Placement d'argent

Michel Lafond
mlafond001@yahoo.fr

Mots clés : mathématiques financières – taux – intérêt – rente.
Résumé : Deux problèmes de mathématiques financières aux conclusions surprenantes.

1. Commençons par un problème simple

Si on place une somme constante a (euros) chaque fin de période à intérêt composé au taux périodique de 4 %, est-il possible de pouvoir retirer : 1 euro à la fin de la première période, 2 euros à la fin de la deuxième période, 3 euros à la fin de la troisième période, ..., n euros à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement ? Et si oui, quelle est la valeur minimale de a ?

•*Bref rappel*

Les unités (de temps et d'argent) étant arbitraires, un capital C placé au taux périodique t pendant n périodes, acquiert à la fin de ces n périodes la somme de $C(1+t)^n$.
La démonstration est évidente, puisque par définition du système des intérêts composés, à chaque période écoulée, le capital courant est multiplié par $1+t$.
Dans toute la suite, comme c'est l'usage chez nous, les versements ou retraits se feront systématiquement en fin de périodes. Ce ne sera plus précisé.

- *Notre problème se représente donc par le diagramme ci-dessous*

Fins de périodes	0	1	2	3	- - -	- - -	**n**	- - -	- - -
Capitaux versés		a	a	a	- - -	- - -	a	a	a
Capitaux retirés		1	2	3	- - -	- - -	n	- - -	- - -

Numériquement cela donne :

fins de périodes	Valeur acquise	versement	retrait	capital restant
1	0	a	1	$a - 1$
2	$[a - 1] \times 1{,}04$	a	2	$1{,}04a - 3{,}04$
3	$[1{,}04a - 3{,}04] \times 1{,}04$	a	3	$3{,}1216a - 6{,}1616$
	etc.			

- Regardons ce qui se passe dans le cas particulier où le versement périodique est $a = 8$.

L'arrondi est au centième inférieur.

fins de périodes	Valeur acquise	versement	retrait	capital restant
1	0	8	1	07,00
2	07,00 × 1,04	8	2	13,28
3	13,28 × 1,04	8	3	18,81
4	18,81 × 1,04	8	4	23,56
5	23,56 × 1,04	8	5	27,50
6	27,50 × 1,04	8	6	30,60
7	30,60 × 1,04	8	7	32,82
8	32,82 × 1,04	8	8	34,13
9	34,13 × 1,04	8	9	34,49
10	34,49 × 1,04	8	10	33,86
11	33,86 × 1,04	8	11	32,21
12	32,21 × 1,04	8	12	29,49
13	29,49 × 1,04	8	13	25,66
14	25,66 × 1,04	8	14	20,68
15	20,68 × 1,04	8	15	14,50
16	14,50 × 1,04	8	16	07,08
17	07,08 × 1,04	8		

On constate qu'au bout de 17 périodes, après avoir versé les 8 euros, on ne dispose que de $07{,}08 \times 1{,}04 + 8 = 15{,}36$ euros et qu'il est par conséquent impossible de retirer les 17 euros souhaités.

Conclusion : $a = 8$ ne suffit pas comme montant du versement périodique.

Une solution peut être trouvée, dans le cas particulier où le capital C_n disponible à l'époque n évolue linéairement en fonction de n à savoir : $C_n = \lambda n$.

Pour avoir cela, il faut qu'à l'époque suivante ($n + 1$) on ait :

$$\lambda\, n \times 1{,}04 + a - (n + 1) = \lambda\,(n + 1) \quad \text{et ceci pour tout entier } n.$$

En groupant les n on doit donc avoir $(0{,}04\,\lambda - 1)\, n = \lambda - a + 1$ pour tout entier n.
Cela entraîne $\lambda = 1 / 0{,}04 = 25$ et par suite $\lambda - a + 1 = 0$ d'où $a = 26$.
Effectivement l'évolution est alors la suivante :

fins de périodes	Valeur acquise	versement	retrait	capital restant
1	0	26	1	25
2	$25 \times 1{,}04$	26	2	50
3	$50 \times 1{,}04$	26	3	75
	etc.			

Conclusion : 8 € ne suffisent pas et 26 € suffisent pour les retraits souhaités.
Mais le problème n'est pas résolu tant qu'on n'a pas trouvé le montant minimal a des versements.
Il est temps de mettre le problème en équation.

2. Généralisation à un taux quelconque

Si on place une somme constante a chaque fin de période à intérêt composé au taux périodique t, est-il possible de pouvoir retirer : 1 à la fin de la première période, 2 à la fin de la deuxième période, 3 à la fin de la troisième période, …, n à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement ?
Et si oui, quelle est la valeur minimale de a ?

Soient t le taux périodique et a le versement périodique.
Reportons-nous au diagramme du haut. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit qu'à chaque fin de période, la somme des versements effectués soit au moins égale à celle des retraits. Comme à cause de la capitalisation des intérêts, un capital C acquiert une valeur différente à chaque époque, on ne peut comparer deux capitaux qu'à la même époque. Cette époque sera par commodité la fin de la $n^{\text{ième}}$ période.

