D'autres critères pour les triangles isométriques, vagabondages mathématiques

David MAGNIEN et Tristan DERAY

Résumé : Caractérisation de l'isométrie de deux triangles grâce à leurs droites remarquables

Mots clés : triangles isométriques, triangles semblables, droites remarquables du triangle, médianes, hauteurs

Petite introduction en forme d'hommage :

Ce n'est pas aux fidèles lecteurs de la Feuille que je l'apprendrai, les mathématiques sont affaire de jeu et de curiosité. Pourtant notre système scolaire bride souvent les bonnes volontés de nos élèves dans un carcan qui les étouffe, dans l'intention – fort louable – de ne pas les laisser se perdre en vagabondages.

C'est ainsi que Nicolas m'a complètement pris au dépourvu au milieu d'un cours sur les triangles isométriques. Nicolas révise peu ses contrôles, fait ses exercices une fois sur dix, somnole en classe, âme vagabonde... mais lors de ses rares interventions il sait faire preuve d'une intuition sidérante pour un élève qui a son profil, en particulièrement en géométrie, où les élèves ont du mal à avoir une vision d'ensemble du problème.

On avait déjà revu les configurations du plan et les transformations du plan en début d'année. On pouvait donc passer aux triangles isométriques, avec la définition suivante :

<u>Définition :</u> Deux triangles sont dits isométriques si l'un est image de l'autre par une isométrie ou une composée d'isométries.

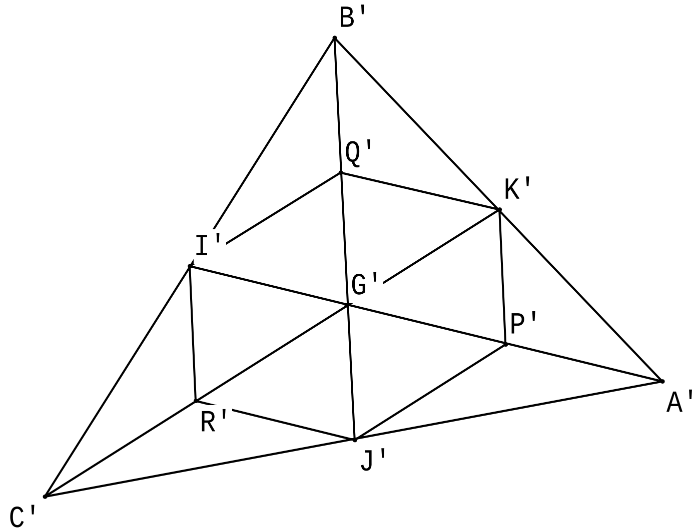
Il est vrai qu'on trouve aussi la définition « Deux triangles sont isométriques si leurs côtés sont de même longueur deux à deux », qui colle d'ailleurs mieux à l'étymologie du mot « isométrique ». Mais je préfère présenter cette dernière assertion comme un théorème, et donc un critère d'isométrie, car cela me permet de le leur faire prouver en DM entre les transformations et les triangles. Donc après avoir rendu et corrigé ce DM, j'énonce et j'explique le théorème suivant :

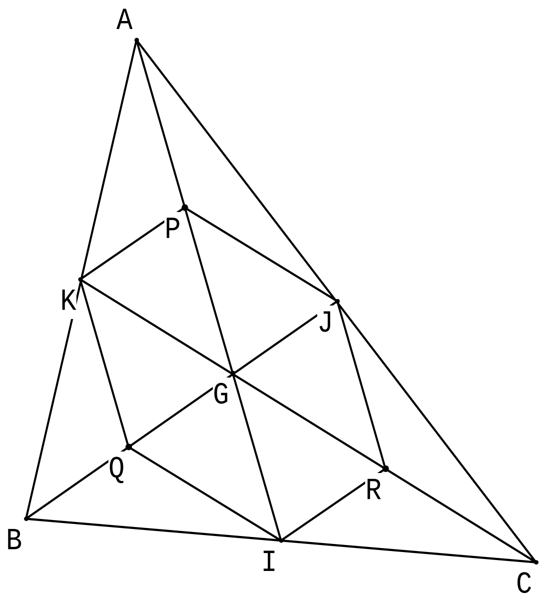
Premier critère d'isométrie : Deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs côtés sont de même longueur deux à deux.

C'est alors que mon Nicolas sort de sa torpeur habituelle et me demande : « Mais alors, peut-on dire que deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs *hauteurs* sont égales deux à deux ? Et que dire des *médianes* et des *médiatrices* ? » Un peu pris de court, je botte en touche et promet une réponse pour le prochain cours. Mais après une ou deux heures de réflexion, je ne trouve aucune solution satisfaisante. Même une approche analytique dans un repère orthonormé ne me donne que des calculs très lourds qui n'en finissent pas. Je pose donc la question à mes collègues, et c'est Tristan qui m'apporte une solution, très élégante, pour les médianes. Encouragé, je me lance et trouve quelque chose pour résoudre le problème des hauteurs.

