlatifs tous plus impressionnants les uns que les autres parmi lesquels nous retiendrons : brillant théoricien ; œuvre scientifique considérable ; le plus grand savant de l'Antiquité ; le créateur de la physique mathématique ; formidable mathématicien ; fondateur de la statique ; géomètre de grande envergure ; savant excellent ; brillant physicien ; le père de l'hydrostatique ; grand scientifique ; le plus célèbre savant grec.

En ce qui concerne ses travaux de physique et de mécanique, en exceptant la Poussée d'Archimède et la vis sans fin évoquées plus haut, on s'y attarde peu. Un seul élève raconte de façon détaillée le siège de Syracuse et les machines utilisées pour lutter contre la flotte romaine. Les réponses sont par contre beaucoup plus bavardes dans le domaine des mathématiques. Ceci est en partie dû au fait que le travail était à rendre au professeur de mathématiques, et qu'il s'agissait, peut-être même inconsciemment, de lui faire plaisir, ou tout au moins de traiter en profondeur ce qui relevait de son domaine.

Les élèves citent le plus fréquemment le calcul approché de π (19), mais aussi le calcul de l'aire du segment de parabole, ou d'un secteur de spirale, ou l'aire et le volume du cylindre et de la sphère (17), les paraboloïdes ou les ellipsoïdes (16), la spirale d'Archimède (12). Ce ne sont que des évocations, aucun n'essayant d'expliquer l'un ou l'autre de ce qui ne constitue pour eux que des termes vides de sens, comme j'ai pu le vérifier lors d'un questionnement ultérieur, même pour ceux qui développent quelques contenus mathématiques. 13 élèves nomment la méthode d'exhaustion et 3 la méthode de démonstration par l'absurde. Pour terminer sur ce sujet et anticiper sur la deuxième partie de ce travail, 8 élèves ont parlé (souvent sans le citer) de l'*Arénaire* ; un élève par exemple écrit qu'Archimède « chercha le nombre de tous les grains de sable de l'univers ».

Il faut également signaler les trois termes et phrases célèbres qui sont retenus : « donnez-moi un point d'appui (pour quelques élèves *un levier*) et je soulèverai le monde » (19), le fameux *eurêka*

(18), et l'énoncé complet du principe d'Archimède en hydrostatique (11), présenté par la plupart de manière traditionnelle : « Tout corps plongé dans un liquide (ou un gaz) reçoit une poussée, qui s'exerce de bas en haut, et qui est égale au poids du volume de liquide déplacé. »

On ne peut pas faire l'économie des « perles » qui se retrouvent souvent dans les copies des élèves. Non pour se moquer, même si un nombre important parmi les professeurs sont friands de cette prose scolaire, mais aussi pour montrer que la volonté de comprendre ce qu'on écrit n'est pas toujours présente. A leur décharge, on pourra dire que ceci prouve que les élèves ne sont pas tous des adeptes du « copier-coller ». Citons entre autres quelques phrases :

Archimède fut le fondateur de la statistique des solides.
Il décède lors de l'évasion de Syracuse.
Il avait appris le calcul intégral.
Il est l'inventeur de la poussée d'Archimède.

Nous faisons un bilan plutôt positif de cette recherche. Tout d'abord les élèves ont travaillé avec beaucoup de bonne volonté, ont fourni une présentation de qualité, les documents étaient souvent accompagnés d'images représentant Archimède ou certaines de ses machines, et bien mis en page. Les contenus étaient souvent riches, mais mal exploités et surtout souvent sans même une tentative d'explication. Sept ou huit élèves se limitent à un listing de titres non développés. Nous nous sommes arrêtés là avec cette classe et avons poursuivi avec une autre classe à qui a été confiée une étude autour de l'*Arénaire*.

5. Deuxième activité : l'Arénaire et les grands nombres.

a) <u>Première partie</u> : étude préliminaire

Une présentation préalable rapide des systèmes de numération a été effectuée en classe. Sans entrer trop loin dans les détails il est utile d'expliquer que la Grèce antique a utilisé plusieurs systèmes de numération, certains simultanément. Le système décimal y est utilisé, et pour lire un nombre il suffit d'additionner les signes inscrits.

Prenons l'exemple du système dit « acrophonique » en usage à partir du VIème siècle av-JC. Les signes utilisés pour 1, 10, 100, et 1 000 sont respectivement I, Δ, H et X. Le nombre 1 324 s'écrit donc XHHHΔΔIIII. L'écriture est facile à effectuer, puisqu'il suffit de mettre les symboles côte à côte, mais ne permet pas de réaliser des opérations simplement comme avec notre écriture décimale positionnelle. De plus le symbole du plus grand nombre étant M, la myriade, égale à 10 000 ; on perçoit alors les difficultés rencontrées pour écrire de très grands nombres.

Avant de faire lire aux élèves une partie de l'ouvrage d'Archimède, je leur ai proposé de réfléchir à l'écriture des nombres entiers, à l'aide des chiffres, ou de mots. Ils ont eu à répondre aux questions du document suivant.

Première Baccalauréat Professionnel. Mathématiques.

