

La notation puissance et ses mystères

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

Résumé : étude de différents problèmes posés par la notation "puissance".

Mots clé : Catalan, puissance, exposant, parenthésage.

Nous savons tous que les élèves (et même des plus grands) maîtrisent mal les manipulations sur les puissances.

Il faut dire que les règles sont nombreuses et délicates.

Sans parler des échafaudages comme celui ci :

$$a^{a^{a^a}}$$

qui sont imprécis en l'absence de définitions ou conventions préalables.

- Nous nous limiterons ici pour simplifier au cas où la base et tous les exposants sont égaux à un même réel positif a .

Pour lever toute ambiguïté, nous utiliserons désormais :

Pour a^a la notation $a \uparrow a$

Pour $a^{(a^a)}$ la notation $a \uparrow (a \uparrow a)$

Pour $(a^a)^a$ la notation $(a \uparrow a) \uparrow a$ etc.

Ainsi : $(3 \uparrow 3) \uparrow (3 \uparrow 3)$ s'écrit traditionnellement $(3^3)^{3^3}$

On va voir apparaître des choses bizarres, dues au simple fait que la notation puissance n'est pas associative.

Ainsi : le fait que $(a^a)^a = a^{(a^2)}$ entraîne $(a \uparrow a) \uparrow a = a \uparrow (a \uparrow 2)$

On conservera occasionnellement la convention "priorité à droite" c'est-à-dire que dans un "échafaudage" d'exposants de lecture ambiguë, on commence toujours par lire les exponentiations les plus à droite :

$$a^{(b^c)} = a^{b^c} \text{ ne doit pas être confondu avec } (a^b)^c$$

dans le premier cas la première exponentiation effectuée est b^c

dans le second cas la première exponentiation effectuée est a^b

- Si on se permet un échafaudage de puissances utilisant **n fois la flèche $\uparrow$** (donc contenant **$n + 1$** variables toutes égales à a) nous noterons dans ce cas :

$p = p(n)$ le nombre de parenthésages possibles,

$v = v(n)$ le nombre maximal de valeurs distinctes obtenues en général, compte tenu du fait que des parenthésages différents peuvent donner la même chose, et

$v = v_a(n)$ le nombre de valeurs réellement distinctes obtenues pour la valeur particulière a .

Les exemples suivants vont clarifier tout cela.

Le cas $n = 2$.

On a $p(2) = 2$ et $v(2) = 2$.

En effet :

Les 2 parenthésages possibles avec $n + 1 = 3$ fois la lettre a sont :

$$a \uparrow (a \uparrow a) = a^{(a^a)} \text{ et } (a \uparrow a) \uparrow a = (a^a)^a = a^{(a^2)} \text{ d'où } p(2) = 2.$$

Les 2 résultats sont différents **en général** :

$$[3 \uparrow (3 \uparrow 3) = 3^{27} \text{ mais } (3 \uparrow 3) \uparrow 3 = 3^9] \text{ d'où } v(2) = 2.$$

Mais dans le cas particulier $a = 2$ on n'a qu'une valeur pour les deux parenthésages :

$$2 \uparrow (2 \uparrow 2) = 2^4 = (2 \uparrow 2) \uparrow 2 = 4^2 = 16$$

ce qui avec notre notation donne $v_2(2) = 1$.

Le cas $n = 3$.

C'est déjà plus compliqué :

On a $p(3) = 5$ et $v(3) = 4$.

En effet les 5 parenthésages possibles avec $n + 1 = 4$ fois la lettre a sont :

$a \uparrow (a \uparrow (a \uparrow a))$	$=$	$a \uparrow (a \uparrow a^a) = a \uparrow a^{a^a} = a^{a^{a^a}}$	P1
$a \uparrow ((a \uparrow a) \uparrow a)$	$=$	$a \uparrow (a^a \uparrow a) = a \uparrow (a^a)^a = a \uparrow a^{a^2} = a^{a^{a^2}}$	P2
$(a \uparrow a) \uparrow (a \uparrow a)$	$=$	$(a^a)^{a^a} = a^a \times a^a = a^{a^a + 1}$	P3
$(a \uparrow (a \uparrow a)) \uparrow a$	$=$	$(a \uparrow a^a)^a = (a^{a^a})^a = a^{a^a \times a} = a^{a^{a+1}}$	P4
$((a \uparrow a) \uparrow a) \uparrow a$	$=$	$((a^a)^a)^a = (a^a)^{a^2} = a^{a^3}$	P5

Remarquons que les troisième et quatrième parenthésages ci-dessus qui sont pourtant différents représentent en fait la même expression mathématique :

$$(a \uparrow a) \uparrow (a \uparrow a) = (a \uparrow (a \uparrow a)) \uparrow a = a^{a^{a+1}}$$

d'où

$$v(3) = 4 \text{ et non } 5.$$

Remarquons aussi que $v_2(3) = 2$ puisque dans le cas particulier de la base 2 on ne peut obtenir que 2^8 (pour P3, P4 et P5) ou 2^{16} (pour P1 et P2).

