De la mise en œuvre d'un problème d'élève de CP à un problème de devoir blanc de PE1[1] : les tours à trois étages

Nicole BONNET, professeur de mathématiques et formateur à l'IUFM de Dijon, IREM de Dijon, Ex membre de la COPIRELEM[2]

Adresse mel : nicole.bonnet @dijon.iufm.fr

Résumé et conclusion de l'article paru dans la feuille de vigne n°109

Les questions fédératrices à cette étude sont :

Comment transposer une activité de CP décrite dans ERMEL à un projet de formation pour des stagiaires PE2 dans le cadre d'un atelier de pratique professionnelle ?

Quels problèmes de mise en œuvre vont découler de la situation ?

Comment transformer les questions essentielles en un outil de formation pour des étudiants PE1 au travers d'un sujet de concours.

Les objectifs pédagogiques étaient les suivants :

- *Identifier et mettre en œuvre quelques concepts fondateurs du champ de la didactique des mathématiques dans la conception des séances d'apprentissages.*
- *Situer les grands types de démarches et outils pédagogiques existants dans les pratiques.*
- *Se référer aux écrits de recherche pour analyser une situation professionnelle.*

À l'issue de ces séances, les compétences que n
ous avons tenté de faire acquérir étaient les suivantes :

- *Être capable de préciser et d'améliorer son expérience et son projet personnel par rapport à la formation initiale en ayant un repérage plus précis des approches et activités didactiques du champ des mathématiques.*
- *Être capable de repérer par une analyse a priori les difficultés potentielles des élèves et y trouver des remédiations sans « tuer » le problème.*

[1] PE1 : cette abréviation désigne les étudiants professeurs des écoles première année.

[2] COPIRELEM : commission inter IREM pour l'école élémentaire

- ♦ *Être capable de maîtriser le contenu disciplinaire et d'innover (problème algorithmique, classements vers une méthodologie, invention des règles d'un jeu…)*

Globalement, nous estimons que ces objectifs ont été atteints. Les indicateurs de cette évaluation sont les suivants :

- ♦ Grand investissement des stagiaires dans la préparation (les fiches qui ont donné lieu aux séances sont plus pertinentes que celle proposée dans le devoir blanc), supports de qualité et pensés dans une efficacité, réflexion collective pour répondre aux questions multiples.
- ♦ Cet atelier pédagogique a, en outre, été la source d'écrits qui servaient de base à l'évaluation des modules d'enseignement des PE2. Quelques-uns l'ont exploité dans leurs mémoires professionnels, soit à titre d'exemple, soit pour confirmer leurs dires dans le cadre d'une polyvalence.

Le chapitre 6, du présent numéro de la feuille de vigne, ne concerne qu'une proposition de corrigé du devoir blanc proposé aux étudiants PE1. Il apporte des éléments de réponse à quelques questions parmi les nombreuses qui se sont posées.

6. Proposition de corrigé[3] de l'exercice du devoir blanc

Exercice 1 (4 points)

On veut peindre les étages de tours comportant trois étages.
On dispose de trois couleurs : bleu, vert, et jaune.
Chaque étage doit être peint uniformément.

1. Si on n'impose aucune contrainte, combien de tours différentes pourra-t-on avoir ?

La case supérieure peut être de 3 couleurs ; pour chacune de ces couleurs, la case centrale peut être de 3 couleurs, ce qui fait déjà 3 x 3 possibilités, et enfin pour chacune de ces possibilités, la case inférieure peut être de 3 couleurs, ce qui donne donc 3 x 3 x 3 = **27 possibilités**.

On peut évidemment représenter cela par un arbre, mais le raisonnement précédent est amplement suffisant…

On pouvait aussi retrouver ce résultat suivant un raisonnement sans doute plus proche de ce que l'on peut trouver en cycle II :

- ♦ Il y a trois tours d'une seule couleur.

[3] Corrigé écrit en collaboration avec M. Renaut, après la correction des copies de nos étudiants PE1.