Archimède mathématicien grec

Partie 1

L'*arénaire* (mot de la même famille qu'arène, issu du latin arena, qui signifie sable ; signalons qu'en grec on employait comme titre le mot *psammite*, provenant de *psammos*, sable) est un livre du grec Archimède (287 av JC ; 212 av JC) dans lequel il présente un système de numération qu'il a inventé. Avant lui les Grecs utilisaient des nombres avec une écriture complexe faite de lettres. La lettre correspondant au plus grand nombre est M, symbole de la myriade égale à dix mille.

Avant d'étudier une partie du texte de l'arénaire, répondez à quelques questions.

1) Écrire une myriade en chiffres, puis sous forme d'une puissance de dix.

2) Écrire une myriade de myriades en chiffres, puis sous forme d'une puissance de dix. Ce nombre est le plus grand qu'on savait écrire à l'époque d'Archimède.

3) Écrire en toutes lettres le nombre 999999999.

4) Vingt-cinq mots de la langue française suffisent pour nommer tous les nombres de 1 jusqu'à 999 999 999 999. Écrire ces vingt-cinq mots.

Commentaire de la partie 1

Les deux premières questions n'ont pas posé de problème. Mais une réponse à la troisième question n'a pas été obtenue facilement, une des difficultés provenant de l'écriture proposée dans l'énoncé, car le nombre n'avait pas été écrit avec un intervalle tous les trois chiffres. Il a fallu proposer aux élèves de réécrire le nombre en plaçant des espaces, ce qui a facilité la lecture.
La quatrième question a également montré que les élèves ne manipulent pas facilement le passage de l'écriture-chiffres à l'écriture-mots, et il a été nécessaire de leur demander d'écrire préalablement les mots correspondants aux nombres entiers classés dans l'ordre croissant.

b) Deuxième partie : lecture et intérêt de l'ouvrage.

La discussion autour de l'écriture des nombres terminée, le document ci-dessous a été distribué aux élèves.

Première Baccalauréat Professionnel. Mathématiques.

Archimède mathématicien grec.

Partie 2

Le texte donné ci-dessous a été écrit par Archimède. Ce savant a écrit ses livres en grec ancien, ils ont été traduits en plusieurs langues au cours des siècles. Parmi plusieurs traductions existant en français, celle que nous fournissons a été réalisée vers 1920 par monsieur Paul Ver Eecke (l'édition utilisée ici est publiée à Paris en 1960 chez Albert Blanchard). Archimède s'adresse dans son livre l'*Arénaire* à Gélon, roi de Syracuse, en Sicile. Son objectif est de dénombrer les grains de sable contenus dans le Monde.

> *D'aucuns pensent, roi Gélon, que le nombre des grains de sable est infiniment grand. […] D'autres soutiennent que ce nombre n'est pas infini, mais que l'on ne pourrait pas en énoncer un qui fût assez grand pour surpasser la multitude de ces grains de sable. Cependant, si ceux qui pensent ainsi se représentaient un volume de sable équivalent au volume de la terre, en supposant toutes les mers et les vallées de la terre remplies jusqu'au niveau des plus hautes montagnes, il est évident qu'ils comprendraient encore beaucoup moins que l'on puisse énoncer un nombre surpassant une pareille multitude de grains de sable. Or, je tâcherai de te faire voir […] que certains nombres […] surpassent non seulement le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre, remplie de la manière que nous avons dite, mais encore le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui du monde.*

1. Quel est selon vous l'avis d'Archimède sur le nombre de grains de sable : fini ou infini ? Donnez les arguments avancés par l'auteur.

2. Quel est votre avis personnel ? Expliquez.

Commentaire de la partie 2

La plupart des élèves ont compris l'essentiel de ce qu'a voulu dire Archimède, en traduisant que les Grecs ne sont pas capables d'écrire ce nombre de grains, même s'ils pensent qu'il n'est pas infini. Lui, Archimède, sait que sa méthode permettra d'écrire ce nombre, et d'autres encore beaucoup plus grands.

Quant à leur avis personnel, il est très varié, depuis les élèves (7) qui ne savent pas, jusqu'à ceux (10) qui sont en accord avec l'auteur (« c'est un nombre fini très grand »). Quelques commentaires intéressants ont été relevés, à l'origine de discussions qui ont suivi :

L'infini n'existe pas
L'infini c'est abstrait, c'est théorique
Un nombre est toujours fini, même très grand

Après un débat d'une dizaine de minutes, j'ai distribué le texte suivant avec la consigne de lire les questions et de proposer des réponses pour la semaine suivante.

Première Baccalauréat Professionnel. Mathématiques.

Archimède mathématicien grec

Partie 3

La suite du texte consiste à définir ce qu'est le monde pour les Grecs du troisième siècle avant Jésus-Christ. À l'époque on pensait que le Monde avait la forme d'une sphère dont le centre était la Terre. Aristarque, contemporain d'Archimède, proposait comme Monde une sphère centrée sur le Soleil. Ces dernières dimensions étant les plus grandes, ce sont celles que va utiliser Archimède. Afin d'évaluer le nombre de grains de sable, il explique son système de numération.