- *Minoration de a.*

La somme "actualisée" V des valeurs versées est [formule issue d'une somme géométrique] :

$$V = a \left[(1+t)^{n-1} + (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-3} + \ldots + (1+t) + 1\right] = a \frac{(1+t)^n - 1}{t} \quad (1)$$

La somme "actualisée" R des valeurs retirées est :

$$R = (1+t)^{n-1} + 2(1+t)^{n-2} + 3(1+t)^{n-3} + \ldots + (n-1)(1+t) + n \quad (2)$$

Cette somme est plus compliquée à évaluer, aussi posons pour simplifier

$$u = (1 + t)^{-1} \qquad (3)$$

R s'écrit : $$R = (1+t)^n \times \sum_{k=1}^{k=n} k \ (1+t)^{-k} = (1+t)^n \times \sum_{k=1}^{k=n} k \ u^k \qquad (4)$$

Des techniques classiques très instructives permettent d'évaluer

$$S(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k \ x^k \quad (5) :$$

Posons ($x \neq 1$) $$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad (6)$$

Dans la suite, nous allons dériver f par rapport à x, puis remplacer x par $u=(1+t)^{-1}$ qui est dans l'intervalle I =]0 ; 1[que nous choisissons comme domaine pour x.

Dans (6), la seconde fraction $-\frac{x^{n+1}}{1-x}$ est de la forme $x^n\ \varphi(x)$ où est $\varphi(x) = -\frac{x}{1-x}$ est fonction de x seul (pas de n).

Lorsque plus tard, x sera fixé [égal à u], x^n tendra vers 0 lorsque n tendra vers l'infini. En effet $x \in\ ]0\ ;\ 1[$.

Donc, $x^n\ \varphi(x)$ tendra vers 0 lorsque n tendra vers l'infini et on écrira selon l'usage $x^n\ \varphi(x) = \varepsilon(n)$.

La dérivée de $x^n\ \varphi(x)$ par rapport à x est $n\ x^{n-1}\ \varphi(x) + x^n\ \varphi'(x)$. Pour x fixé, c'est encore un infiniment petit par rapport à n, puisque, comme on dit dans les petites classes, l'exponentielle x^n l'emporte sur la puissance n^1

[Pour éviter de dire $\lim_{n \to +\infty} n\ x^n = 0$].

Nous désignerons désormais par $\varepsilon(n)$ tout infiniment petit par rapport à n qui se présentera.

En dérivant (6) par rapport à x, on obtient :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \varepsilon(n) \quad (7)$$

On multiplie (7) par x pour obtenir ce qu'on voulait :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} + \varepsilon(n) \ (8)$$

La condition sur a, à savoir : $V \geq R$ pour tout n s'écrit d'après (1) (4) (5) :

$$a \ \frac{(1+t)^n - 1}{t} \geq (1+t)^n \times S\,(u) \text{ pour tout } n. \qquad (9)$$

D'après (8) et $u = (1+t)^{-1}$: $S\,(u) = \dfrac{u}{(1-u)^2} + \varepsilon \ (n) = \dfrac{1+t}{t^2} + \varepsilon \ (n)$

La condition (9) devient : $a \ \dfrac{(1+t)^n - 1}{t} \geq (1+t)^n \times \left[\dfrac{1+t}{t^2} + \varepsilon(n)\right]$ pour tout n.

Ou encore $\quad a \geq \dfrac{(1+t)^n}{(1+t)^n - 1} \times \left[\dfrac{1+t}{t} + \varepsilon(n)\right]$ pour tout n.

t ne dépend pas de n et $1+t > 1$ donc, en passant à la limite [n tend vers l'infini] on constate que :

- nécessairement $\quad a \geq \dfrac{1+t}{t}$.
- avec $t = 0{,}04$ on obtient $a \geq 26$ ce qui résout le problème du paragraphe I. La réponse est $a = 26$ euros.

- *Calcul de a.*

On vient de voir que la somme à verser doit être au moins $\dfrac{1+t}{t}$, vérifions que cette valeur convient effectivement :

Avec $a = \dfrac{1+t}{t} = 1 + \dfrac{1}{t}$, à la fin de la période 1, on dispose de $1 + \dfrac{1}{t} - 1 = \dfrac{1}{t}$; à la fin de la période 2, on dispose de $\dfrac{1}{t}\ (1+t) + 1 + \dfrac{1}{t} - 2 = \dfrac{2}{t}$ et une récurrence immédiate montre qu'à la fin de la période n, on dispose de $\dfrac{n}{t} > n$.

Conclusion :

Si on verse la somme constante $a = \dfrac{1+t}{t}$ chaque fin de période, à intérêt composé au taux périodique t, on peut retirer : 1 à la fin de la première période, 2 à la fin de la deuxième période, 3 à la fin de la troisième période, …, n à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement.
La valeur donnée de a est minimale.