- Il y a 6 tours peintes avec trois couleurs différentes : on a le choix de trois couleurs pour le premier étage, puis le choix de deux couleurs pour le deuxième étage (car on ne peut prendre deux fois la même couleur), puis un seul choix pour le troisième étage. Cela fait 3 x 2 x 1. Soit 6 tours différentes.
- Il y a ensuite 12 tours ayant deux couleurs identiques sur deux étages adjacents. En effet 6 tours ont les deux étages du bas de la même couleur et 6 autres tours ont les deux étages du haut de la même couleur.
- Puis il reste 6 tours ayant le premier et le troisième étage d'une même couleur, l'étage du centre d'une couleur différente.

Au total, on a donc **27 tours différentes sans imposition de contrainte.**

On dispose maintenant de quatre couleurs : bleu, jaune, vert et rouge.

2. Si on ne veut pas de tour peinte d'une seule couleur, combien de tours différentes pourra-t-on avoir ? (On ne souhaite pas que les étages soient peints tous les trois en bleu, mais il est possible que deux étages soient de la même couleur)

Raisonnons comme s'il n'y avait pas de contrainte

Chacun des étages peut être d'une couleur, quelle que soit la couleur des deux autres.

Pour chaque couleur du premier étage, il y a quatre couleurs possibles pour le deuxième, ce qui fait donc pour les deux premiers étages 4 x 4 solutions distinctes.

Pour chacune de ces 4 x 4 solutions distinctes, il y a encore 4 peintures possibles pour le troisième étage. D'où (4 x 4) x 4 possibilités de peinture.

Or, il y a quatre tours peintes d'une même couleur qu'il faut ne pas compter.

Cela donne (4 x 4 x 4) – 4 = 60.

On a donc **60 tours différentes qui ne sont pas peintes d'une seule couleur**.

3. On impose à l'étage central d'être rouge. Combien de tours différentes aura-t-on ? Dans ce cas, les deux autres étages peuvent être peints chacun de quatre couleurs, ce qui donne 4 x 4 =16.

On a donc **16 tours différentes peintes telles que l'étage central soit rouge**.

4. On n'impose plus à l'étage central d'être rouge, mais on impose à deux étages adjacents de ne pas être peints de la même couleur. Combien de tours différentes pourra t-on avoir ?

L'étage central a deux étages adjacents. Il est donc utile de raisonner à partir de cet étage central. Supposons qu'il soit déjà peint. Pour chacune des quatre couleurs de l'étage central, il reste la possibilité de choisir trois couleurs pour l'étage du haut et trois couleurs pour l'étage du bas.

Donc pour chacune des 4 couleurs possibles pour l'étage central, on a 3 x 3 possibilités de choisir les couleurs des deux autres.
Donc au total, cela donne 4 x 3 x 3 = 36. On a donc **36 façons de peindre les tours sans que deux étages adjacents soient de la même couleur.**

> ***Remarque** à propos de la phrase **:** « Il est donc utile de raisonner à partir de cet étage central. »*
> *Le raisonnement est le même si on part de l'étage du haut ou de l'étage du bas. Il n'est donc pas « utile » de privilégier l'étage central. Parton, par exemple, de l'étage du haut (4 possibilités de couleurs), il reste trois possibilités de couleurs pour l'étage central et encore trois possibilités de couleur pour l'étage du bas. La conclusion est la même, heureusement ! la seule différence est qu'en fixant la couleur de l'étage central, on raisonne sur les même couleurs pour les étages des extrémités, ce qui n'est pas le cas en fixant la couleur d'un autre étage.*

Question complémentaire (5 points)
Une maîtresse débutante de CP décide de mettre en œuvre une recherche concernant la peinture des étages d'une tour.
Elle veut faire peindre des tours de trois étages avec trois couleurs différentes, bleu, vert et rouge, sans imposer aucune contrainte.

Questions concernant la fiche de préparation.
1. Commentez la phrase de la maîtresse pendant la phase de recherche. (« pendant que les enfants cherchent … identiques »)

Cette phrase concerne les actions de la maîtresse pendant que les élèves cherchent. Elle a prévu de passer dans les rangs pour :

- donner des conseils

- pointer les tours identiques

Examinons chacun des deux points.

Quels conseils peut-elle donner ?

Tout d'abord, remarquons qu'elle ne doit pas donner de conseils méthodologiques comme « commence par colorier toutes les tours dont le premier étage est rouge » ou pire comme « fais un arbre » car dans ce cas, elle casse la recherche et dévoile l'objectif de la séance suivante.
Quelles autres interventions pourrait-elle bien avoir ?