> *On s'entend sur les noms qui nous ont été transmis pour les nombres allant jusqu'à dix mille, et l'on distingue suffisamment les myriades en énonçant leurs nombres jusqu'à dix mille myriades. Dès lors, appelons primes les nombres en question jusqu'à dix mille myriades ; appelons unité des nombres seconds dix mille myriades des nombres primes, et comptons les unités des nombres seconds, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons de nouveau unité des nombres troisièmes dix mille myriades des nombres seconds, et comptons les unités des nombres troisièmes, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons, de même, unité des nombres quatrièmes dix mille myriades des nombres troisièmes, unité des nombres cinquièmes dix mille myriades des nombres quatrièmes, et continuons à appeler de cette manière les nombres successifs jusqu'à dix mille myriades de dix mille myriades.*

1. Écrire dix mille myriades sous forme d'une puissance de 10.

2. Écrire l'unité des nombres seconds sous forme d'une puissance de 10.

3. Continuer jusqu'à l'unité des nombres huitièmes.

Archimède poursuit ensuite sa présentation beaucoup plus loin, en prolongeant son raisonnement, mais nous pouvons en rester là pour donner la réponse à sa question concernant les grains de sable.

Commentaire de la partie 3

Les élèves un peu désarçonnés au début par cette écriture ont eu une remarque générale pour dire que les choses étaient bien compliquées à cette époque, et que les techniques dont on dispose aujourd'hui pour écrire les nombres sont nettement plus performantes. Les résultats obtenus ont dans l'ensemble été corrects, mais l'entraide a certainement fonctionné. Nous avons également discuté du géocentrisme et de l'héliocentrisme.

Un dernier document a été donné, concernant une propriété des puissances de 10, afin de souligner encore plus l'intérêt des écritures modernes, et pour finir le résultat obtenu par Archimède a été énoncé.

Première Baccalauréat Professionnel. Mathématiques.

Archimède mathématicien grec

Partie 4

Archimède énonce une propriété importante concernant des nombres « en proportion continue », nous disons aujourd'hui « formant une suite géométrique ».

> *Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera, dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité.*

Retrouvez dans ce texte la formule du produit des puissances d'un même nombre (prendre l'exemple de puissances de dix).

Archimède conclut son ouvrage sur le résultat suivant :

> *Il est clair que la quantité des grains de sable dont le volume égalerait la sphère des étoiles fixes, imaginée par Aristarque, est inférieure à mille myriades des nombres huitièmes.*

Écrivez mille myriades des nombres huitièmes en puissance de dix.

Commentaire de la partie 4

Les lecteurs auront deviné que là encore les élèves ont été surpris par la formulation, et chacun, après avoir bataillé pour « faire coller » la formule demandée avec le texte, remarque l'intérêt de nos écritures modernes et symboliques, permettant d'éviter de tout dire avec des mots.

Après le travail préliminaire de la partie 3, les élèves n'ont pas eu de difficulté pour répondre à la question finale.

6. Conclusion

Deux activités très différentes ont été présentées dans cet article, l'une sur une recherche d'informations et une synthèse à fournir, l'autre sur la compréhension d'un texte.

L'*Arénaire* qui a été perçu comme « daté » par les élèves, et parfois obscur, a néanmoins permis de faire le point sur des connaissances pas toujours très précises sur les écritures des nombres, les calculs des puissances de 10, les propriétés de ces puissances, mais aussi sur des questions plus générales et inhabituelles pour eux, comme le statut de l'infini, l'héliocentrisme.

La recherche sur Internet, et le compte rendu qui a suivi, ont mis en évidence les dérives qui peuvent se produire lors de telles recherches, et permis d'aider les élèves à prendre conscience de la difficulté causée par l'excès de données, et la nécessité d'être rigoureux même dans un résumé qui ne semble a priori pas poser de problème.

Nous donnons en annexe le texte intégral de l'*Arénaire*.

Archimède. *L'arénaire*, **in *Les Œuvres Complètes d'Archimède,* traduites du grec en français avec une introduction et des notes de Paul Ver Eecke, librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1960.**

D'aucuns pensent, roi Gélon, que le nombre des grains de sable est infiniment grand ; et ils visent ainsi, non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui gît dans toute contrée habitée ou inhabitable. D'autres soutiennent que ce nombre n'est pas infini, mais que l'on ne pourrait pas en énoncer un qui fût assez grand pour surpasser la multitude de ces grains de sable. Cependant, si ceux qui pensent ainsi se représentaient un volume de sable équivalent au volume de la terre, en supposant toutes les mers et les vallées de la terre remplies jusqu'au niveau des plus hautes montagnes, il est évident qu'ils comprendraient encore beaucoup moins que l'on puisse énoncer un nombre surpassant une pareille multitude de grains de sable. Or, je tâcherai de te faire voir, au moyen de démonstrations géométriques dont tu pourras suivre les raisonnements, que certains nombres, que j'ai, moi-même, exprimés et exposés dans des écrits adressés à Zeuxippe, surpassent non seulement le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre, remplie de la manière que nous avons dite, mais encore le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui du monde.