Il est fort probable que ces problèmes aient été traités quelque part dans la littérature, mais ces articles ont su rester bien cachés lorsque nous avons fouillé la bibliothèque de l'IREM, en particulier La Géométrie du triangle d'Yvonne Sortais, qui est pourtant une mine de résultats très intéressants. Je fais appel aux bonnes volontés pour nous signaler toute référence sur le sujet.

1. Deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs médianes sont de même longueur deux à deux.





Le sens direct de la proposition est trivial.
La réciproque l'est moins. Soient deux triangles ABC et A'B'C' et les milieux respectifs de leurs côtés. Supposons que AI = A'I', BJ = B'J' et CK = C'K'.
Puisque le centre de gravité est au tiers de chaque médiane en partant de son pied, on peut construire sur chaque médiane de ABC les points P, Q et R tels que AP = $\frac{1}{3}$AI, BQ = $\frac{1}{3}$BJ et CR = $\frac{1}{3}$CK, et de façon similaire les points P', Q' et R' sur les médianes de A'B'C'. Ces points sont les milieux des segments formés par les centres de gravité et les sommets des triangles.

En appliquant la réciproque du théorème des milieux dans les triangles ABG et A'B'G' (ou la réciproque de Thalès, comme vous voulez), on trouve :

$$KP = BQ = QP = \frac{1}{3}BJ, \text{ et de même } K'P' = \frac{1}{3}B'J', \text{ d'où } KP = K'P'.$$

On sait par ailleurs que

$$KG = \frac{1}{3}KC = \frac{1}{3}K'C' = K'G' \text{ et que } PG = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}A'I' = P'G'.$$

En utilisant le 1^er^ critère d'isométrie, on en déduit que <u>KGP et K'G'P' sont isométriques</u>.

On montre de même que les 5 autres triangles « centraux » (vous voulez vraiment les dix noms ?) sont isométriques.

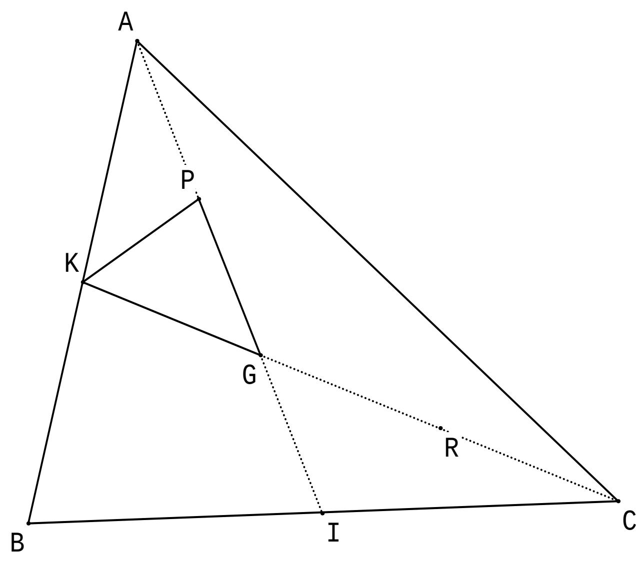
D'après la réciproque du premier critère, les isométries conservant les mesures d'angles, tous leurs angles sont égaux deux à deux. Or $\widehat{APK}$ et $\widehat{KPG}$ sont supplémentaires, de même que $\widehat{A'K'P'}$ et $\widehat{K'P'G'}$. Comme $\widehat{KPG} = \widehat{K'P'G'}$, alors $\widehat{APK} = \widehat{A'K'P'}$. On a toujours AP = A'P' et PK = P'K'. J'utilise alors ce que j'appelle dans mon cours le

<u>Second critère d'isométrie :</u> Deux triangles sont isométriques si et seulement s'ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur.

On prouve alors que <u>APK et A'P'K' sont isométriques</u>. On montre de même que tous les triangles « périphériques » sont isométriques. Des considérations d'alignement et d'égalité de longueur nous prouvent que les côtés des triangles ABC et A'B'C' ont même longueur deux à deux, et donc qu'ils sont isométriques d'après le premier critère.

<u>Vue sous un angle légèrement différent :</u> Le triangle « fondamental » d'un triangle.