- Demander aux élèves de s'appliquer à colorier : il ne semble pas que ce soit là un objectif mathématique. Au contraire ne pas faire attention aux débordements et colorier vite pour faire le plus de tours possible. A ce moment, elle aurait du prévoir des gommettes au lieu du coloriage car les enfants de cet âge peuvent prendre du plaisir à colorier et oublier le but mathématique de la recherche.

- ♦ Leur conseiller de ne s'occuper que de leur feuille et de ne pas bavarder : ne perdrait-elle pas ainsi une richesse provoquée par les idées des autres élèves ? En effet, il y a 27 solutions et le copiage est mal aisé.
- ♦ Répéter la consigne pour ceux qui ne l'auraient pas bien comprise, sans induire aucune méthode : ce type d'intervention est évidemment bien préférable aux précédentes.

Pointer les tours identiques. Quel est l'intérêt pour l'élève si c'est la maîtresse qui pointe deux tours identiques sinon de lui montrer une chose qu'il n'a pas vue. Il vaut bien mieux qu'elle questionne l'élève et lui demande : « Je crois bien avoir vu deux tours identiques sur ta feuille. Cherche lesquelles. » L'élève sera ainsi dans l'obligation de se concentrer et de comparer une à une les tours qu'il a coloriées. Si cette question est trop difficile, la maîtresse pourra pointer une des deux tours identiques et demander à l'élève de trouver la même.
Nous voyons bien sur la production d'Alexandre, qu'il est très difficile pour une enseignante seule dans sa classe de « pointer » toutes les erreurs des élèves. En effet, cet élève a su identifier la tour V, B, B (troisième tour) et mettre une croix en dessous de celle-ci, mais il ne s'est pas rendu compte qu'il en avait une identique (quinzième tour). Les tours 11 et 14 sont aussi identiques.

2. La maîtresse fait travailler les élèves individuellement. Chacun dispose de 30 carrés de 5 cm de côté de chaque couleur (voir le chapitre matériel sur la fiche de préparation). Comment pensez-vous qu'elle ait prévu l'organisation de la phase collective **?**

Remarques :
Il est indiqué dans la préparation que la maîtresse a prévu 30 carrés de chaque couleur. Il y a donc suffisamment pour former les 27 tours car il suffit de 27 carrés de chaque couleur.

D'autre part, une production d'élève est fournie en annexe et elle donne une indication quant à la mise en commun qu'il convient de ne pas négliger.

Dans cette phase, la maîtresse prévoit de ne pas engager une méthodologie qui est prévue en séance 2.

Il est impossible d'afficher toutes les feuilles des élèves au tableau car ils sont trop nombreux et les tours trop petites. Un élève du fond de la classe ne verrait rien. La maîtresse a donc prévu beaucoup de carrés de couleur qui vont lui permettre de construire des tours agrandies.

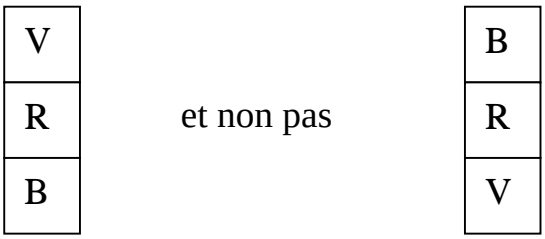
Elle peut interroger à tour de rôle chaque élève et lui demander de venir construire une de ses tours. Elle accroche les tours (avec de la patafix) comme elles viennent, sans ordre préconçu. Cet élève ainsi que les autres sont alors invités à noter la tour peinte, grâce à une croix, comme en atteste la production d'élève de l'annexe 3.

Elle obtiendra ainsi de façon non organisée, un éventail de tours possibles. Il n'est pas encore question de méthodologie à ce stade.

3. Lors de la mise en commun, quelles sont les difficultés langagières auxquelles on peut s'attendre de la part des élèves lors de la description des tours **?**

***Remarque* :** *la question porte sur les difficultés de langage dues à la description des tours et pas à la description d'une méthode…*

- Soit la maîtresse a pris la précaution, dans la consigne de numéroter les étages : premier étage, deuxième étage, troisième étage. Les élèves ont ainsi à énoncer les couleurs dans cet ordre : bleu, rouge, vert signifie qu'on va positionner les cartons colorés de la manière suivante :



Elle devra tout de même veiller que les élèves décrivent bien la tour qu'ils pointent sur leur feuille et pas une autre. Pour cela, il vaut mieux les inciter à dire : « bleu pour le premier étage, rouge pour le deuxième étage, vert pour le troisième étage ».