Tu auras retenu que le monde est le nom donné par la plupart des astronomes à la sphère dont le centre est le centre de la terre, et dont le rayon est égal à la droite située entre le centre du soleil et le centre de la terre ; car tu as appris cela dans les dissertations publiées à ce sujet par les astronomes. Or, Aristarque de Samos a, dans ses écrits, émis certaines hypothèses dont les arguments feraient admettre que le monde est beaucoup plus étendu qu'on ne l'avait dit jusqu'à présent. En effet, il suppose que les étoiles fixes et le soleil demeurent immobiles, que la terre tourne suivant une circonférence de cercle autour du soleil, qui est situé au milieu de l'orbite de la terre, et qu'enfin, la grandeur de la sphère des étoiles fixes, disposée autour du même centre que celui du soleil, est telle que le cercle, à la circonférence duquel on suppose que la terre évolue, a le même rapport avec la distance des étoiles fixes que le centre d'une sphère avec sa surface. Mais, il est évident que ceci est impossible ; car le centre d'une sphère n'ayant aucune grandeur, on ne peut admettre qu'il ait quelque rapport avec la surface de cette sphère. On peut néanmoins croire qu'Aristarque imagine que, si l'on considère la terre comme le centre du monde, le rapport de la terre avec ce que nous appelons le monde est le même que celui de la sphère, contenant le cercle autour duquel on suppose que la terre évolue, avec la sphère des étoiles fixes. C'est, en effet, d'une telle conception des apparences qu'il fait dépendre ses démonstrations, et il semble principalement supposer que la grandeur de la sphère, dans laquelle il imagine que la terre se meut, est égale à celle que nous appelons le monde.

Dès lors, je dis que, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'Aristarque suppose être la sphère des étoiles fixes, on démontrerait, moyennant les données qui vont suivre, que, parmi les nombres, de l'expression desquels il a été question plus haut, certains surpasseraient le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui d'une pareille sphère.

Admettons d'abord que le périmètre de la terre ait une longueur de trois cents myriades de stades, et pas davantage. Il est vrai que d'autres, comme tu le sais, ont tenté de démontrer que cette longueur est de trente myriades de stades ; mais moi, allant plus loin, et regardant cette dimension de la terre admise par mes devanciers comme étant environ dix fois plus grande, je suppose que son périmètre est à peu près de trois cents myriades de stades, mais pas davantage.

Je pose ensuite que le diamètre de la terre est plus grand que celui de la lune, et que le diamètre du soleil est plus grand que celui de la terre ; ce qui est conforme à ce que la plupart des astronomes antérieurs ont admis. Je suppose encore que le diamètre du soleil est trente fois plus grand que celui de la lune, mais pas davantage ; bien que, parmi les astronomes qui nous ont précédés, Eudoxe ait déclaré qu'il était neuf fois aussi grand, Phidias, mon père, douze fois aussi grand, et qu'Aristarque ait essayé de démontrer que le diamètre du soleil était plus grand que dix-huit fois et plus petit que vingt fois le diamètre de la lune. Or, moi, je vais même au-delà de ce dernier, et, afin que ma proposition soit démontrée sans contestation, je suppose que le diamètre du soleil est à peu près égal à trente fois le diamètre de la lune, mais pas davantage. Je suppose, en outre, que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde. Je suppose cela, étant donné qu'Aristarque aurait trouvé que le soleil nous apparaît comme étant à peu près le sept cent vingtième du cercle du zodiaque, et que, moi-même, j'ai tâché de prendre l'angle qui embrasse le soleil, et a son sommet à l'œil, en le recherchant, au moyen d'instruments, de la manière suivante.

Toutefois, cet angle n'est pas aisé à prendre avec précision, parce que, ni la vue, ni les mains, ni les instruments qui sont nécessaires pour le prendre ne sont assez sûrs pour nous le faire connaître exactement. Mais, c'est une chose au sujet de laquelle il n'est guère opportun de discourir davantage pour le moment ; car elle a été souvent signalée. Au reste, pour démontrer ma proposition, il me suffit de prendre un angle qui ne soit pas plus grand que celui qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil ; puis de prendre un autre angle qui ne soit pas plus petit que celui qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil. Ayant donc établi une longue règle sur un socle vertical, je l'ai disposée en un lieu d'où l'on peut voir le soleil .à son lever. Aussitôt après le lever du soleil, j'ai posé verticalement sur la règle un petit cylindre fait au tour. Lorsque le soleil fut à l'horizon, et que les yeux purent le regarder en face, après avoir dirigé la règle vers le soleil, j'ai mis l'œil à son extrémité, tandis que le cylindre posé entre le soleil et l'œil cachait entièrement le soleil. Dès lors, j'ai déplacé peu à peu le cylindre par rapport à l'œil jusqu'à ce que, le soleil commençant à se montrer légèrement de chaque côté du cylindre, ce dernier fût fixé en place. Si l'œil voyait réellement d'un point unique, en menant de l'extrémité de la règle, où l'œil est posé, des droites tangentes au cylindre, l'angle compris sous ces droites serait plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil, parce que l'on verrait quelque peu du soleil de chaque côté du cylindre. Or, comme les yeux ne voient pas d'un point unique, mais sous une certaine dimension, j'ai choisi une dimension cylindrique telle qu'elle ne soit pas inférieure à celle de la vision. Cette dimension étant disposée à l'extrémité de la règle où se trouve l'œil, et, des droites étant menées, tangentes à la fois à cette dimension et au cylindre, l'angle compris sous ces droites était donc plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil.