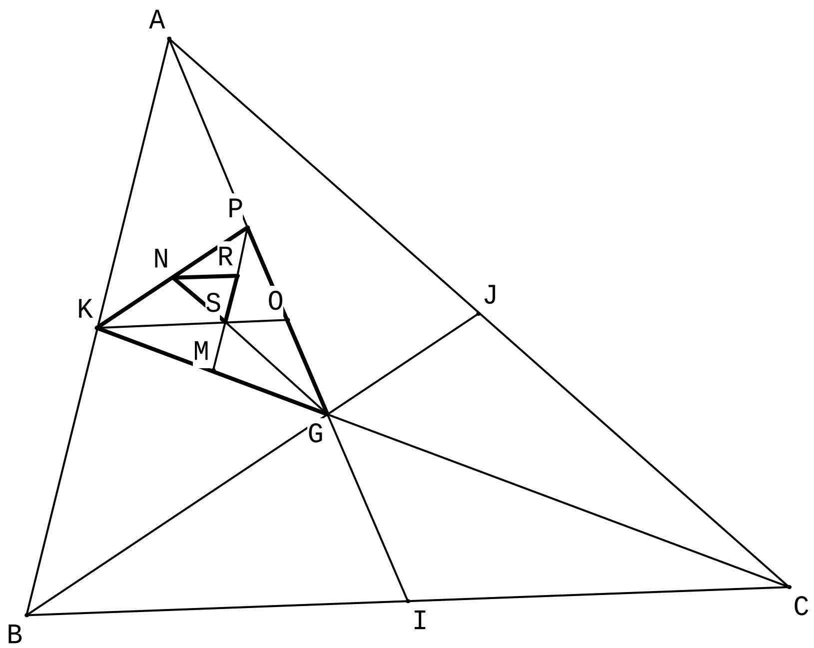
Si l'on considère deux triangles ABC et A'B'C' dont les médianes sont isométriques ; comme les triangles GPK et G'P'K' construits précédemment ont des côtés égaux au tiers des médianes des triangles ABC et A'B'C', ils sont donc isométriques. Appelons chacun de ces triangles « triangle fondamental associé » à ABC et A'B'C'.
En quoi « fondamental » se demandera-t-on ? La réponse est simple. La donnée d'un triangle fondamental permet de manière simple la « reconstruction » du triangle initial et la donnée de deux triangles « fondamentaux » isométriques équivaut à la donnée de deux triangles reconstruits » isométriques, d'où la propriété de Nicolas.



La reconstruction de ABC à partir de son triangle « fondamental » est immédiate ou presque. On construit I symétrique de P par rapport à G, A symétrique de G par rapport à P, R symétrique de K par rapport à G, C symétrique de G par rapport à R et enfin B symétrique de C par rapport à I. Qui douterait de l'isométrie des triangles ABC et A'B'C' ainsi reconstruits à partir des deux triangles PKG et P'K'G' isométriques ?

Ainsi une curieuse dualité lie un triangle à son triangle fondamental. L'étude de cette dualité mériterait bien d'être faite. Citons simplement une propriété facile à démontrer :

Théorème de Nicolas : Le triangle fondamental associé au triangle fondamental d'un triangle donné est semblable à ce dernier.



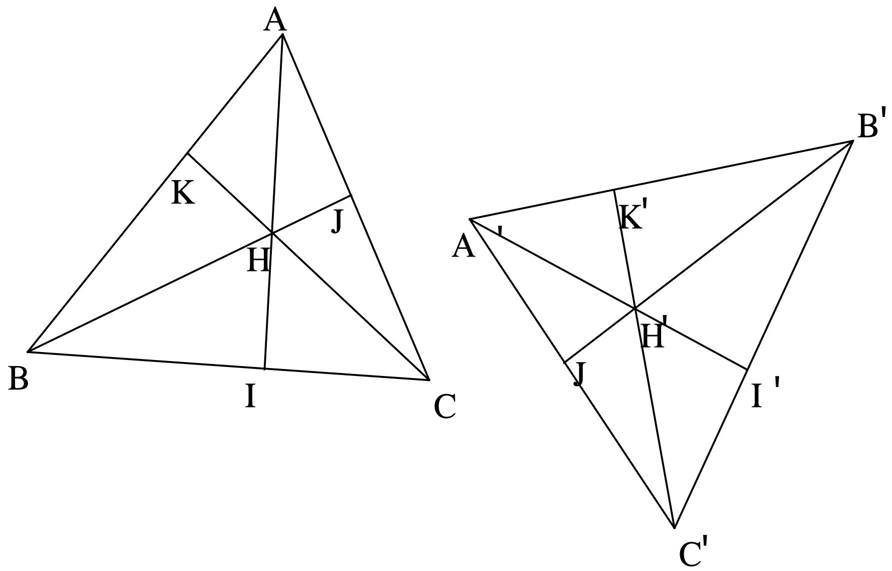
La preuve utilise largement la réciproque du théorème des milieux, ce qui peut donner lieu à un DM court mais sympathique.