• Et ensuite ?

Le calcul du nombre de parenthésages $p(n)$ est un problème classique d'analyse combinatoire.

Le résultat admis ici est :

$$p(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (\text{Ce sont les nombres de Catalan})$$

Ainsi $p(3) = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = 5$ comme vu précédemment, puis :

$$p(4) = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = 14 \quad p(5) = 42 \quad p(6) = 132 \quad p(7) = 429 \quad \text{etc.}$$

Mais le calcul du nombre de résultats (en général distincts) $v(n)$ est un problème difficile.

Pour $n = 4$, on a vu qu'il y a $p(4) = 14$ parenthésages, et un dénombrement soigné montre qu'il y a seulement $v(4) = 9$ résultats différents en général.

Ces 9 résultats sont toutes les expressions de la forme a^{λ} avec :

$$\lambda \in \left\{ a^a; a^{a^2}; a^{a+1}; a^3; a^a + 1; a^2 + 1; 2a; a + 2; 4 \right\}$$

La réduction de 14 parenthésages à 9 résultats différents seulement, vient du fait déjà rencontré plus haut, que des écritures distinctes du point de vue parenthésage donnent en fait les mêmes résultats après développement.

On trouve même parmi les 14 parenthésages, trois d'entre eux qui sont équivalents pour tout a :

$$\begin{aligned} [(a \uparrow a) \uparrow a] \uparrow (a \uparrow a) &= \\ [(a \uparrow a) \uparrow (a \uparrow a)] \uparrow a &= \\ [(a \uparrow (a \uparrow a)) \uparrow a] \uparrow a &= a^{a^{a+2}} \end{aligned}$$

C'est un bon exercice de vérifier ceci.

Insistons sur le fait déjà mentionné que si les $v(4) = 9$ résultats sont en général distincts, pour certaines valeurs particulières de a , on peut en avoir moins ; ainsi :

Si φ désigne le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on a "exceptionnellement" l'égalité :

$$\varphi \uparrow [\varphi \uparrow ((\varphi \uparrow \varphi) \uparrow \varphi)] = \varphi \uparrow [(\varphi \uparrow (\varphi \uparrow \varphi)) \uparrow \varphi] \approx 13,79210456 \text{ pour une raison que le lecteur trouvera en "développant".}$$

Mais si on prend $z = 1.618$ qui n'est pas tout à fait égal à φ alors :