Une dimension non inférieure à celle de la vision se trouve d'ailleurs de la manière suivante : on prend deux minces cylindres de même épaisseur, l'un blanc, mais l'autre pas ; on les place devant l'œil de telle sorte que le blanc en soit éloigné, et que celui qui n'est pas blanc soit rapproché de l'œil jusqu'à toucher le visage. Dès lors, si les cylindres choisis sont moins larges que la vision, le cylindre le plus rapproché est embrassé par l'œil qui aperçoit le blanc derrière le premier ; si les cylindres sont beaucoup moins larges, le blanc est vu en entier, et, s'ils ne sont pas beaucoup moins larges, on aperçoit une certaine partie du blanc de chaque côté de celui qui est le plus rapproché de l'œil. On prend d'ailleurs des cylindres d'une largeur convenable pour que l'un cache l'autre, sans cependant cacher un espace plus grand, et il est donc certain que la dimension en grosseur des cylindres qui se présentent ainsi n'est pas inférieure à celle de la vision.

L'angle plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil est pris de la manière suivante : le cylindre est éloigné de l'œil, sur la règle, de façon à ce qu'il cache entièrement le soleil, et, des droites étant menées de l'extrémité de la règle où est placé l'œil, tangentiellement au cylindre, l'angle compris sous les droites menées ainsi n'est pas plus petit que l'angle qui embrasse le soleil en ayant son sommet à l'œil.

Les angles relevés de cette manière ayant été mesurés avec l'angle droit, l'angle qui aboutit au point de repère a été trouvé plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et le plus petit angle a été trouvé plus grand que la deux centième partie de l'angle droit. Il en résulte évidemment que l'angle qui embrasse le soleil, en ayant son sommet à l'œil, est aussi plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et plus grand que la deux centième partie de l'angle droit.

Ces choses étant établies, je vais démontrer que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde.

En effet, imaginons un plan passant à la fois par le centre du soleil, le centre de la terre, et par l'œil, au moment où le soleil est un peu au-dessus de l'horizon ; le plan ainsi mené coupe le monde suivant le cercle ΑΒΓ, la terre suivant le cercle ΔΕΖ, et le soleil suivant le cercle ΣΗ. Soit Θ le centre de la terre, K celui du soleil, et soit Δ l'œil. Menons des tangentes au cercle ΣH : du point Δ les tangentes ΔΛ, ΔΞ, en N et en T ; du point Θ les tangentes ΘM, ΘO, en X et en P ; et que les droites ΘM, ΘO coupent le cercle ABΓ aux points A et B.

Dès lors, puisque l'on a supposé le soleil au-dessus de l'horizon, la droite ΘK sera plus grande que la droite ΔK ; donc, l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ sera plus grand que l'angle compris sous les droites ΘM, ΘO. Or, l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ est plus grand que la deux centième partie de l'angle droit, et plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit ; car il est égal à l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil. En conséquence, l'angle compris sous les droites ΘM, ΘO est plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et la droite AB est plus petite que celle qui sous-tend un segment de la circonférence du cercle ABΓ divisé en 656 parties. Mais, le rapport du périmètre du polygone, dont il a été question, au rayon du cercle ABΓ est plus petit que celui de 44 à 7, parce que le rapport du périmètre de tout polygone inscrit dans un cercle au rayon est plus petit que celui de 44 à 7. Tu sais, d'ailleurs, que j'ai démontré que la circonférence de tout cercle est plus grande que le triple de son diamètre augmenté de moins de la septième partie de ce diamètre, et que le périmètre du polygone inscrit est plus petit que cette circonférence. En conséquence, le rapport de la droite BA à la droite ΘK est plus petit que le rapport de 11 à 1148, et il s'ensuit que la droite BA est plus petite que la centième partie de la droite ΘK. Or, le diamètre du cercle ΣH est égal à la droite BA, parce que sa moitié, c'est-à-dire la droite ΦA, est égale à la droite KP ; car les droites ΘK, ΘA étant égales, des perpendiculaires opposées au même angle ont été menées de leurs extrémités. Donc, il est évident que le diamètre du cercle ΣH est plus petit que la centième partie de la droite ΘK. Or, le diamètre EΘY est plus petit que le diamètre du cercle ΣH, parce que le cercle ΔEZ est plus petit que le cercle ΣH ; par conséquent, la somme des droites ΘY et KΣ est plus petite que la centième partie de la droite ΘK, et il en résulte que le rapport de la droite ΘK à la droite YΣ est plus petit que celui de 100 à 99. De plus, puisque la droite ΘK n'est pas plus petite que la droite ΘP, et que la droite ΣY est plus petite que la droite ΔT, le rapport de la droite ΘP à la droite ΔT sera donc plus petit que celui de 100 à 99. D'autre part, puisque, dans les triangles rectangles ΘKP, ΔKT, les côtés KP, KT sont égaux, que les côtés ΘP, ΔT sont inégaux, et que le côté ΘP est le plus grand, le rapport de l'angle compris sous les droites ΔT, ΔK à l'angle compris sous les droites ΘP, ΘK est plus grand que le rapport de la droite ΘK à la droite ΔK, mais plus petit que celui de la droite ΘP à la droite ΔT. En effet, si les côtés adjacents à l'angle droit de deux triangles rectangles sont, les uns égaux et les autres inégaux, le rapport du plus grand au plus petit des angles compris sous les côtés inégaux est plus grand que le rapport de la plus grande à la plus petite des droites opposées à l'angle droit, mais il est plus petit que le rapport de la plus grande à la plus petite des droites adjacentes à l'angle droit. Dès lors, le rapport de l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ à l'angle compris sous les droites ΘO et ΘM est plus petit que le rapport de la droite ΘP à la droite ΔT, plus petit, lui-même, que le rapport de 100 à 99 ; en sorte que le rapport de l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ à l'angle compris sous les droites ΘM, ΘO est aussi plus petit que celui de 100 à 99. De plus, puisque l'angle compris sous les droites ΔΛ et ΔΞ est plus grand que la deux centième partie de l'angle droit, l'angle compris sous les droites ΘM et ΘO sera plus grand que les quatre-vingt-dix-neuf vingt millièmes de l'angle droit ; en sorte que cet angle sera plus grand que la deux cent troisième partie de l'angle droit. Dès lors, la droite BA est plus grande que celle qui sous-tend un segment de la circonférence du cercle ABΓ divisée en huit cent douze parties. Or, le diamètre du soleil est égal à la droite AB ; donc, il est évident que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone.