- Soit elle n'a pas pris cette précaution, et des termes comme « au-dessus », « au-dessous » vont apparaître. Il va s'agir d'en préciser le sens pour tous les élèves car certains peuvent encore confondre ces deux termes. « Plus haut » et « plus bas » ou « en haut » et « en bas » vont aussi apparaître dans la description des tours. Il semble que ces termes soient plus facilement compris et utilisés par les élèves de CP.

Questions concernant le matériel.

4. Quelles différences y a-t-il entre

- ♦ donner à chaque élève une feuille sur laquelle sont déjà dessinées des tours et trois crayons de couleur : bleu, vert et rouge
- ♦ et donner à chaque élève une feuille sur laquelle sont déjà dessinées des tours et trois cubes : un bleu, un vert et un rouge?

Remarque préalable : *il est implicite et bien évident que si la maîtresse a prévu de donner des cubes et la feuille de papier où sont dessinées les tours, que les élèves auront en outre au moins un stylo (ou crayon de papier), au mieux trois crayons de couleur. Car sinon, comment peuvent-ils utiliser cette feuille ?*

- Si on donne une feuille et des crayons de couleur, les élèves peuvent trouver toutes les 27 solutions, mais cela sera long. Comme nous l'avons dit

précédemment, il vaudrait mieux leur donner des gommettes à coller pour éviter le temps de coloriage. Cette recherche peut paraître abstraite à certains élèves.

- Mais si on ne leur donne que trois cubes, ils ne pourront trouver que 6 tours différentes et non pas les 27 attendues. Pour qu'ils les trouvent toutes, il faudrait donner à chacun trois cubes de chaque couleur, en encourant le risque qu'ils produisent des tours de 9 étages, mais cela serait vite corrigé par le fait qu'ils doivent ensuite les colorier.

En fait, la manipulation peut aider certains élèves qui se représentent mal la situation et il est bon que les élèves aient à la fois des cubes en nombre suffisant (trois de chaque couleur), des crayons de couleur et la fiche de recherche.

5. Pourquoi la maîtresse a-t-elle prévu 36 tours sur la feuille de recherche qu'elle va distribuer aux élèves ?

Donner plus de tours que de tours possibles permet :

- l'erreur aux élèves : ils peuvent se tromper et barrer la tour qui est en double ;
- une plus grande ouverture de la situation : on ne donne pas au départ le nombre de possibilités et on laisse libre cours à la recherche.

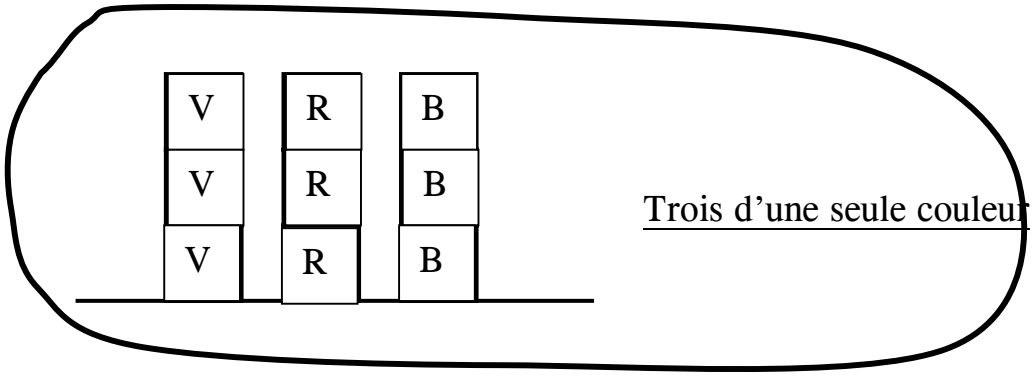
Question concernant la méthodologie de recherche.

6. La maîtresse n'a pas prévu sur sa fiche de préparation comment s'organiser car cela concerne la séance suivante. Avec le matériel dont elle dispose : carrés de trois couleurs de 5 cm de côté, comment envisageriez-vous cette méthodologie ?