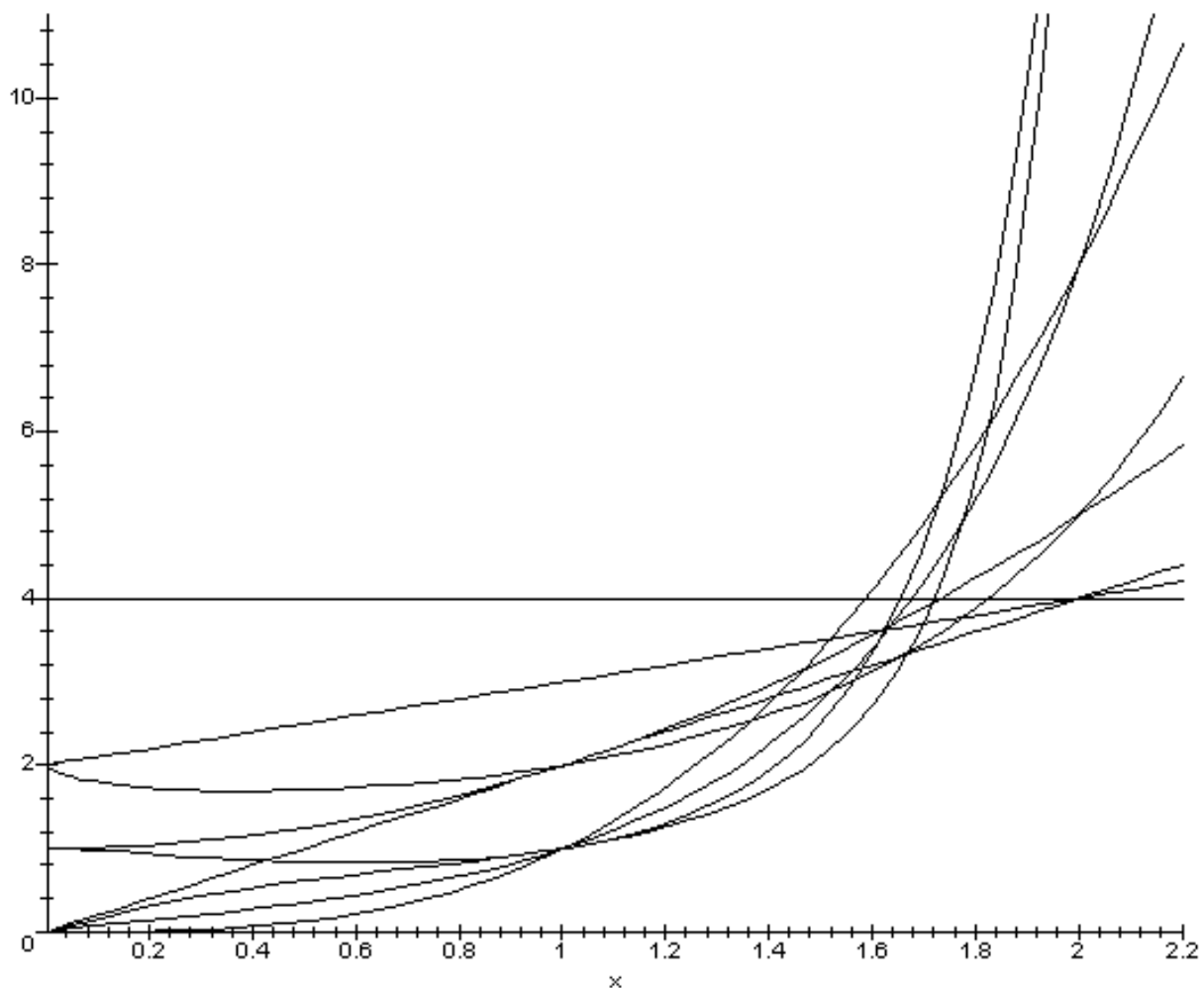
$$\begin{aligned} z \uparrow [z \uparrow ((z \uparrow z) \uparrow z)] &\approx 13.781226380518911733 \\ z \uparrow [(z \uparrow (z \uparrow z)) \uparrow z] &\approx 13.783468877678062958 \end{aligned} \quad \text{sont différents.}$$

- Voici les 9 courbes

$$x \rightarrow \left\{ x^{x^x}; x^{x^2}; x^{x+1}; x^3; x^x + 1; x^2 + 1; 2x; x + 2; 4 \right\}$$

qui font bien apparaître le nombre [entre 4 et 9] de valeurs réellement distinctes de l'expression $a \uparrow a \uparrow a \uparrow a \uparrow a$ selon l'emplacement des parenthèses.

Ainsi, on voit qu'il se passe des choses vers $x = 1,618...$



- Enfin, voici ce que j'ai comme résultats où n est toujours le nombre d'exponentiations :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(n)$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786
$v(n)$	1	2	4	9	20	48	115	286	719	1842	4766
$v_2(n)$	1	1	2	4	8	17	36	78	171	379	888
$v_3(n)$	1	2	4	9	20	47	111	270	664	1659	?
$v_4(n)$	1	2	4	9	20	48	114	282	703	1787	?

Les faibles valeurs de $v_2(n)$ comparées au maximum théorique $v(n)$ viennent de $2^4 = 4^2$

En effet, on a vu plus haut que $2 \uparrow (2 \uparrow 2) = 2^4 = (2 \uparrow 2) \uparrow 2 = 4^2 = 16$.
Cette particularité de la base 2 explique que le nombre de "valeurs" est bien plus petit que le nombre de parenthésages.

Bibliographie :

J'ai obtenu les premiers termes de la suite $p(n)$ et des suites $v(n)$; $v_2(n)$, $v_3(n)$; $v_4(n)$ dans le livre : The encyclopedia of integer sequences, de N.J.A SLOANE et Simon PLOUFFE.

Dans ce livre, plus de 5000 suites "classiques" (classées par ordre lexicographique) sont décrites par leurs premiers termes, avec une brève indication de leur origine.

On obtient beaucoup plus de renseignements sur le site :

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html>

Ce site absolument génial permet d'obtenir tout ce qu'on peut souhaiter savoir sur une suite d'entiers dont on a entré les 7 ou 8 premiers termes.

Exemple : dans la page d'accueil, une fenêtre est en haut, dans laquelle on me demande d'entrer une suite d'entiers (séparés par des virgules) puis de cliquer sur SEARCH.

Je tape 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108 search.

Et au bout de 0,004 secondes (le temps est mentionné) je vois apparaître entre autres : [A000078](#) Tetranacci numbers: $a(n) = a(n-1) + a(n-2) + a(n-3) + a(n-4)$.

En général, une ou plusieurs pages d'explications accompagnent la (ou les) réponse(s).

Les logiciels utilisés font qu'il est pratiquement impossible d'échouer.