Ces choses étant admises, on peut démontrer aussi que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre, et que, de plus, le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

En effet, puisque l'on a supposé que le diamètre du soleil n'est pas plus grand que trente fois le diamètre de la lune, et que le diamètre de la terre est plus grand que le diamètre de la lune, il est évident que le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre. D'autre part, puisque l'on a démontré que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde, il est clair que le périmètre du chiliagone en question est plus petit que mille fois le diamètre du soleil. Or, le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre ; donc, le périmètre du chiliagone est plus petit que trente mille fois le diamètre de la terre. Dès lors, puisque le périmètre du chiliagone est plus petit que trente mille fois le diamètre de la terre, tandis qu'il est plus grand que trois fois le diamètre du monde ; car on t'a démontré que le diamètre de tout cercle est plus petit que le tiers du périmètre de tout polygone inscrit dans ce cercle ayant les côtés égaux et plus de six angles ; il en résulte que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre. Dès lors, il est démontré que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre. D'autre part, il est évident, d'après ce qui va suivre, que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

En effet, puisque l'on a supposé que le périmètre de la terre n'est pas plus grand que trois cents myriades de stades, et, comme le périmètre de la terre est plus grand que le triple de son diamètre, parce que la circonférence de tout cercle est plus grande que le triple de son diamètre, il est évident que le diamètre de la terre est plus petit que cent myriades de stades. Donc, puisque le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre, il est évident que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

Telles sont les choses que j'admets au sujet des grandeurs et des distances, et voici maintenant pour ce qui concerne le sable : Si l'on rassemble un volume de sable non supérieur à une graine de pavot, le nombre des grains de sable ne dépassera pas dix mille, tandis que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas inférieur à un quarantième de doigt. Ces données ont d'ailleurs été relevées de la manière suivante : Des graines de pavot ayant été déposées en ligne droite sur une règle polie, de manière à se toucher l'une l'autre, vingt-cinq de ces graines ont occupé un espace supérieur à la longueur d'un doigt. Dès lors, j'adopte pour la graine de pavot un diamètre plus petit, que je suppose être environ le quarantième d'un doigt, mais pas moins ; car, pour ceci, je désire également démontrer ma proposition sans aucune contestation.

Voilà donc les choses que j'admets. Cependant, je crois utile de parler de la dénomination des nombres, afin que, s'il n'en était pas question dans le présent livre, on ne soit pas dérouté au sujet d'autres nombres encore qu'on ne trouvera pas dans le livre que j'ai écrit pour Zeuxippe.

On s'entend sur les noms qui nous ont été transmis pour les nombres allant jusqu'à dix mille, et l'on distingue suffisamment les myriades en énonçant leurs nombres jusqu'à dix mille myriades. Dès lors, appelons primes les nombres en question jusqu'à dix mille myriades; appelons unité des nombres seconds dix mille myriades des nombres primes, et comptons les unités des nombres seconds, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons de nouveau unité des nombres troisièmes dix mille myriades des nombres seconds, et comptons les unités des nombres troisièmes, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons, de même, unité des nombres quatrièmes dix mille myriades des nombres troisièmes, unité des nombres cinquièmes dix mille myriades des nombres quatrièmes, et continuons à appeler de cette manière les nombres successifs jusqu'à dix mille myriades de dix mille myriades.