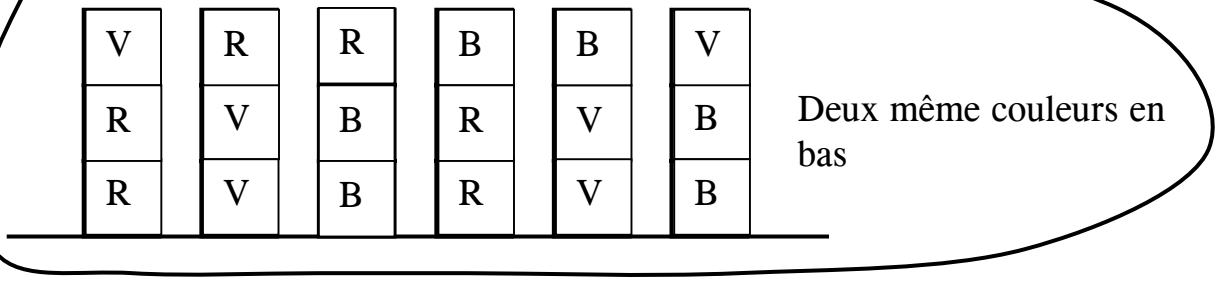
Après avoir construit toutes les productions des élèves (ou une grande partie), il serait souhaitable que les élèves se rendent compte qu'il serait bon **de classer les tours** pour pouvoir compléter celles déjà trouvées.

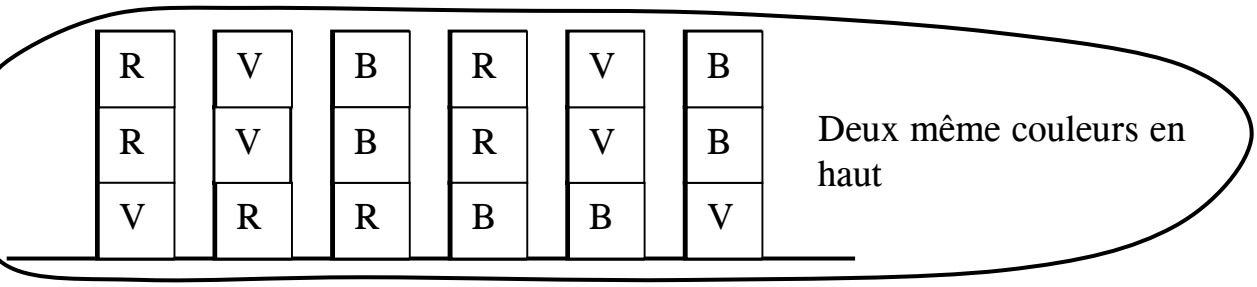
Il est probable que les enfants proposeront de :

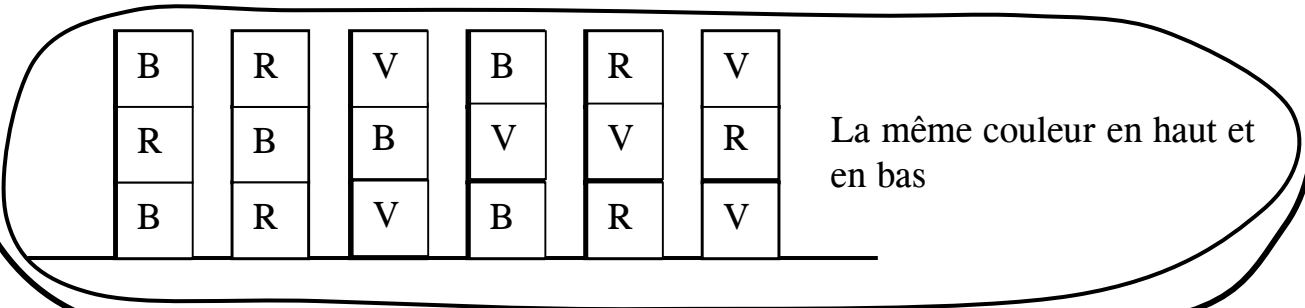
- Mettre ensemble les tours d'une seule couleur. Cela permet de visualiser qu'il n'y en a que trois.
- Mettre en ensemble les tours de trois couleurs. Cela permet de visualiser leur construction. Les élèves peuvent ainsi compléter cette classe si elle est incomplète. Il y a six tours.
- Les tours aux couleurs alternées peuvent alors apparaître. Et on peut de même compléter cette classe. Il y a 6 tours.
- Puis les tours ayant deux même couleurs en bas ou en haut. Le but est aussi de compléter ces deux classes avec les élèves. Il y a 12 tours de ce type. La page suivante illustre nos propos.