3. Terminons par un problème à peine plus compliqué qui a été posé à une olympiade. [La compétition américaine PUTNAM il y a une quarantaine d'années] :

Quelle est la valeur minimale a qu'on doit verser chaque fin de période, à intérêt composé au taux périodique t, afin de pouvoir retirer : 1^2 à la fin de la première période, 2^2 à la fin de la deuxième période, 3^2 à la fin de la troisième période, ..., n^2 à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement ?

Cela paraît étonnant à première vue, mais c'est sans compter avec l'exponentielle ici $(1+t)^n$ qui ne va faire qu'une bouchée de la puissance ici n^2.
La somme "actualisée" V des valeurs versées est la même que dans le problème précédent :

$$V_2 = a\left[(1+t)^{n-1}+(1+t)^{n-2}+(1+t)^{n-3}+\ldots+(1+t)+1\right] = a\ \frac{(1+t)^n-1}{t} \qquad (10)$$

Mais la somme "actualisée" R des valeurs retirées est cette fois :

$$R_2 = (1+t)^{n-1}+\ 2^2(1+t)^{n-2}+3^2(1+t)^{n-3}+\ldots+(n-1)^2(1+t)+n^2 \qquad (11)$$

On pose toujours $u = (1+t)^{-1}$.
R_2 s'écrit :

$$R_2 = (1+t)^n\times\sum_{k=1}^{k=n} k^2\ (1+t)^{-k} = (1+t)^n\times\sum_{k=1}^{k=n} k^2\ u^k \qquad (12)$$

Les techniques vues plus haut permettent d'évaluer

$$S_2(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k^2x^k \quad (13) :$$

On dérive deux fois $f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} x^k = \frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}$ dans l'intervalle $I =]0\ ;\ 1[$

On a vu que la dérivée première était

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}+\varepsilon(n) \qquad (14)$$

La dérivée seconde est $f''(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}+\varepsilon(n)$ (15)

[Vérifier qu'on a bien un $\varepsilon(n)$ dans (15)]

Or $S_2(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k^2\ x^k = \sum_{k=1}^{k=n} k(k-1)\ x^k + \sum_{k=1}^{k=n} k\ x^k = x^2f''(x)+xf'(x)$

Donc, d'après (14) et (15) :

$$S_2(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}+\varepsilon(n) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}+\varepsilon(n)$$

Avec $u = (1+t)^{-1}$ cela donne $S_2(x) = \dfrac{(1+t)(2+t)}{t^3} + \varepsilon(n)$ (16)

D'après (10) (12) (13) la condition sur a est $a \dfrac{(1+t)^n - 1}{t} \geq (1+t)^n \times S_2(u)$

Ou encore d'après (16) $a \geq \dfrac{(1+t)^n}{(1+t)^n - 1} \times \left[\dfrac{(1+t)(2+t)}{t^2} + \varepsilon(n)\right]$ pour tout n.

En passant à la limite, on constate que nécessairement $a \geq \dfrac{(1+t)(2+t)}{t^2}$.

Ici aussi, il faut s'assurer qu'en prenant $a = \dfrac{(1+t)(2+t)}{t^2} = 1 + \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}$ on pourra bien effectuer tous les retraits voulus.

A la fin de la période 1, on dispose de $1 + \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2} - 1^2 = \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}$

A la fin de la période 2, on dispose de $\left[\dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}\right](1+t) + 1 + \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2} - 2^2 = \dfrac{8}{t} + \dfrac{4}{t^2}$

La récurrence fonctionne :

Supposons qu'à la fin de la période n, on dispose de $\dfrac{n\ (n+2)}{t} + \dfrac{2n}{t^2}$

[C'est vrai pour $n = 1$ ou 2].

Cette quantité est bien supérieure à n^2.

A l'époque suivante, on disposera de :

$$\left[\frac{n\ (n+2)}{t} + \frac{2n}{t^2}\right](1+t) + 1 + \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2} - (n+1)^2 = \frac{(n+1)\ (n+3)}{t} + \frac{2\ (n+1)}{t^2}$$ CQFD.

Conclusion :

Si on verse la somme constante $a = 1 + \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}$ chaque fin de période, à intérêt composé au taux périodique t, on peut retirer :

1^2 à la fin de la première période, 2^2 à la fin de la deuxième période, 3^2 à la fin de la troisième période,…, n^2 à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement.

La valeur donnée de a est minimale.

Si on reprend le cas particulier $t = 0{,}04$: en versant périodiquement 1326 euros [et pas un centime de moins], au taux périodique de 4 %, on est en mesure de retirer perpétuellement : $1^2 = 1$ euro à la fin de la première période, $2^2 = 4$ euros à la fin de la deuxième période, $3^2 = 9$ euros à la fin de la troisième période, …, n^2 à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, etc.

Encore une fois, une rente "quadratique " face à une inflation "exponentielle" du genre + 2% par an soit une base 1,02 pour l'exponentielle, est illusoire si on compte vivre de cette rente. Et ce ne serait pas mieux avec une rente perpétuelle en n^3.