Bien que la connaissance de ces nombres soit suffisante pour la chose qui nous occupe, on peut aller encore plus loin. En effet, appelons nombres de la première période ceux que nous avons énoncés jusqu'ici, et appelons unité des nombres primes de la seconde période le dernier nombre de la première période. Appelons, de même, unité des nombres seconds de la seconde période dix mille myriades des nombres primes de la seconde période ; appelons, de même, unité des nombres troisièmes de la seconde période le dernier des nombres précédents, et continuons à appeler de cette manière les nombres successifs de la seconde période jusqu'à dix mille myriades de nombres de dix mille myriades. Appelons encore, de même, unité des nombres primes de la troisième période le dernier nombre de la seconde période, et, ainsi de suite, les nombres successifs jusqu'à dix mille myriades de nombres de dix mille myriades de la dix mille myriadième période.

Les nombres étant dénommés de cette manière, si des nombres en proportion continue sont disposés par ordre à partir de l'unité, et, si le nombre qui suit l'unité est dix, les huit premiers, y compris l'unité, feront partie de ceux qui sont nommés nombres primes, les huit suivants feront partie de ceux qui sont nommés seconds, et les autres feront, de même, partie de ceux qui sont appelés du nom même du rang de leur octade de nombres à partir de la première octade de nombres. Il en résulte que le huitième nombre de la première octade de nombres est mille myriades, et que le premier nombre de la seconde- octade, puisqu'il est décuple de celui qui le précède, sera dix mille myriades. Ce dernier nombre est d'ailleurs l'unité des nombres seconds, tandis que le huitième nombre de la seconde octade sera mille myriades des nombres seconds. Le premier nombre de la troisième octade sera de nouveau dix mille myriades des nombres seconds, parce qu'il est décuple de celui qui le précède. Ce dernier nombre est d'ailleurs l'unité des nombres troisièmes, et il est évident que, pour une octade quelconque, il en sera comme nous venons de. le dire.

Il est encore utile de connaître ce qui sui t: Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera, dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité.

Soient donc des nombres tels que A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, Λ en proportion continue à partir de l'unité. Soit A l'unité ; multiplions Δ par Θ, et soit X leur produit. Prenons, dans la progression, Λ aussi éloigné de Θ que Δ est éloigné de l'unité. On doit démontrer que X est égal à Λ. En effet, puisque, parmi les nombres proportionnels, Δ est éloigné de A comme Λ est éloigné de Θ, le rapport de Δ à A est le même que celui de Λ à Θ. Mais, Δ est le produit de Δ par A ; donc, Λ est le produit de Θ par Δ, et, des lors, K est égal à X. Il est donc évident que le produit fait partie de la progression, et qu'il est aussi éloigné du plus grand des nombres multipliés entre eux que le plus petit est éloigné de l'unité. De plus, il est clair que ce produit est éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont Δ et Θ sont éloignés de l'unité ; car A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ sont les nombres dont Θ est distancé à partir de l'unité, et I, K, Λ sont, à un nombre près, ceux dont Δ est distancé à partir de l'unité. Or, en ajoutant Θ, on a la somme de ces nombres.

De toutes les choses qui précèdent, les unes étant admises et les autres étant démontrées, je vais démontrer ma proposition.

En effet, puisque l'on a admis que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas plus petit que le quarantième d'un doigt, il est évident qu'une sphère du diamètre d'un doigt n'est pas plus grande que pour contenir soixante-quatre mille graines de pavot ; car c'est de ce dernier nombre qu'elle est un multiple de la sphère du diamètre d'un quarantième de doigt ; d'autant plus que l'on t'a démontré que les sphères sont entre elles dans le rapport du cube des diamètres. Or, comme on a supposé, en outre, que le nombre des grains de sable contenus dans le volume d'une graine de pavot n'est pas supérieur à dix mille, il est évident que, si une sphère du diamètre d'un doigt est remplie de sable, le nombre des grains de sable ne sera pas supérieur à dix mille fois soixante-quatre mille. Or, ce nombre vaut six unités des nombres seconds plus quatre mille myriades des nombres primes ; il est donc inférieur à dix unités des nombres seconds.

D'autre part, une sphère ayant un diamètre de cent doigts est cent myriades de fois multiple de la sphère ayant un diamètre d'un doigt, puisque les sphères sont entre elles dans le rapport du cube des diamètres. En conséquence, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent doigts, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit. que le nombre formé en multipliant dix unités des nombres seconds par cent myriades. Et puisque dix unités des nombres seconds sont le dixième nombre, à partir de l'unité, dans une progression dont les nombres sont en rapport décuple, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le seizième, à partir de l'unité, dans la même progression ; car il a été démontré que ce produit est éloigné, à partir de l'unité, de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés à partir de l'unité. Or, de ces seize nombres, les huit premiers, y compris l'unité, font partie de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, et le dernier d'entre eux est mille myriades des nombres seconds. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume vaut une sphère du diamètre de cent doigts, est plus petite que mille myriades des nombres seconds.

Derechef, une sphère du diamètre de dix mille doigts est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent doigts. En conséquence, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille doigts, il est évident que le nombre de grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille myriades des nombres seconds par cent myriades. Et puisque mille myriades des nombres seconds sont le seizième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le vingt- deuxième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces vingt-deux nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les six restants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, et le dernier d'entre eux est dix myriades des nombres troisièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille doigts est plus petite que dix myriades des nombres troisièmes. Et comme une sphère ayant un diamètre d'un stade est plus petite qu'une sphère ayant un diamètre de dix mille doigts, il est encore évident que la quantité de sable dont le volume égale une sphère du diamètre d'un stade est plus petite que dix myriades des nombres troisièmes.