Dans ABI, par le jeu des rapports, O milieu de [PG] et donc de [AI] ; donc comme K milieu de [AB], (KO) et (BI) sont parallèles et KO $=\frac{1}{2}$BI. Par la réciproque du théorème des milieux dans KPS, (NR) est parallèle à (KO) et donc à (AI), et

$$\mathrm{NR} = \frac{1}{2}\mathrm{KS} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\mathrm{KO} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{BI} = \frac{1}{12}\mathrm{BC}$$

Dans AKG, P et M sont les milieux respectifs de [AG] et [KG], donc (MP) et (AB) sont parallèles et $MP = \frac{1}{2}AK$. Donc $RS = \frac{1}{3}MP = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}AK = \frac{1}{12}AB$.
Dans ABC, K et I milieux de [AB] et [BC] donc (KI) et (BC) parallèles et $KI = \frac{1}{2}BC$. Dans KPI, N et G milieux de [KP] et [IP] donc (NG) et (KI) parallèles et $NG = \frac{1}{2}KI$, donc $NS = \frac{1}{3}NG = \frac{1}{12}BC$.
Donc ABC et NRS sont semblables avec un rapport de 1/12. Le parallélisme des côtés deux à deux implique même qu'ils sont homothétiques, mais nous n'avons aucune preuve concernant le centre de cette homothétie. Tout au plus avons-nous une figure Geoplan qui montre que ce n'est ni le centre de gravité de NRS (c'est peu étonnant), ni le point d'intersection des symédianes.

2. Deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs hauteurs ont même longueur deux à deux.



Comme précédemment, le sens direct est trivial. Petit jeu : des angles droits sont cachés dans cette figure ; saurez-vous les retrouver ?
Supposons à présent que AI = A'I', BJ = B'J' et CK = C'K'. On peut calculer l'aire de ABC et A'B'C' de trois façons différentes avec les hauteurs, donc on peut écrire :

$$AI \times BC = BJ \times AC = CK \times AB,$$

$$\text{et également } A'I' \times B'C' = B'J' \times A'C' = C'K' \times A'B'$$

En divisant les trois égalités de gauche par celles de droite, et en simplifiant par les hauteurs égales, il vient : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. On peut alors utiliser le

<u>Critère de similitude :</u> Deux triangles sont semblables si et seulement si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Une fois de plus, on peut utiliser ce critère comme définition ; dans ce cas le rapport entre similitude et égalité des angles est un théorème.

Quoiqu'il en soit, <u>ABC et A'B'C' sont semblables</u>, et donc leurs angles sont égaux deux à deux. L'égalité des rapports nous donne en particulier $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, et donc $\tan \widehat{ABC} = \tan \widehat{A'B'C'}$, donc $\frac{AI}{AB} = \frac{A'I'}{A'B'}$, et donc par égalité des hauteurs AB = A'B'. On fait de même pour les deux autres côtés, et on peut alors conclure que ABC sont isométriques d'après le premier critère.

3. Médiatrices et bissectrices ?

Le problème des médiatrices nous a semblé inintéressant pour deux raisons. Premièrement parce nous ne sommes pas arrivés à le résoudre. Et deuxièmement parce que la *longueur* d'une médiatrice est un concept problématique : c'est la seule des quatre droites remarquables vues en collège qui ne passe pas par un sommet du triangle. Comment utiliser une information qui exclut les sommets alors qu'on veut se ramener à l'un des trois critères d'isométrie, qui ne parlent que des côtés ou des angles ? Une piste de recherche serait de voir la médiatrice comme l'image d'une hauteur par hotothétie de centre un sommet avec un rapport bien choisi, et d'utiliser le résultat vu en 2. Nous avons trouvé quelques pistes de réflexion pour les bissectrices, que nous gardons pour un prochain article.
La grande différence entre la médiatrice et la bissectrice d'une part, et la hauteur et la médiane d'autre part, c'est que s'il existe des propriétés métriques pour toutes, pour les premières ces propriétés ne portent pas sur leur longueur (la médiatrice comme axe de symétrie du côté, la bissectrice comme axe de symétrie de l'angle), alors que pour les secondes il existe des formules métriques qui utilisent leur longueur (l'aire pour la hauteur, le centre de gravité au tiers pour la médiane), et qu'on a d'ailleurs utilisées dans nos preuves.

4. Conclusion

D'une suggestion innocente mais pleine de sens, on a pu tirer deux démonstrations aisément accessibles à un élève de seconde. Il est même possible de les proposer en DM, après avoir vu le chapitre sur les triangles. Un grand merci à Nicolas qui a été à l'origine de cet article !