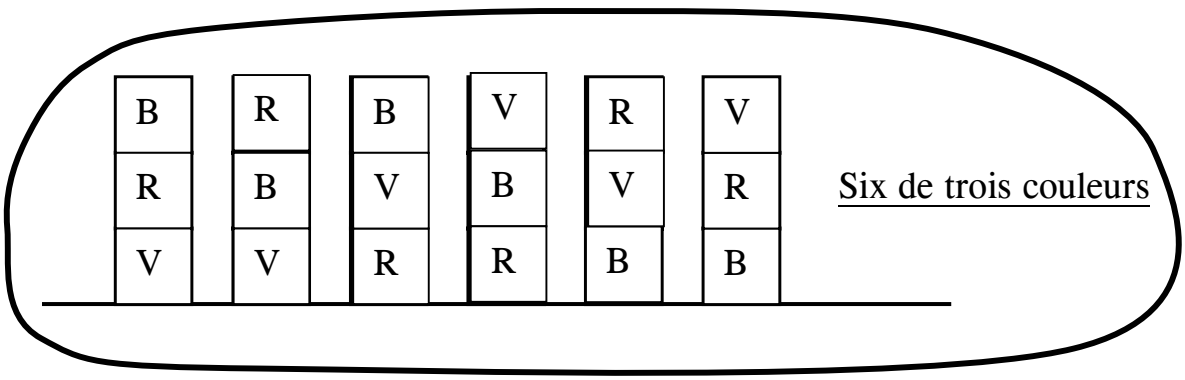


Dix-huit de deux couleurs

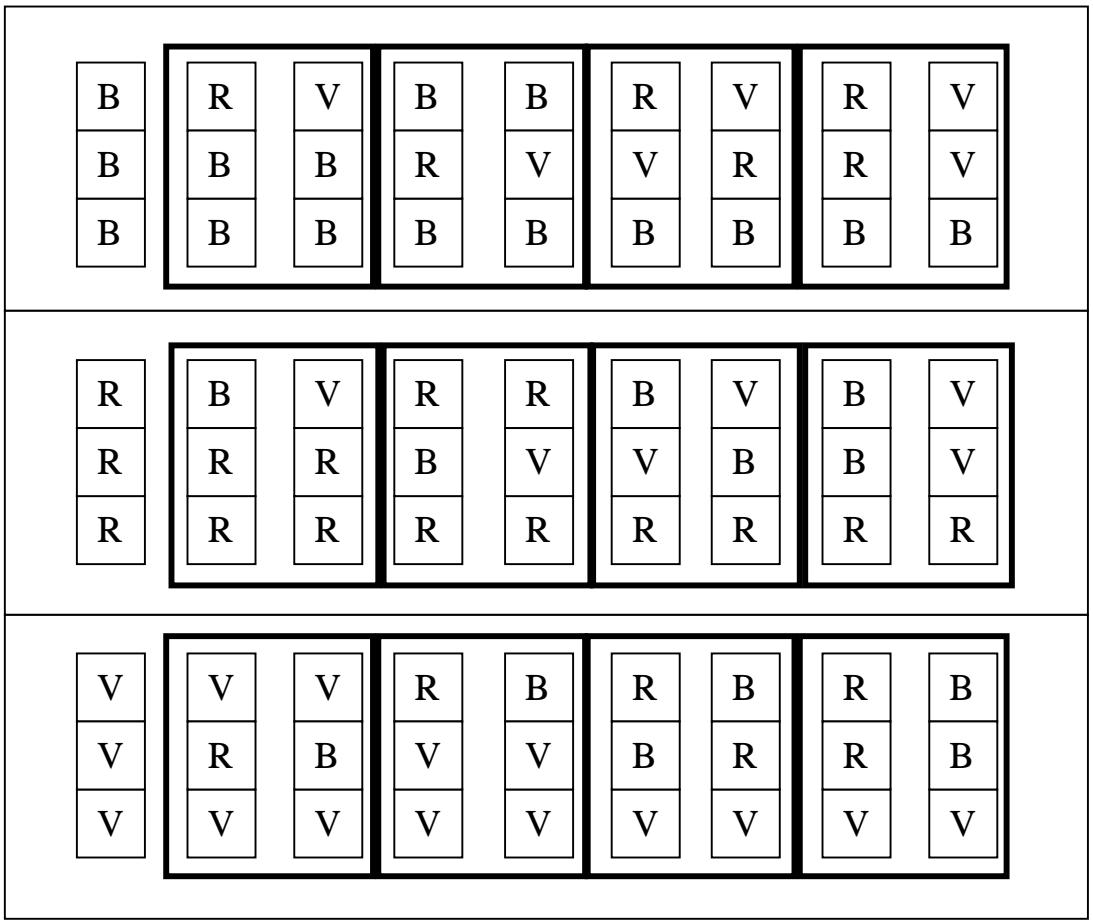








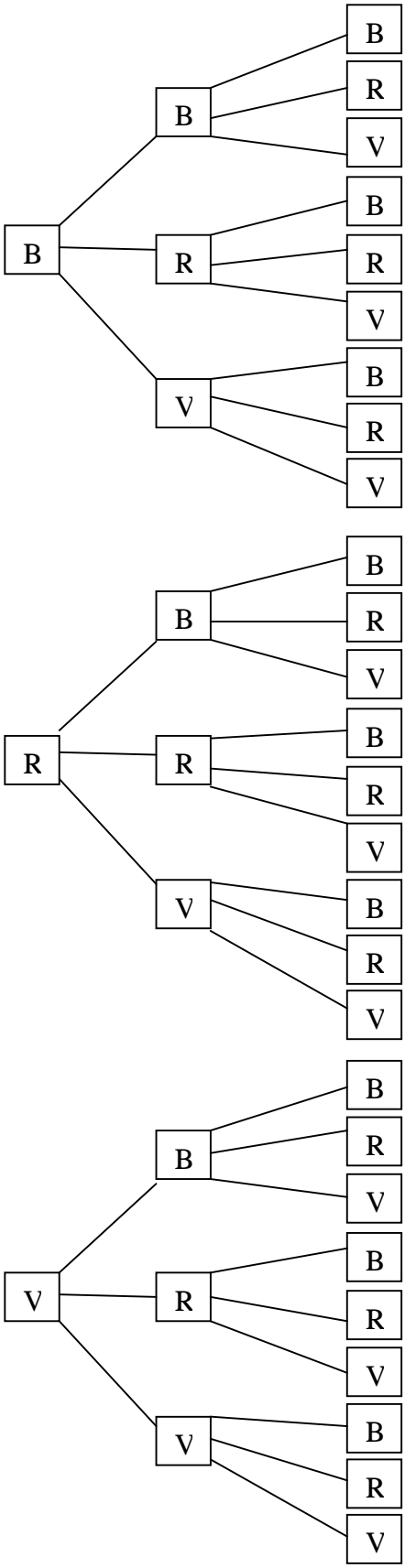
Un autre classement pourrait être proposé après que les élèves aient observé qu'il est possible de trouver des tours dont le premier étage est bleu.



C'est le premier pas vers un arbre !

Remarque :

Une autre idée très largement proposée par les étudiants est celle de faire produire directement aux élèves un arbre logique avec les carrés colorés (5 cm x 5 cm) dont dispose la maîtresse. Cependant, il nous semble que si cette méthode est trop précocement introduite, elle risque de ne pas produire du sens au niveau des élèves et d'en rester au niveau d'une seule technique, ce qui est absolument à éviter en cycle 2 d'autant que la structure formelle de l'arbre est très abstraite…
De plus la lecture « horizontale » (voir arbre ci dessous) ne facilite pas la compréhension imagée des tours verticales pour des élèves de CP. On pourrait proposer de faire un arbre vertical…
Nous ne pensons donc pas que ce soit très réaliste. Il vaut mieux, dans un premier temps travailler à l'aide de classements (ou de groupements) de tours identifiées comme ayant une propriété commune.



Nous pensons que cette méthode relève plutôt du cycle 3.