Derechef, une sphère du diamètre de cent stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre d'un stade. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent stades, il est évident que le nombre de grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix myriades des nombres troisièmes par cent myriades. Et puisque dix myriades des nombres troisièmes sont le vingt-deuxième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le vingt-huitième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces vingt-huit nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés troisièmes, enfin, les quatre restants, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, et le dernier d'entre eux est mille unités des nombres quatrièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent stades, est plus petite que mille unités des nombres quatrièmes.

Derechef, une sphère du diamètre de dix mille stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent stades. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille stades, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille unités des nombres quatrièmes par cent myriades. Et puisque mille unités des nombres quatrièmes sont le vingt-huitième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le trente-quatrième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces trente-quatre nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, enfin, les deux restants seront de ceux qui ont été appelés cinquièmes, et le dernier d'entre eux est dix unités des nombres cinquièmes. Il est donc évident que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille stades est plus petite que dix unités des nombres cinquièmes.

Derechef, une sphère du diamètre de cent myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de dix mille stades. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix unités des nombres cinquièmes par cent myriades. Et puisque dix unités des nombres cinquièmes sont le trente-quatrième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le quarantième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces quarante nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit qui suivent les troisièmes, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, enfin, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés cinquièmes, et le dernier d'entre eux est mille myriades des nombres cinquièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent myriades de stades, est plus petite que mille myriades des nombres cinquièmes.

D'autre part, une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent myriades de stades. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades, il est clair que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille myriades des nombres cinquièmes par cent myriades. Et puisque mille myriades des nombres cinquièmes sont le quarantième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le quarante-sixième à partir de l'unité. Or, de ces quarante-six nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit autres suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit autres qui suivent les troisièmes, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, les huit qui suivent les quatrièmes, de ceux qui ont été appelés cinquièmes, enfin, les six restants sont de ceux qui ont été appelés sixièmes, et le dernier d'entre eux est dix myriades des nombres sixièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades est plus petite que dix myriades des nombres sixièmes.

Une sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades. Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades, il est clair que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix myriades des nombres sixièmes par cent myriades. Et puisque dix myriades des nombres sixièmes sont le quarante-sixième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le cinquante-deuxième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces cinquante-deux nombres, les quarante-huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, seconds, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes ; tandis que les quatre restants sont de ceux qui ont été appelés septièmes, et le dernier d'entre eux est mille unités des nombres septièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades, est plus petite que mille unités des nombres septièmes. Or, on a démontré que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades ; donc, il est évident aussi qu'une quantité de grains de sable, dont le volume égale celui du monde, est plus petite que mille unités des nombres septièmes. Dès lors, il est démontré que la quantité de grains de sable, dont le volume égale le monde, tel que se le représentent beaucoup d'astronomes, est plus petite que mille unités des nombres septièmes.

Au reste, je vais encore démontrer que la quantité de grains de sable, dont le volume égalerait une sphère telle qu'Aristarque suppose être la sphère des étoiles fixes, est plus petite que mille myriades des nombres huitièmes.

En effet, puisque l'on a supposé que le rapport de la terre au monde, tel que je l'ai défini, est le même que celui du dit monde à la sphère des étoiles fixes, telle que la suppose Aristarque, les diamètres de ces sphères auront entre eux le même rapport. D'autre part, on a démontré que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre ; donc, il est évident aussi que le diamètre de la sphère des étoiles fixes est plus petit que dix mille fois le diamètre du monde. Or, comme les sphères sont entre elles dans le rapport du cube de leurs diamètres, il est clair que la sphère des étoiles fixes, imaginée par Aristarque, est plus petite que dix mille myriades de myriades de fois la sphère du monde. Or, on a démontré qu'une quantité de grains de sable, dont le volume égale le monde, est plus petite que mille unités des nombres septièmes ; donc, il est évident que, si l'on composait une sphère de sable aussi grande que la sphère des étoiles fixes imaginée par Aristarque, le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant ces mille unités par dix mille myriades de myriades. Et puisque mille unités des nombres septièmes sont le cinquante-deuxième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que dix mille myriades de myriades sont le treizième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le soixante-quatrième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, ce nombre est le huitième des nombres huitièmes, ou mille myriades des nombres huitièmes ; par conséquent, il est clair que la quantité des grains de sable dont le volume égalerait la sphère des étoiles fixes, imaginée par Aristarque, est inférieure à mille myriades des nombres huitièmes.

Je conçois, roi Gélon, que ces choses paraîtront incroyables à la plupart de ceux auxquels les mathématiques ne sont point familières ; mais ceux qui y sont versés et qui ont médité sur les distances et les grandeurs de la terre, du soleil et du monde entier, les admettront après ma démonstration. Et c'est pourquoi j'ai cru qu'il n'était pas hors de propos que, toi aussi, tu en prennes connaissance.